УДК 531.36; 62-50 DOI: 10.17587/mau.21.136-142

В. И. Воротников, д-р физ.-мат. наук, проф., vorotnikov-vi@rambler.ru,
Сочинский институт Российского университета дружбы народов, г. Сочи,
Ю. Г. Мартышенко, канд. физ.-мат. наук, доц., j-mart@mail.ru,
Российский государственный университет нефти и газа, Москва

О детектируемости по части переменных нелинейных дискретных систем

Дискретные (конечно-разностные) системы широко используются в современной нелинейной теории управления. Одной из основных задач качественного исследования таких систем является обладающая большой общностью задача устойчивости нулевого положения равновесия. В большинстве работ такая задача устойчивости анализируется по отношению ко всем переменным, определяющим состояние системы.

Однако для многих важных в приложениях случаев возникает необходимость анализа более общей задачи: об устойчивости нулевого положения равновесия не по всем переменным, а только по некоторой заданной части переменных. Такая задача часто рассматривается также как вспомогательная при исследовании устойчивости по всем переменным. На этом пути возникают соответствующие понятия и задачи детектируемости изучаемой системы, играющие важную роль в процессе анализа нелинейных управляемых систем. Затем были поставлены более общие задачи частичной детектируемости, в рамках которых изучается ситуация, когда из устойчивости по части переменных следует устойчивость не по всем, а по большей части переменных.

В данной статье рассматривается нелинейная дискретная (конечно-разностная) система общего вида, допускающая нулевое положение равновесия. Находятся условия на структурную форму рассматриваемой системы, определяющие ее частичную детектируемость. При выполнении этих условий устойчивость по заданной части переменных нулевого положения равновесия системы означает его фактическую устойчивость по другой — бóльшей части переменных. При этом устойчивость по оставшимся переменным является неопределенной и может исследоваться дополнительно. В процессе анализа указанной проблемы частичной детектируемости вводится понятие частичной нуль-динамики системы. Дается приложение полученных результатов к задаче стабилизации к части переменных нелинейных дискретных управляемых систем.

Ключевые слова: *нелинейная дискретная (конечно-разностная) система, устойчивость по части переменных, детектируемость по части переменных, частичная стабилизация*

Введение

Дискретные по времени нелинейные системы уравнений (nonlinear discrete-time systems), являющиеся по форме нелинейными конечно-разностными системами (nonlinear difference systems), широко используются в современной нелинейной теории управления, вычислительной математике, а также при моделировании дискретных во времени процессов. Кроме того, такие системы являются составной частью гибридных (с импульсным эффектом) систем, эволюция которых происходит в непрерывно-дискретном времени. Теории и методам качественного анализа нелинейных дискретных систем посвящена обширная литература [1—6]. Отметим, что анализ указанных систем (в сравнении с анализом систем с непрерывной динамикой) имеет ряд особенностей; укажем, например, на "дискретный" вариант принципа максимума Понтрягина [7], а также на особенности теорем о робастной устойчивости линейных дискретных систем [8].

Важной с теоретической и прикладной точек зрения является задача устойчивости нулевого положения равновесия при достаточно общих допущениях на правые части рассматриваемой дискретной (конечно-разностной) системы. При этом в большинстве работ устойчивость рассматривается по отношению ко всем переменным, определяющим состояние системы (по всем координатам фазового вектора системы).

Однако под влиянием развития теории устойчивости систем с непрерывной динамикой начиная с 70-х годов прошлого столетия для нелинейных дискретных систем стали рассматриваться более общие задачи частичной устойчивости [2, 4, 5, 9—15]: по части переменных, по заданным функциям состояния, "частичных" положений равновесия и др. Такие задачи естественным образом возникают в приложениях как исходя из требования нормального функционирования, так и при оценке возможностей проектируемой системы.

В рамках концепций детектируемости и частичной детектируемости [16—19] указанные задачи устойчивости по части переменных можно также рассматривать как вспомогательные при анализе устойчивости по всем или по большей части переменных.

В контексте этих исследований в данной статье анализируется общая структурная форма дискретной (конечно-разностной) нелинейной системы, для которой устойчивость по части переменных нулевого положения равновесия означает его устойчивость по другой — бóльшей части переменных.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное действительное конечномерное пространство векторов $\mathbf{x}$ с нормой $|\mathbf{x}| = \max|x_i|$ (x_i — i-я компонента вектора $\mathbf{x}$). Введем разбиение $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ ($^{\mathrm{T}}$ обозначает транспонирование). Обозначим $\mathbb{Z}_+ = \{k = 0, 1, 2, ...\}$ множество целых неотрицательных чисел.

