УДК 629.7 DOI: 10.17587/mau.21.174-183

М. В. Левский, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., levskii1966@mail.ru,
Научно-исследовательский институт космических систем имени А. А. Максимова —
филиал ГКНПЦ им. М. В. Хруничева

Аналитическое решение задачи оптимального управления разворотом космического аппарата с минимальной энергией вращения

Решается динамическая задача оптимального разворота из произвольного начального углового положения в заданное конечное угловое положение с ограниченным управлением, минимизирующим кинетическую энергию вращения космического аппарата (КА). Время окончания маневра известно. Для нахождения оптимальной программы управления применяется квадратичный критерий качества. Использование интегрального показателя оптимальности в специальном виде относительно угловой скорости позволило аналитическим путем решить поставленную задачу. Закон управления записан в явном виде. Построение оптимального управления основано на кватернионных переменных и моделях. Показано, что во время оптимального разворота управляющий момент параллелен прямой, которая неподвижна в инерциальном пространстве, а направление кинетического момента КА в процессе пространственного разворота остается постоянным относительно инерциальной системы координат. Подробно исследован особый режим управления, и сформулированы условия невозможности возникновения такого режима. Доказано, что в особом режиме управления, если он существует, КА вращается по инерции. Представлены формализованные уравнения и расчетные выражения для определения оптимальной программы разворота и длительности разгона и торможения. Также приведена зависимость управляющих переменных от фазовых координат. Предложенный алгоритм управления позволяет осуществить переориентацию КА с минимальной кинетической энергией вращения на фиксированном интервале времени. Даны аналитические выражения для нахождения временных характеристик маневра переориентации и сформулировано условие для определения момента начала торможения, основанное на фактических кинематических параметрах движения, исходя из принципов терминального управления, что обеспечивает высокую точность ориентации. Для динамически симметрического КА приведено полное решение задачи оптимального управления: получены зависимости как явные функции времени для управляющих переменных и соотношения для расчета основных параметров закона управления поворотным маневром. Даны численный пример и результаты математического моделирования пространственного движения КА при оптимальном управлении, которые демонстрируют практическую реализуемость разработанного метода управления ориентацией КА. Наличие готовых формул для синтеза оптимальной программы разворота делает выполненное исследование практически значимым и пригодным для непосредственного применения в практике космических полетов.

Ключевые слова: *космический аппарат, ориентация, кватернион, энергия вращения, принцип максимума, управляющая функция, краевая задача*

Введение

Исследуется задача оптимального управления переориентацией космического аппарата (КА) из произвольного начального положения покоя в заданное конечное положение покоя. Минимизируется максимальная кинетическая энергия вращения на фиксированном интервале времени. Решение поставленной задачи основано на кватернионном уравнении, связывающем кватернион ориентации КА с угловой скоростью [1]. Управлением считается силовой момент. Для формулирования условий оптимальности в аналитическом виде используется интегральный функционал качества, который позволил применить принцип максимума для построения оптимальной программы управления.

К проблеме оптимизации управляемых движений твердого тела (и в частности КА) исследователи обращались неоднократно [1—11]. Многие авторы отмечают [2, 3], что аналитическое решение задачи оптимального разворота в замкнутой форме, если бы оно было найдено, имело бы большой практический интерес, так как позволяет применять на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории движения КА. Для осесимметричного КА некоторые решения известны [4—6] (причем в работе [6] дано лишь численное решение краевой задачи принципа максимума путем замены переменных и сведением ее к краевой задаче разворота сферически-симметричного тела). Однако аналитическое решение задачи пространственного разворота для КА с произвольным распределением масс при произвольных граничных условиях по угловому положению КА не найдено; известны лишь некоторые особые случаи решения задачи разворота (см., например, [1, 7]). Управление КА с помощью гиродинов имеет свои особенности [12, 13]. Разработка экономичных алгоритмов управления ориентацией КА остается актуальной и сегодня. Минимизация энергии вращения в процессе разворота снижает энергетические затраты, а также повышает безопасность космических полетов, поскольку делает минимальным время остановки вращения КА в случае необходимости (например, в нештатных ситуациях, когда требуется экстренно прекратить маневр и стабилизировать КА). Оптимизация способа переориентации (в смысле расхода энергии) повышает эффективность использования КА.

Решение поставленной задачи получено за счет минимизации интеграла энергии вращения. Использованы необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума, а применение кватернионов значительно упрощает расчетные процедуры и уменьшает вычислительные затраты алгоритма управления, делая его более пригодным для бортовой реализации. Математические построения, описывающие изменение управляющих функций и поведение КА во время оптимального разворота, основаны на универсальных переменных [8].

Уравнения движения и постановка задачи оптимального управления

Полагаем, что управление угловым положением КА осуществляется посредством исполнительных механизмов, создающих вращающие моменты относительно всех трех главных центральных осей инерции КА. Угловое движение КА как твердого тела описывается динамическими уравнениями Эйлера [1]

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 &= M_1; \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_1\omega_3 &= M_2; \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 &= M_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

и кинематическим уравнением, записанным в кватернионной форме [1]

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \boldsymbol{\omega}, \qquad (2)$$

где J_i — главные центральные моменты инерции КА; ω_i — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости КА на оси связанного базиса $\boldsymbol{E}_{\text{КА}}$, образованного главными центральными осями эллипсоида инерции КА; M_i − проекции главного момента $\mathbf{M}$ сил на оси связанного базиса $\boldsymbol{E}_{\text{КА}}$ ($i = \overline{1, 3}$); Λ — кватернион [1], задающий движение связанного базиса $\boldsymbol{E}_{\text{КА}}$ относительно инерциального базиса $\boldsymbol{I}$. Считается, что область допустимых управлений $\mathbf{M}$ описывается условием [5]

$$\frac{M_1^2}{J_1} + \frac{M_2^2}{J_2} + \frac{M_3^2}{J_3} \leqslant u_0^2. \qquad (3)$$

Практическое значение имеют задачи, когда разворот выполняется из положения покоя в положение покоя относительно опорного базиса $\boldsymbol{I}$ (и угловые скорости в начальный и конечный моменты времени равны нулю, так как базис $\boldsymbol{I}$ не вращается). Поэтому уравнения (1), (2) имеют следующие краевые условия:

$$\Lambda(0) = \Lambda_{\text{н}},\ \boldsymbol{\omega}(0) = 0; \qquad (4)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_{\text{к}},\ \boldsymbol{\omega}(T) = 0, \qquad (5)$$

где T — время окончания маневра переориентации. Кватернионы $\Lambda_{\text{н}}$ и $\Lambda_{\text{к}}$ имеют произвольные наперед заданные значения, для которых $\Lambda_{\text{к}} \neq \pm\Lambda_{\text{н}}$ и $\|\Lambda_{\text{н}}\| = \|\Lambda_{\text{к}}\| = 1$ (кватернион Λ принят нормированным [1] для удобства). В практике космических полетов актуальной является минимизация величины

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T}(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2). \qquad (6)$$

Для возможности решения задачи разворота с минимальным значением (6) (минимальной кинетической энергией вращения в течение маневра) с помощью принципа максимума [14] введем интеграл

$$G = \int_0^T (J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2)dt. \qquad (7)$$

Задачу оптимального управления сформулируем следующим образом: КА необходимо перевести из состояния (4) в состояние (5) в соответствии с уравнениями (1), (2) и ограничением (3) с минимальным значением функционала (7). Время T окончания маневра переориентации КА фиксировано. Решение $\mathbf{M}(t)$ ищется в классе кусочно-непрерывных функций. Нахождение оптимального способа переориентации КА с минимальным расходом энергии весьма актуально. Необходимо отметить, что для некоторых сочетаний значений $\Lambda_н$, $\Lambda_к$, J_1, J_2, J_3, u_0 и T разворот в рамках задачи (1)—(5), (7) может оказаться не осуществим, поскольку время управления T задано. Однако для оптимального по критерию (7) управления, ограниченного условием (3), имеем максимально широкий диапазон допустимых значений времени T.

Задача (1)—(5), (7) относится к динамической задаче оптимального разворота [1], в которой управляющими функциями являются моменты M_i ($i = \overline{1, 3}$), и может быть решена с использованием принципа максимума Л. С. Понтрягина [14]. Наличие фазового ограничения $\|\Lambda\| = 1$ несущественно, так как оно всегда выполняется (при любых движениях КА вокруг центра масс). Одним из свойств уравнения (2) является постоянство нормы $\|\Lambda\|$ кватерниона Λ ($\|\Lambda\| = \text{const}$). Поскольку $\|\Lambda(0)\| = \|\Lambda_н\| = 1$, то $\|\Lambda(t)\| = 1$ в любой момент времени $t \in [0, T]$. В отличие от работы [9], где рассмотрена задача максимального быстродействия, в данной работе время разворота фиксировано, и минимизируемый функционал включает фазовые переменные, а не управляющие функции.

Математическая формулировка условий оптимальности

В соответствии с принципом максимума [14] введем сопряженные переменные φ_i, соответствующие угловым скоростям ω_i. Критерий оптимальности не содержит позиционных координат, поэтому будем использовать универсальные переменные r_i $(i = \overline{1,3})$ [8], заменяющие сопряженные переменные ψ_j, которые соответствуют компонентам λ_j кватерниона Λ ($j = \overline{0, 3}$). Запишем гамильтониан задачи оптимального управления (1)—(5), (7) [8]:

$$\begin{gathered} H = -(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2) + \\ + \varphi_1(M_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3)/J_1 + \\ + \varphi_2(M_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3)/J_2 + \\ + \varphi_3(M_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2)/J_3 + \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3. \end{gathered} \quad (8)$$

Оптимальные функции r_i как компоненты вектора $\mathbf{r}$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot r_1 = \omega_3 r_2 - \omega_2 r_3,\ \dot r_2 = \omega_1 r_3 - \omega_3 r_1,\ \dot r_3 = \omega_2 r_1 - \omega_1 r_2. \quad (9)$$

Уравнения для сопряженных функций φ_i имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot\varphi_1 &= 2J_1\omega_1 - \omega_3 n_2\varphi_2 - \omega_2 n_3\varphi_3 - r_1; \\ \dot\varphi_2 &= 2J_2\omega_2 - \omega_3 n_1\varphi_1 - \omega_1 n_3\varphi_3 - r_2; \\ \dot\varphi_3 &= 2J_3\omega_3 - \omega_2 n_1\varphi_1 - \omega_1 n_2\varphi_2 - r_3, \end{aligned} \quad (10)$$

где $n_1 = (J_2 - J_3)/J_1$, $n_2 = (J_3 - J_1)/J_2$, $n_3 = (J_1 - J_2)/J_3$.

Гамильтониан H составлен без учета ограничения $\|\Lambda\| = 1$ для фазовых переменных в силу равенства $\|\Lambda(0)\| = 1$, о чем договорились выше. Вектор $\mathbf{r}$ неподвижен относительно инерциального базиса $\boldsymbol{I}$, из-за чего $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$. Решение $\mathbf{r}(t)$ системы (9) определяется начальным $\Lambda_н$ и конечным $\Lambda_к$ положениями КА. Оптимальная функция $\mathbf{r}(t)$ вычисляется через кватернион $\Lambda(t)$ [1, 8]:

$$\mathbf{r} = \tilde\Lambda \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda, \text{ где } \mathbf{c}_E = \Lambda_н \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde\Lambda_н = \text{const}$$

(составляющие вектора $\mathbf{c}_E$ — проекции вектора $\mathbf{r}$ на оси инерциального базиса $\boldsymbol{I}$). Система уравнений (9), (10) совместно с требованием максимальности гамильтониана H задает необходимые условия оптимальности. Условия максимума функции H определяют искомое решение $\mathbf{M}(t)$; граничные условия по положению (для $\Lambda(0)$ и $\Lambda(T)$) определяют решения $\Lambda(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$.