Пусть дана конечномерная нелинейная нестационарная система дискретных (конечно-разностных) уравнений [1—6]

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k)),\ \mathbf{X}(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0},$$

которую с учетом сделанного разбиения $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ представим в виде двух групп уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k + 1) &= \mathbf{Y}(k, \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)), \\ \mathbf{z}(k + 1) &= \mathbf{Z}(k, \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)). \end{aligned} \qquad (1)$$

В системе (1) $k \in \mathbb{Z}_+$ — дискретное время, поэтому везде далее $k \in \mathbb{Z}_+$.

Будем считать, что вектор-функция $\mathbf{X} = (\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{Z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, определяющая правые части системы (1), для $k \in \mathbb{Z}_+$ непрерывна по $\mathbf{x}$ в области

$$|\mathbf{y}| < h,\ |\mathbf{z}| < \infty. \qquad (2)$$

Кроме того, считаем, что для векторной функции $\mathbf{X}$ равномерно по $k \in \mathbb{Z}_+$ на каждом компактном множестве K из области (2) выполнены условия Коши—Липшица по $\mathbf{x}$: существует постоянная $l = l(K) > 0$ такая, что для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ при любых $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in K$ имеет место неравенство $|\mathbf{X}(k, \mathbf{x}_2) - \mathbf{X}(k, \mathbf{x}_1)| \leqslant l|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$. Тогда при всех $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ для каждой точки $\mathbf{x}_0$ из области (2) существует единственное решение $\mathbf{x}(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)$ системы (1). Дополнительно предположим [13], что решения системы (1) $\mathbf{z}$-продолжимы. Это значит, что решения системы (1) определены для всех $k \geqslant k_0$, при которых $|\mathbf{y}(k,\ k_0,\ \mathbf{x}_0)| < h$.

Определения. Нулевое положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ дискретной системы (1) [7, 13]:

1) $\mathbf{y}$-*устойчиво*, если для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, а также для произвольного числа $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, найдется число $\delta(\varepsilon,\ k_0) > 0$ такое, что неравенство $|\mathbf{y}(k,\ k_0,\ \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ имеет место для всех $k \geqslant k_0$ и $|\mathbf{x}_0| < \delta$;

2) *равномерно* $\mathbf{y}$-*устойчиво*, если $\delta = \delta(\varepsilon)$;

3) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}$-*устойчиво*, если оно равномерно $\mathbf{y}$-устойчиво и существует $\Delta > 0$ такое, что для произвольного решения $\mathbf{x}(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)$ системы (1), для которого $|\mathbf{x}_0| < \Delta$, предельное соотношение $|\mathbf{y}(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)| = 0$, $k \to \infty$ выполняется равномерно по k_0, $\mathbf{x}_0$ из области $k_0 \geqslant 0$, $|\mathbf{x}_0| < \Delta$ (выполнение указанного предельного соотношения означает, что для любых чисел $\eta > 0$, $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ найдется целое число $T(\eta) > 0$ такое, что $|\mathbf{y}(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)| < \eta$ при всех $k \geqslant k_0 + T(\eta)$, $|\mathbf{x}_0| < \Delta$).

Имея в виду анализ задачи частичной детектируемости системы (1), предположим также, что $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Соответствующие понятия $\mathbf{y}_1$-устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ получаются заменой $\mathbf{y}(k,\ k_0,\ \mathbf{x}_0)$ на $\mathbf{y}_1(k,\ k_0,\ \mathbf{x}_0)$ в приведенных выше определениях.

Задача. Требуется указать общую структурную форму нелинейной дискретной системы (1), для которой $\mathbf{y}_1$-устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ означает его $\mathbf{y}$-устойчивость.

2. Условия частичной детектируемости

В соответствии со сделанным для формулировки и решения задачи частичной детектируемости разбиением $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ представим первую группу уравнений системы (1) в виде двух групп уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(k + 1) &= \mathbf{Y}_1(k,\ \mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k),\ \mathbf{z}(k)); \\ \mathbf{y}_2(k + 1) &= \mathbf{Y}_2(k,\ \mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k),\ \mathbf{z}(k)), \end{aligned}$$

а вектор-функцию $\mathbf{Y}_2(k,\ \mathbf{x}(k))$ разделим на две части следующим образом:

$$\mathbf{Y}_2(k, \mathbf{x}(k)) = \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k)) + \mathbf{R}(k, \mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k), \mathbf{z}(k));$$

где

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}(k, \mathbf{x}(k)) = \mathbf{Y}_2(k, \mathbf{x}(k)) - \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k)); \\ &\mathbf{R}(k, \mathbf{0}, \mathbf{y}_2(k), \mathbf{0}) \equiv \mathbf{R}(k, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Дискретная (конечно-разностная) система уравнений

$$\mathbf{y}_2(k + 1) = \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k)) \qquad (3)$$

будет "*приведенной*" (по переменным $\mathbf{y}_2$) подсистемой системы (1).

Допустим, что вектор-функция $\mathbf{Y}_2^0$ для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ непрерывна по $\mathbf{y}_2$ в области $|\mathbf{y}_2| < h$ и равномерно по $k \in \mathbb{Z}_+$ на каждом компактном подмножестве из этой области удовлетворяет условию Коши—Липшица по $\mathbf{y}_2$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*:

1) *найдется непрерывная для каждого* $k \in \mathbb{Z}_+$ *вектор-функция* $\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k))$, $\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ *такая, что для каждого* $k \in \mathbb{Z}_+$ в *области* (2) *имеет место неравенство*

$$|\mathbf{R}(k, \mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k), \mathbf{z}(k))| \leqslant |\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k))|; \quad (4)$$

2) *положение равновесия* $\mathbf{y}_2(k) = \mathbf{0}$ "*приведенной*" *подсистемы* (3) *равномерно асимптотически устойчиво по всем переменным.*

Тогда, если положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ *системы* (1) *равномерно* $\mathbf{y}_1$-*устойчиво, то оно равномерно* $\mathbf{y}$-*устойчиво.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы для системы (1) найдется [1] функция Ляпунова $V(k, \mathbf{y}_2)$, определенная и непрерывная для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ в области $|\mathbf{y}_2| < h$ и удовлетворяющая условиям ($l = \text{const} > 0$)

$$|V(k, \mathbf{y}_2'') - V(k, \mathbf{y}_2')| \leqslant l\|\mathbf{y}_2'' - \mathbf{y}_2'\|; \quad (5)$$

$$a_1(|\mathbf{y}_2|) \leqslant V(k, \mathbf{y}_2) \leqslant a_2(|\mathbf{y}_2|); \quad (6)$$

$$\Delta V_{(3)} \leqslant -a_3(|\mathbf{y}_2(k)|). \quad (7)$$

Здесь $a_i(r)$, $a_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$) — непрерывные монотонно возрастающие по $r > 0$ скалярные функции (функции типа Хана [19, 20]), а $\Delta V_{(3)}$ является приращением (аналогом производной) V-функции в силу системы (3); указанное приращение V-функции вычисляется по формуле

$$\Delta V(k, \mathbf{x}(k))) = V(k + 1, \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k))) - V(k, \mathbf{y}_2(k)).$$

При условиях (5), (7) приращения V-функции в силу дискретных систем (1) и (3) связаны соотношением

$$\begin{aligned}\Delta V_{(1)} &= V(k, \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k)) + \mathbf{R}(k, \mathbf{x}(k))) - \\ &- V(k, \mathbf{y}_2(k)) = V(k, \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k))) - V(k, \mathbf{y}_2(k)) + \\ &+ V(k, \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k)) + \mathbf{R}(k, \mathbf{x}(k))) - \\ &- V(k, \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k))) = \\ &= \Delta V_{(3)} + V(k, \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k)) + \mathbf{R}(k, \mathbf{x}(k))) - \\ &- V(k, \mathbf{Y}_2^0(k, \mathbf{y}_2(k))) \leqslant \Delta V_{(3)} + l|\mathbf{R}(k, \mathbf{x}(k))|. \quad (8)\end{aligned}$$

Учитывая неравенство (4), а также неравенства (6), (7), запишем соотношение (8) в следующем виде:

$$\Delta V_{(1)} \leqslant -a_3(a_2^{-1}(V(k, \mathbf{y}_2(k)))) + l|\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k))|. \quad (9)$$

Если положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво, то для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, а также для произвольного числа $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия $|\mathbf{x}_0| < \delta$ следует $|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ при всех $k \geqslant k_0$.