Для нахождения максимума гамильтониана запишем функцию H в виде

$$H = M_1\varphi_1/J_1 + M_2\varphi_2/J_2 + M_3\varphi_3/J_3 + H_{inv},$$

где H_{inv} не зависит явно от управляющих функций M_i. Пусть $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ — вектор сопряженных переменных φ_i. Нетрудно видеть, что в случае $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$ максимум функции H для управлений $M_i(t)$ при ограничении (3) достигается, если

$$M_i = \frac{u_0\varphi_i}{\sqrt{\varphi_1^2/J_1 + \varphi_2^2/J_2 + \varphi_3^2/J_3}} \quad (11)$$

(случай $\boldsymbol{\varphi} = 0$, при котором гамильтониан не зависит явным образом от управления $\mathbf{M}$, требует отдельного рассмотрения). Ниже будет доказано, что $\mathbf{M} = 0$, если $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = 0$ (и $\boldsymbol{\varphi} = 0$). Оптимальное решение определяется замкнутой системой уравнений (1), (2), (9)—(11) с учетом требований (4), (5). Системе (1), (9)—(11) удовлетворяют функции φ_i, пропорциональные r_i. Оптимальные управляющие моменты M_i не зависят от $|\mathbf{r}|$, поэтому для удобства перейдем к нормированному вектору $\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ и обозначим $r_0 = |\mathbf{r}| = \text{const} = |\mathbf{r}(0)| \neq 0$. Для проекций p_i орта $\mathbf{p}$ на оси связанной системы координат справедливы уравнения

$$\dot{p}_1 = \omega_3 p_2 - \omega_2 p_3;\ \dot{p}_2 = \omega_1 p_3 - \omega_3 p_1;\quad \dot{p}_3 = \omega_2 p_1 - \omega_1 p_2. \tag{12}$$

Краевая задача принципа максимума заключается в определении значения $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$, при котором решение системы дифференциальных уравнений (1), (2), (10), (12) (с учетом равенств $r_i = r_0 p_i$) с одновременной максимизацией в каждый момент времени функции Гамильтона H удовлетворяет равенствам (4), (5). С учетом условий разворота $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ система уравнений (1), (9)—(11) имеет единственное решение, в котором φ_i и угловые скорости ω_i равны

$$\varphi_i = a(t) p_i,\ i = \overline{1,3}; \tag{13}$$

$$\omega_i = b(t) p_i / J_i,\ i = \overline{1,3}, \tag{14}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — скалярные функции времени, у которых $\dot{a} \leqslant 0,\ b(t) \geqslant 0$. Подставив φ_i и ω_i, вычисленные по выражениям (13), (14), в систему (10) с учетом соотношений $r_i = r_0 p_i$ получим необходимое условие оптимальности функций $a(t)$ и $b(t)$ в виде уравнения $\dot{a} = 2b(t) - r_0$. Для времен t, когда $a(t) \neq 0$, оптимальный момент $\mathbf{M}$ удовлетворяет соотношениям

$$M_i = \frac{u_0 p_i \operatorname{sign} a(t)}{\sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3}};\quad M_i = \pm \frac{u_0 J_i \omega_i}{\sqrt{J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2}} \tag{15}$$

(знак + соответствует раскрутке КА, знак — соответствует остановке вращения).

После дифференцирования вторых равенств (15) с учетом (1) получим

$$\dot{M}_1 = \omega_3 M_2 - \omega_2 M_3;\ \dot{M}_2 = \omega_1 M_3 - \omega_3 M_1;\quad \dot{M}_3 = \omega_2 M_1 - \omega_1 M_2;\ \dot{\mathbf{M}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} \tag{16}$$

(символ × означает векторное произведение векторов). Из (16) следует, что $|\mathbf{M}| = \text{const}$, если $a(t) \neq 0$ (т. е. на участках разгона и торможения), а значит

$$\sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3} = C = \text{const}.$$

Из уравнений (1), (12), (14) имеем $\dot{b} = m_0 \operatorname{sign} a(t)$, если $a(t) \neq 0$, где $m_0 = \text{const} = u_0/C$.

Если $\dot{a}(t) = 0$, то $a(t) = 0$ (в противном случае $a(t)$ не меняет знак на всем интервале управления $[0, T]$, так как $\ddot{a} = 2\dot{b}$, и КА будет раскручиваться бесконечно и требование $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ не будет выполнено). Для функции $a(t)$ имеем: $a(0) > 0$ и $\dot{a}(0) = -r_0$; $a(T/2) = 0$; $\dot{a}(t) \leqslant 0$; $a(T - t) = -a(t)$ и $\dot{a}(T - t) = \dot{a}(t)$; $a = 0$, если $\dot{a} = 0$. Соответственно, для $b(t)$ будет выполнено $b(0) = b(T) = 0$ и $b(T - t) = b(t)$, $\dot{b}(T - t) = -\dot{b}(t)$.

Если бы $a(0) \leqslant 0$, то $\dot{a} < 0$ и $a < 0$ для любого $t > 0$, из-за чего КА раскручивался бы бесконечно, нарушив условие $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$. Следовательно, всегда $a(0) > 0$ и $a(T) < 0$ (чтобы в окрестности конечного момента времени вектор $\mathbf{M}$ и кинетический момент $\mathbf{L}$ имели противоположные направления). В силу непрерывности функции $a(t)$ существует момент времени (или отрезок времени), когда $a(t) = 0$ и $\boldsymbol{\varphi} = 0$.

Анализ особого режима управления и условия его существования

Пусть t_1, t_2 — моменты времени, для которых $a(t) > 0$, если $t < t_1$, и $a(t) < 0$, если $t > t_2$; $a(t_1) = a(t_2) = 0$. Рассмотрим отрезок времени $[t_1, t_2]$, на котором $a(t) = \text{const} = 0$ и $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$, из-за чего гамильтониан не зависит явным образом от управления $\mathbf{M}$ (такую ситуацию называют особым режимом управления), и формула (11) становится некорректной (t_1, t_2 — начало и окончание особого режима управления, когда $\boldsymbol{\varphi}(t) = \text{const} = 0$). Оптимальный момент $\mathbf{M}$ в особом режиме управления определим из системы (1), (10), в которой $\varphi_i = 0$, $\dot{\varphi}_i = 0$, из-за чего $\omega_i = r_i/(2J_i)$. Подстановка последних равенств в уравнения (1) с учетом (9) дает $M_i = 0$. Таким образом, на всем отрезке времени $[0, T]$ оптимальный момент $\mathbf{M}$ определяется однозначно — по формулам (11), если $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$; а если $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = 0$, то $\mathbf{M} = 0$.

На оптимальных движениях кинетический момент $\mathbf{L}$ и вектор $\mathbf{r}$ имеют одинаковое направление, которое неизменно относительно инерциального базиса $\boldsymbol{I}$. Соотношение кинетической энергии E и кинетического момента $\mathbf{L}$ таково:

$$E/|\mathbf{L}|^2 = (p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3)/2 = \rho,$$
$$\text{так как } E(t) = (J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2)/2.$$

Гамильтониан H не зависит явным образом от времени, поэтому $H = \text{const}$ на всем интервале управления [15]. На участке разгона $a(t) > 0$, $\ddot{a} = 2\dot{b} = 2m_0$ и $a(t) = m_0(t - t_1)^2$, $b = m_0 t$. Подставим (13), (14) и первые равенства (15) в (8)

$$H = 2a(t)m_0\rho + 2br_0\rho - 2b^2\rho = 2\rho m_0^2 t_1^2 = \text{const}$$

(так как $\dot{a} = 0$ и $b = m_0 t_1 = r_0/2$ в момент $t = t_1$), откуда ρ = const. При торможении (когда $a(t) < 0$) $\ddot{a} = 2\dot{b} = -2m_0$ и

$$a(t) = -m_0(t - t_2)^2,$$
$$H = -2a(t)m_0\rho + 2br_0\rho - 2b^2\rho = 2\rho m_0^2 t_1^2 = \text{const}$$

(так как $\dot{a} = 0$ и $b = r_0/2 = m_0 t_1$ в момент $t = t_2$), откуда ρ = const.

Если $a(t)$ = const, то $\dot{a}(t) = 0$, $a(t) = 0$, $b(t)$ = = const = $r_0/2$ и $\ddot{a} = 0$. Функция H равна H = = $2br_0\rho - 2b^2\rho = r_0^2\rho/2$ = const = $2\rho m_0^2 t_1^2$ (так как $r_0 = 2m_0 t_1$), откуда ρ = const. На всех трех участках (разгон, торможение, неуправляемое движение) ρ = const. Поскольку $E(t)$ и $\mathbf{L}(t)$ — непрерывные функции времени, то $\rho = E/|\mathbf{L}|^2$ — непрерывная функция времени. Значит, ρ = = const в течение всего разворота. Гамильтониан $H = \text{const} = u_0^2 t_1^2 = 2E_{\max}$, где $E_{\max}$ — максимальная энергия вращения; $E_{\max} = E(T/2)$.

На участке с особым режимом управления справедливы уравнения:

$$J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 = \text{const};$$
$$J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2 = \text{const};$$
$$\dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3/J_1;$$
$$\dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3/J_2;$$
$$\dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2/J_3.$$

Для проверки наличия особого режима управления необходимо определить значения t_1, t_2 в зависимости от заданного времени T. Воспользуемся зависимостью $t_1 + t_2 = T$ и интегралом пути [10]

$$S = \int_0^T \sqrt{J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2}\,dt, \quad (17)$$

который не зависит от характера изменения функции $b(t)$, если движение КА удовлетворяет уравнениям (12), (14) [10]. Подынтегральная функция пропорциональна $b(t)$, и если особый режим управления существует, то $S = u_0 t_1(T - t_1)$. Исходя из последнего уравнения находим временные характеристики маневра

$$t_р = (T - \sqrt{T^2 - 4S/u_0})/2;$$
$$t_т = (T + \sqrt{T^2 - 4S/u_0})/2;$$
$$t_{св} = \sqrt{T^2 - 4S/u_0},$$

где $t_р$ — момент окончания разгона; $t_т$ — момент начала торможения; $t_{св}$ — длительность неуправляемого участка (т. е. свободного движения). Очевидно, для того, чтобы существовала возможность развернуть КА за время T, должно быть выполнено условие $T^2 \geqslant 4S/u_0$. Если $4S < u_0T^2$, то $t_1 \neq t_2$, оптимальным является движение с особым режимом управления, $r_0 = 2L_{opt}$, где $L_{opt} = u_0(T - \sqrt{T^2 - 4S/u_0})/(2C)$ — модуль кинетического момента КА в интервале между разгоном и торможением (когда $\mathbf{M} = 0$). Если $4S = u_0T^2$, то $t_р = t_т$, особый режим управления отсутствует. Если $4S > u_0T^2$, то задача (1)—(7) не имеет решения (разворот неосуществим).

Оптимальное управление $\mathbf{M}$ и угловые скорости ω_i изменяются по законам

$$\begin{aligned}\mathbf{M} = m_0[\text{sign}(t_р - t) + \text{sign}(t_т - t)]\times \\ \times\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_н \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_н \circ \Lambda/2;\end{aligned} \quad (18)$$

$$J_i\omega_i = m_0(T - |t - t_р| - |t - t_т|)p_i/2. \quad (19)$$

Если оптимальным является управление с одной точкой переключения $t = T/2$, то $|\mathbf{M}|$ = const = m_0 и $r_0 = m_0T = 2L_{\max}$, где $L_{\max} = \sqrt{u_0 S}/C$ — максимальный модуль кинетического момента, равный значению $|\mathbf{L}|$ в момент $t = T/2$. Максимальная энергия вращения $E_{\max} = u_0S/2$.

Таким образом, построение оптимального управления свелось к решению системы уравнений углового движения КА (1), (2) и уравнений (12) при условии, что управление $\mathbf{M}$ выбрано из требования (18). Значение параметра C, необходимое для расчета m_0, зависит от вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$, который в свою очередь определяется граничными значениями $\Lambda_н$, $\Lambda_к$ и моментами инерции J_1, J_2, J_3.

Частные случаи оптимального управления разворотом

Главная задача состоит в нахождении такого значения вектора $\mathbf{p}(0)$, при котором в результате движения КА в соответствии с уравнениями (1), (2), (12), (14) и $\Lambda(0) = \Lambda_н$ выполняется равенство $\Lambda(T) = \Lambda_к$. Общее решение системы уравнений (1), (2), (12), (14) с учетом равенств (4), (5) получить практически невозможно. Приведенная система имеет аналитическое решение только для динамически-симметричного и сферического тел.