Дальнейшее доказательство по схеме работ [19, 20]. Положим $\delta_1(\varepsilon) = b(\varepsilon)/l$, $b(\varepsilon) = a_3(a_2^{-1}(a_1(\varepsilon)))$. Можно указать $\delta_2(\varepsilon) > 0$ такое, что при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ из $|\mathbf{y}_1(k)| < \delta_2$ следует $|\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k))| < \delta_1$ для $|\mathbf{y}_2(k)| < \varepsilon$. Вместе с тем, в силу равномерной $\mathbf{y}_1$-устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) имеем $|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| < \delta_2(\varepsilon)$ при всех $k \geqslant k_0$, если $|\mathbf{x}_0| < \delta$ и $\delta = \delta[\delta_2(\varepsilon)]$.

Поскольку при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ в области $|\mathbf{y}_2(k)| < \varepsilon$ при $|\mathbf{x}_0| < \delta$, где $\delta = \delta[\delta_2(\varepsilon)]$, выполнено условие $|\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0), \mathbf{y}_2(k))| < \delta_1$, то из неравенства (9) следует, что

$$\Delta V_{(1)} < 0 \text{ при } V(k, \mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)) = a_1(\varepsilon). \quad (10)$$

Пусть $\delta^*(\varepsilon) = \min\{\delta(\varepsilon), \delta[\delta_2(\varepsilon)], \delta_3(\varepsilon)\}$, $\delta_3(\varepsilon) = a_2^{-1}(a_1(\varepsilon))$. Рассмотрим произвольное решение $\mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1) с $k_0 \geqslant 0$, $|\mathbf{x}_0| < \delta$, где $\delta = \delta^*(\varepsilon)$. В силу условий (6) в данном случае имеем $V(k_0, \mathbf{y}_{20}) \leqslant a_2(\delta_3(\varepsilon))$ и, следовательно, $V(k_0, \mathbf{y}_{20}) \leqslant a_1(\varepsilon)$. Покажем, что

$$V(k, \mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)) < a_1(\varepsilon) \text{ для всех } k \geqslant k_0. \quad (11)$$

Предположим противное: пусть $V(k, \mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)) < a_1(\varepsilon)$ при $k \in [k_0, k_1)$, но $V(k, \mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)) = a_1(\varepsilon)$ при $k = k_1$. Тогда при $k = k_1$ имеет место неравенство $\Delta V_{(1)} \geqslant 0$, которое противоречит условию (10). Значит неравенство (11) справедливо для всех $k \geqslant k_0$ и на основании условия $V(k, \mathbf{y}_2) \geqslant a_1(|\mathbf{y}_2|)$ заключаем, что $|\mathbf{y}_2(k; k_0, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ для всех $k \geqslant k_0$, если $|\mathbf{x}_0| < \delta$ и $\delta = \delta^*(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1), 2) *теоремы* 1. *Тогда, если положение равновесия* $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ *системы* (1) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$-*устойчиво, то оно равномерно асимптотически* $\mathbf{y}$-*устойчиво.*

Доказательство. Равномерная $\mathbf{y}_2$-устойчивость положения равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) следует из теоремы 1: для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, а также для произвольного числа $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, найдется число $\delta^*(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия $|\mathbf{x}_0| < \delta$, где $\delta = \delta^*(\varepsilon)$, следует $|\mathbf{y}_2(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ при всех $k \geqslant k_0$.

Покажем, что положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) является также равномерно $\mathbf{y}_2$-притягивающим. Это значит, что при заданном $\delta^*(\varepsilon) > 0$ для любого $\eta \in (0,\ \delta^*)$ существует целое число $T(\eta) > 0$ такое, что из условия $k_0 \geqslant 0$, $|\mathbf{x}_0| < \delta$, где $\delta = \delta^*(\varepsilon)$, следует $|\mathbf{y}_2(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ при всех $k \geqslant k_0 + T(\eta)$.

В рассматриваемом случае предельное соотношение

$$|\mathbf{R}(k,\ \mathbf{y}_1(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0),\ \mathbf{y}_2(k),\ \mathbf{z}(k)| \to 0,\ k \to \infty \quad (12)$$

будет выполняться равномерно по $k_0 \geqslant 0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ $(\Delta < \delta^*)$, если $\Delta > 0$ определяет область равномерного $\mathbf{y}_1$-притяжения положения равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ системы (1).