Для сферически-симметричного КА ($J_1 = J_2 = J_3$) решение следующее:

$$p_i(t) = \text{const} = p_{i0} = \nu_i \Big/ \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2};$$
$$M_i(t) = 0{,}5m_0[\text{sign}(t_р - t) + \text{sign}(t_т - t)]p_{i0};$$
$$\omega_i(t) = 0{,}5m_0(T - |t - t_р| - |t - t_т|)p_{i0}/J_i,\ i = \overline{1,3},$$

где ν_1, ν_2, ν_3 — компоненты векторной части кватерниона разворота $\Lambda_р = \tilde{\Lambda}_н \circ \Lambda_к$; $m_0 = u_0\sqrt{J_1}$; $t_р = (T - \sqrt{T^2 - 4S/u_0})/2$; $t_т = (T + \sqrt{T^2 - 4S/u_0})/2$; $S = 2\sqrt{J_1}\arccos(\text{sqal}\Lambda_p)$, sqal — скалярная часть кватерниона.

Для динамически симметричного КА (например, когда $J_2 = J_3$) задача оптимального управления разворотом решается до конца. Оптимальное движение представляет собой одновременное вращение КА как твердого тела вокруг своей продольной оси OX и вокруг вектора $\mathbf{p}$, неподвижного в инерциальном пространстве и составляющего с продольной осью КА определенный постоянный угол. Угловые скорости относительно осей OX и $\mathbf{p}$ изменяются пропорционально, и поэтому для оптимального решения $\mathbf{p}(t)$ справедливы уравнения

$$\Lambda_к = \Lambda_н \circ e^{\mathbf{p}_0\beta/2} \circ e^{\mathbf{e}_1\alpha/2},$$
$$p_1 = p_{10},\ p_2 = p_{20}\cos\kappa + p_{30}\sin\kappa,$$
$$p_3 = -p_{20}\sin\kappa + p_{30}\cos\kappa,\ \kappa = \frac{J_{tr} - J_1}{J_{tr}}\int_0^t \omega_1(t)dt,$$

где e — кватернионная экспонента; $p_{i0} = p_i(0)$; $\mathbf{e}_1$ — орт продольной оси КА; α, β — углы поворота КА вокруг продольной оси OX и вокруг вектора $\mathbf{p}$ соответственно ($|\alpha| \leqslant \pi$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$); $J_{tr} = J_2 = J_3$; продольная угловая скорость $\omega_1(t)$ определяется из соотношений (19) с учетом $p_1 = p_{10}$. Зависимость p_{i0}, α, β от $\Lambda_н$ и $\Lambda_к$ определяется системой

$$\alpha = \frac{J_{tr} - J_1}{J_1}p_{10}\beta;$$
$$\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - p_{10}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \nu_0;$$
$$\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + p_{10}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \nu_1;$$
$$p_{20}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + p_{30}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \nu_2;$$
$$-p_{20}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + p_{30}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \nu_3,$$

где ν_0, ν_1, ν_2, ν_3 — компоненты кватерниона разворота $\Lambda_р$; $-\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$. Угловые скорости ω_i вычисляются по формулам (19), оптимальный момент соответствует (18), в которых

$$t_р = (T - \sqrt{T^2 - 4J_2\beta/m_0})/2;$$
$$t_т = (T + \sqrt{T^2 - 4J_2\beta/m_0})/2.$$

Для несимметричного КА (когда $J_1 \neq J_2 \neq J_3$) решение системы уравнений (2), (12), (14) находится только численными методами, например, методом последовательных приближений (в частности, [9, 16]). Как было показано раньше [10], оптимальное значение $\mathbf{p}_0$ не зависит от характера изменения модуля кинетического момента $|\mathbf{L}|$ в процессе разворота, если КА вращается по траектории с наименьшим значением интеграла (17), описываемой уравнениями (12), (14). Следовательно, краевую задачу принципа максимума можно решить с помощью метода итераций, подробно описанного в предыдущей работе [9].

Полученное оптимальное управление (18), (19) обладает крайне полезными свойствами. При развороте КА с минимальным значением (7) остановить вращение КА в условиях ограничения (3) можно за минимальное время, поскольку одновременно с (7) минимизируется величина (6), которая равна $2E_{\max}$. Действительно, для любого вращения, удовлетворяющего условиям (3)—(5), $E(t) \leqslant u_0^2t^2/2$ для $t \leqslant T/2$ и $E(t) \leqslant u_0^2(T - t)^2/2$, если $t \geqslant T/2$. Поэтому для всех допустимых управлений, которые удовлетворяют условию (3), выполняется неравенство

$$\int_0^T (J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2)dt \leqslant \leqslant 2E_{\max}(T - 4\sqrt{2E_{\max}}/3u_0), \quad (20)$$

Видно, что если левая часть неравенства (20) превышает значение функционала (7), соответствующее оптимальному управлению (18), то правая часть (20) должна быть заведомо больше, чем G_{opt}, где G_{opt} — значение (7) при управлении (18). Для любого управления, отличного от оптимального (18), значение (7) больше G_{opt}, а значит, и $E_{\max} > E_{opt}$, так как правая часть (20) — монотонно возрастающая функция аргумента $E_{\max}$ на всем отрезке $[0, u_0^2T^2/8]$, где E_{opt} — значение максимальной кинетической энергии вращения во время разворота при оптимальном управлении (18). Таким образом доказано, что минимизация интеграла (7) приводит к вращению КА с минимально возможной кинетической энергией вращения, что важно в практике космических полетов.

Остановка вращения будет максимально быстрой, если $\mathbf{M}$ соответствует равенствам (15), взятым со знаком минус [11]; при этом время торможения до $\boldsymbol{\omega} = 0$ составляет $t_{\text{ост}} = \sqrt{2E}/u_0$. Для того чтобы $t_{\text{ост}}$ было минимальным в любой момент времени $t \in [0, T]$, необходимо минимизировать $E_{\max}$. Управление (18) обеспечивает минимум характеристикам (6), (7), а значит, $t_{\text{ост}}$ минимально.

Поскольку при торможении КА управляющий момент $\mathbf{M}$ направлен строго против кинетического момента $\mathbf{L}$, то момент начала торможения может быть спрогнозирован достаточно точно. Длительность остановки вращения равна $\tau = |\mathbf{L}|/m_0$, так как гашение кинетического момента на участке торможения выполняется по линейному закону: $|\mathbf{L}(t)| = L_{\max} - m_0(t - t_{\text{т}})$. Момент начала участка торможения определяется условием:

$$4\arcsin\frac{K\sqrt{q_2^2 + q_3^2}}{\sqrt{(J_2\omega_2)^2 + (J_3\omega_3)^2}} = \frac{K^2\sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}}{m_0\sqrt{(J_2\omega_2)^2 + (J_3\omega_3)^2}},$$

где q_j — компоненты кватерниона рассогласования $\tilde{\Lambda}(t) \circ \Lambda_{\text{к}}$ $(j = 0, 1, 2, 3)$; $K = |J \cdot \boldsymbol{\omega}|$ — модуль кинетического момента КА.

Определение момента времени $t_{\text{т}}$ по фактическим (измеренным значениям) параметрам движения (угловому рассогласованию и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$) повышает точность приведения КА в требуемое состояние $\Lambda = \Lambda_{\text{к}}$, $\boldsymbol{\omega} = 0$. Предложенный способ разворота лучше относительно известных решений, так как разработанный алгоритм управления гарантирует движение КА с минимальной энергией вращения.

Оценим относительный рост функционала G из-за ограниченности управляющего момента. Для оптимального движения (18), (19) имеем $(T - \tau)L_{opt}C = S$, поэтому $L_{opt} = S/(C(T - \tau))$ и $E_{\max} = S^2/(2(T - \tau)^2)$. Значение интеграла (7) равно

$$G = C^2\int_0^T |\mathbf{L}|^2 dt = u_0^2\tau^2(T - 2\tau) + 2\int_0^\tau u_0^2 t^2 dt = u_0^2\tau^2(T - 4\tau/3),$$

где

$$\tau = (T - \sqrt{T^2 - 4S/u_0})/2;$$

$$C = \sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3}.$$

Если $\tau \to 0$, то $G \to G_{\min} = S^2 / T$. Если $\tau = T/2$, то $G = G_{\max} = u_0^2 T^3/12 = 2S\sqrt{u_0 S}/3$. Следовательно,

$$G = G_{\min}T(T - 4\tau/3)(T - \tau)^{-2}.$$

Из-за наличия участков разгона и торможения интеграл (7) превысит минимально возможное значение $G_{\min}$ (когда управление неограниченно $u_0 \to \infty$ и $\tau \to 0$) на величину

$$\Delta G = G - G_{\min} = S^2 (T - 4\tau/3)(T - \tau)^{-2} - S^2/T.$$

Относительное превышение $\Delta G/G_{\min} = T(T - 4\tau/3)(T - \tau)^{-2} - 1$. Чем меньше τ, тем меньше величина "проигрыша" $\Delta G/G_{\min}$. Это хорошо видно, если записать соотношение

$$\Delta G/G_{\min} = \frac{2\tau}{3(T - \tau)} - \frac{1}{3}\left(\frac{\tau}{T - \tau}\right)^2.$$

Время τ изменяется в пределах от нуля до $T/2$. Функция $\Delta G/G_{\min}$ возрастает всюду в диапазоне $0 \leqslant \tau \leqslant T/2$. Минимальное значение соответствует режиму $\tau \to 0$, а критической точкой (максимумом) является предельный случай $\tau = T/2$, в котором превышение ΔG составляет треть от $G_{\min}$.

Исследование завершено. Основные результаты следующие: найдена программа оптимального управления разворотом КА с минимальной энергией вращения на заданном интервале времени; демонстрируется, что двухимпульсное управление, когда между разгоном и торможением КА вращается по инерции, является оптимальным; для оптимального решения даны оценки относительного роста минимизируемого функционала из-за ограниченности управляющего момента. Для динамически симметричного КА представлено законченное решение задачи разворота в замкнутой форме. Полученный способ управления отличается от всех других известных решений. Главное отличие состоит в форме оптимизируемого функционала, который обеспечивает разворот КА с минимальной энергией вращения при заданном времени маневра.

Компьютерная апробация алгоритма оптимального управления

Рассмотрим разворот КА на 180 ° из начального положения $\Lambda_н$, когда оси КА совпадают с осями опорного базиса $\boldsymbol{I}$, в заданное конечное положение $\Lambda_к$; элементы кватерниона $\Lambda_к$ равны: $\lambda_0 = 0$; $\lambda_1 = 0{,}707107$; $\lambda_2 = 0{,}59$; $\lambda_3 = 0{,}39$. Пусть $J_1 = 77\ 544$ кг·м^2; $J_2 = 228\ 466$ кг·м^2; $J_3 = 175\ 683$ кг·м^2; $u_0 = 0{,}2$ Н·кг$^{-1/2}$, а время разворота $T = 240$ с. После решения краевой задачи принципа максимума получили следующие значения: $\mathbf{p}_0 = \{0{,}485304;\ 0{,}126172;\ 0{,}865194\}$, интеграл пути $S = 880\ \sqrt{Дж \cdot с}$. Расчетное время разгона (торможения) $\tau = 20$ с. Модуль кинетического момента во время вращения по инерции (между разгоном и торможением) равен $L_{max} = 49{,}7$ Н·м·с. Максимальная кинетическая энергия вращения составила $E_{max} = 8$ Дж.

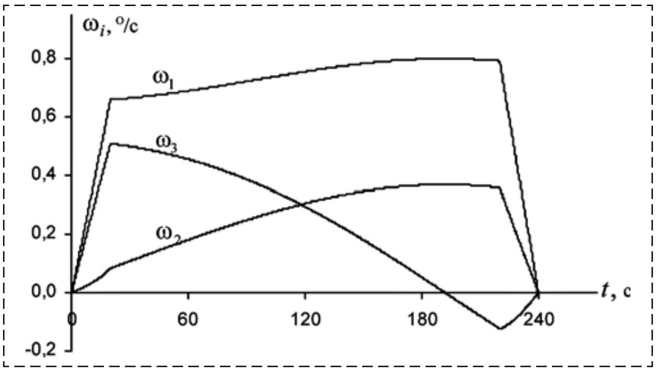

Рис. 1. Изменение угловых скоростей во время оптимального разворота

Fig. 1. Changing the angular velocities during optimal slew maneuver

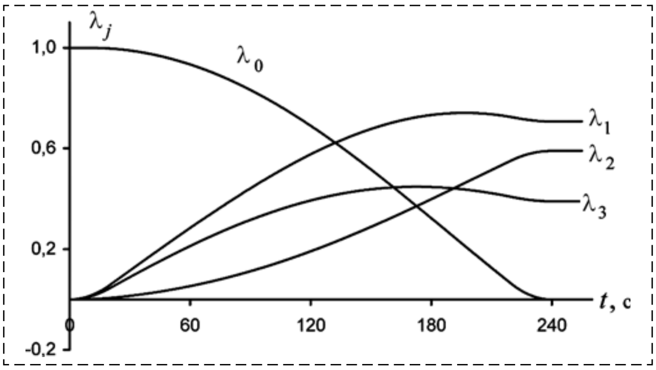

Рис. 2. Изменение компонент кватерниона Λ во время оптимального разворота

Fig. 2. Changing the components of quaternion Λ during optimal slew maneuver

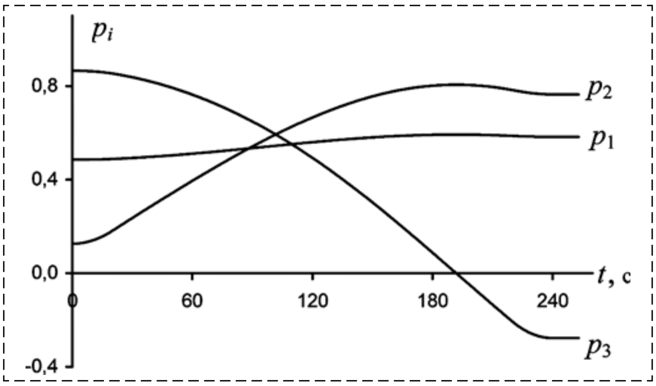

Рис. 3. Изменение компонент единичного вектора p во время оптимального разворота

Fig. 3. Changing the components of the unit vector p during optimal slew maneuver

Результаты численного моделирования движения КА во время разворота при оптимальном управлении представлены на рис. 1—3. На рис. 1 изображены графики изменения угловых скоростей $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ во времени, на рис. 2 приведено изменение компонент кватерниона $\Lambda(t)$ текущей ориентации КА, а рис. 3 отражает поведение оптимальных функций $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$. Из рис. 1 четко видно разделение процесса переориентации на три фазы — разгон до требуемой энергии вращения E_{max}, неуправляемое вращение, торможение. Момент окончания разгона $t_р = 20$ с, момент начала торможения $t_т = 220$ с. Необходимо отметить, что $\omega_1(t)$, соответствующая продольной оси КА, — знакопостоянная функция времени (это свойство наблюдается при любых сочетаниях граничных значений $\Lambda_н$ и $\Lambda_к$). В отличие от угловых скоростей, переменные λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 и p_1, p_2, $p_3(t)$ — гладкие функции времени.

Заключение

Исследуется задача оптимального управления разворотом КА за фиксированное время с минимальным значением интеграла кинетической энергии вращения. Представлено аналитическое решение предложенной задачи. Доказано, что двухимпульсное управление, когда между разгоном и торможением КА вращается по инерции, является оптимальным. Показано, что в течение всего интервала управления направление кинетического момента постоянно в инерциальной системе координат, и КА вращается вдоль "траектории свободного движения". Выписаны формализованные уравнения и расчетные выражения для построения оптимальной программы разворота. Приведены выражения для нахождения временных характеристик маневра и условие для определения момента начала торможения, основанное на фактических кинематических параметрах движения, исходя из принципов терминального управления, что обеспечивает высокую точность ориентации. Для длительности разгона и торможения представлены аналитические формулы. Даны пример и результаты математического моделирования движения КА при оптимальном управлении, которые подтверждают практическую реализуемость описанного метода управления.

Рассмотренная задача достаточно актуальна. Значение и важность проведенных исследований состоят в том, что выбранный критерий оптимальности минимизирует кинетическую энергию вращения во время разворота. Наличие готовых формул для синтеза оптимальной программы движения во время поворотного маневра делает выполненное исследование практически значимым и пригодным для непосредственного применения в практике космических полетов. Значимость предложенного способа разворота состоит не только в эффективности управления с энергетической точки зрения, но и в смысле безопасности, так как вращение с минимальной энергией позволяет остановить вращение КА за минимальное время (это очень актуально в различных критических ситуациях), ведь чем меньше энергия вращения, тем меньше длительность торможения.

Список литературы

1. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. **Liu S., Singh T.** Fuel/time optimal control of spacecraft maneuvers // Guidance. 1996. Vol. 20, N. 2. P. 394—397.
3. **Scrivener S., Thompson R.** Survey of time-optimal attitude maneuvers // Guidance. Control and dynamics. 1994. V. 17, N. 2. P. 225—233.
4. **Shen H., Tsiotras P.** Time-optimal control of axi-symmetric rigid spacecraft with two controls // AIAA Guidance, control and dynamics. 1999. Vol. 22, N. 5. P. 682—694.
5. **Бранец В. Н., Черток М. Б., Казначеев Ю. В.** Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космические исследования. 1984. Т. 22, Вып. 3. С. 352—360.
6. **Молоденков А. В., Сапунков Я. Г.** Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 2. С. 152—165.
7. **Levskii M. V.** About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation // Problems of nonlinear analysis in engineering systems. 2015. Vol. 21, N. 2. P. 61—75.
8. **Левский М. В.** Использование универсальных переменных в задачах оптимального управления ориентацией космических аппаратов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 53—59.
9. **Левский М. В.** Применение принципа максимума Л. С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 6. С. 144—157.
10. **Levskii M. V.** Optimal spacecraft terminal attitude control synthesis by the quaternion method // Mechanics of solids. 2009. Vol. 44, N. 2. P. 169—183.
11. **Левский М. В.** К вопросу оптимального успокоения космического аппарата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2011. № 1. С. 147—161.
12. **Сарычев В. А., Беляев М. Ю., Зыков С. Г., Сазонов В. В., Тесленко В. П.** Математические модели процессов поддержания ориентации орбитальной станции "Мир" с помощью гиродинов. М.: Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. 1989. № 10.
13. **Ковтун В. С., Митрикас В. В., Платонов В. Н., Ревнивых С. Г., Суханов Н. А.** Математическое обеспечение проведения экспериментов при управлении ориентацией космического астрофизического модуля "Гамма" // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1990. № 3. С. 144—157.
14. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
15. **Young L. G.** Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. W. B. Saunders Company. Philadelphia, London, Toronto, 1969. 327 p.
16. **Левский М. В.** Система управления пространственным разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2006431 // Бюллетень "Изобретения. Заявки и патенты". 1994. № 2. С. 49—50.

Analytical Solving the Optimal Control Problem of Spacecraft's Slew Maneuver with Minimal Energy of Rotation

M. V. Levskii, levskii1966@mail.ru,

Maximov Research Institute of Space Systems as Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, The Moscow region

Corresponding author: **Levskii Mikhail V.,** Ph.D., Leading Researcher, Maximov Research Institute of Space Systems as Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, The Moscow region, e-mail: levskii1966@mail.ru

Accepted on September 26, 2019

Abstract

Dynamic problem of optimal reorientation from an arbitrary initial attitude into the given final angular position with restricted control which minimizes kinetic energy of spacecraft rotation was solved. Termination time of maneuver is known. Quadratic criterion of quality is applied for finding the optimal control program. Use of integral index in special form concerning angular velocity has helped solve the formulated problem by analytical way. Control law was written down in explicit form. Designing the optimal control is based on quaternion variables and models. It is shown that during optimal turn, the controlling moment is parallel to the straight line which is immobile in the inertial space, and direction of spacecraft's angular momentum in the process of rotation is constant relative to the inertial coordinate system. Special control regime was studied in detail, and conditions of the impossibility of occurrence of this regime are formulated. It is proven that spacecraft rotates by inertia in special control regime if it exists. The formalized equations and computational expressions for determining the optimal rotation program and duration of acceleration and braking were written. A dependence of control variables on phase coordinates is presented also. The proposed control algorithm allows the spacecraft's reorientation to be carried out within the fixed time period with minimal angular kinetic energy. Analytical expressions for computing the time characteristics of reorientation maneuver are given, and condition for determination of the moment of the beginning of the braking, based on factual kinematic parameters of motion judging by principles of terminal control is formulated, that provides high accuracy of orientation. A comprehensive solution to the control problem is presented for a dynamically symmetric spacecraft: the dependences as explicit functions of time for the control variables are obtained, and relations for calculating the key parameters of the turn maneuver's control law are given also. A numerical example and the results of mathematical simulation of spacecraft's motion with optimal control are presented, which demonstrate the practical feasibility of the designed method for controlling the spacecraft attitude. Presence of ready formulas for synthesis of optimal motion program during reorientation maneuver does the executed research as practically significant and suitable for direct use in practice of space flights.

Keywords: *spacecraft, attitude, quaternion, energy of rotation, maximum principle, control function, boundary-value problem*

For citation:

Levskii M. V. Analytical Solving the Optimal Control Problem of Spacecraft's Slew Maneuver with Minimal Energy of Rotation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2020, vol. 21, no. 3, pp. 174—183.

DOI: 10.17587/mau.21.174-183

References

1. **Branets V. N., Shmyglevskii I. P.** The use of quaternions in problems of orientation of a rigid body, Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).
2. **Liu S., Singh T.** Fuel/time optimal control of spacecraft maneuvers, *Guidance*, 1996, vol. 20, no. 2, pp. 394—397.
3. **Scrivener S., Thompson R.** Survey of time-optimal attitude maneuvers, *Guidance, Control and Dynamics*, 1994, vol. 17, no. 2, pp. 225—233.
4. **Shen H., Tsiotras P.** Time-optimal control of axi-symmetric rigid spacecraft with two controls, *AIAA Guidance, Control and Bynamics,* 1999, vol. 22, no. 5, pp. 682—694.
5. **Branets V. N., Chertok M. B., Kaznacheev Yu. V.** Optimal rotation of a rigid body with one symmetry axis, *Kosmicheskie Issledovaniya*. 1984, vol. 22, iss. 3, pp. 352—360.
6. **Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G.** A solution of the optimal turn problem of an axially symmetric spacecraft with bounded and pulse control under arbitrary boundary conditions, *Izvesttiya RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2007, no. 2, pp. 152—165 (in Russian).
7. **Levskii M. V.** About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation, *Problems of nonlinear analysis in engineering systems*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 61—75.
8. **Levskii M. V.** The use of universal variables in problems of optimal control concerning spacecrafts orientation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 1, pp. 53—59 (in Russian).
9. **Levskii M. V.** Pontryagin's maximum principle in optimal control problems of orientation of a spacecraft, *Izvestiya RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2008, no. 6, pp. 144—157 (in Russian).
10. **Levskii M. V.** Optimal spacecraft terminal attitude control synthesis by the quaternion method, *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, no. 2, pp. 169—183.
11. **Levskii M. V.** On optimal spacecraft damping, *Izvestiya RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2011. no. 1, pp. 147—161 (in Russian).
12. **Sarychev V. A., Belyaev M. Yu., Zykov S. G., Sazonov V. V., Teslenko V. P.** Mathematical models of processes for supporting orientation of the Mir orbital station with the use of gyrodynes, *Preprint IPM im. M. V. Keldysha AN SSSR,* 1989, no. 10 (in Russian).
13. **Kovtun V. S., Mitrikas V. V., Platonov V. N., Revnivykh S. G., Sukhanov N. A.** support for conducting experiments with attitude control of space astrophysical module Gamma, *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1990, no. 3, pp. 144—157 (in Russian).
14. **Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.** mathematical theory of optimal processes, Moscow, Nauka, 1983 (in Russian); Gordon and Breach, New York, 1986, 361 p. (in Russian).
15. **Young L. G.** Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. W. B. Saunders Company. Philadelphia, London, Toronto, 1969, 327 p.
16. **Levskii M. V.** A system of controlling a spatial turn of spacecraft. The patent for the invention of the Russian Federation no. 2006431, *Byulleten' "Izobreteniya. Zayavki i Patenty",* 1994, no. 2, pp. 49—50 (in Russian).