Положим $\eta \in (0,\ \Delta)$; в этом случае $\eta < \delta^*(\varepsilon) < a_2^{-1}(a_1(\varepsilon)) < \varepsilon$. В силу условий (9), (12) при $a_2^{-1}(a_1(\eta)) \leqslant |\mathbf{y}_2| < \varepsilon$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ $(\Delta < \delta^*)$ найдется такое целое число $T_1(\eta) > 0$, что для всех $k \geqslant T_1(\eta)$ выполняется неравенство

$$\Delta V_{(1)} \leqslant -\frac{1}{2}b(\eta). \quad (13)$$

Следовательно, при $k \geqslant T_1(\eta)$ имеем

$$\Delta V_{(1)} < 0 \text{ при } V(k,\ \mathbf{y}_2(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)) = a_1(\eta). \quad (14)$$

Положим $k_{0*} = \max\,[k_0,\ T_1(\eta)]$ и пусть $T_2(\eta) > 0$ есть первое целое число, такое что

$$T_2(\eta) \geqslant \frac{2a_2(\eta) - a_1(\eta)}{b(\eta)}.$$

Покажем, что на "целочисленном" отрезке $[k_{0*},\ k_{0*} + T_2(\eta)]$ существует число k_*, для которого

$$V(k_*,\ \mathbf{y}_2(k_*;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)) < a_1(\eta). \quad (15)$$

Допустим противное: пусть $V(k,\ \mathbf{y}_2(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)) \geqslant a_1(\eta)$ для всех $k \in (k_{0*},\ k_{0*} + T_2(\eta))$. Тогда на этом интервале $|\mathbf{y}_2(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)| \geqslant a_2^{-1}(a_1(\eta))$ и справедливо соотношение (13), что приводит к противоречивым неравенствам

$$\begin{gathered} 0 < a_1(\eta) \leqslant V(k_{0*} + T_2(\eta),\ \mathbf{y}_2(k_{0*} + T_2(\eta);\ k_0,\ \mathbf{x}_0)) = \\ = V(k_{0*},\ \mathbf{y}_2(k_{0*};\ k_0,\ \mathbf{x}_0)) + \Delta V_{(1)}T_2(\eta) \leqslant \\ \leqslant a_1(\eta) - \frac{1}{2}b(\eta)T_2(\eta) = \frac{1}{2}a_1(\eta). \end{gathered}$$

Из условий (14), (15) заключаем, что неравенство $V(k,\ \mathbf{y}_2(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)) < a_1(\eta)$ имеет место для всех $k \geqslant k_*$. Действительно, допустим противное: пусть $V(k,\ \mathbf{y}_2(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)) < a_1(\eta)$ при $k \in [k_*,\ k^*)$, но $V(k^*,\ \mathbf{y}_2(k^*;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)) = a_1(\eta)$. Тогда $\Delta V_{(1)} \geqslant 0$ при $k = k^*$, что противоречит условию (15). Поэтому неравенство $|\mathbf{y}_2(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)| < \eta$ выполняется для всех $k \geqslant k_*$ на основании условия $V(k,\ \mathbf{y}_2) \geqslant a_1(|\mathbf{y}_2|)$. Следовательно, имеем $|\mathbf{y}_2(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)| < \eta$ для любого $k \geqslant k_0 + T(\eta)$, где $T = T_1(\eta) + T_2(\eta)$, если $|\mathbf{x}_0| < \delta$ $(\Delta < \delta^*)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Теоремы 1, 2 являются развитием соответствующих результатов работ [19, 20]. В отличие от работы [20], где указаны условия, при которых из устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия системы с непрерывной динамикой следует устойчивость по всем переменным, рассматривается дискретная система (1) и изучаются более общие задачи частичной детектируемости. Такие задачи рассмотрены ранее в работе [19] для нелинейных систем с непрерывной динамикой. Доказательства теорем 1, 2 используют схему доказательства работ [19, 20] с учетом специфики "дискретного" анализа исходной системы (1) и "приведенной" системы (3).

Замечание 2. При выполнении условия (4) динамика системы (1) в случае $\mathbf{y}_1(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0) \equiv \mathbf{0}$ (нуль-динамика по отношению к "измеримому выходу" $\mathbf{y}_1$, следуя терминологии работ [16, 17]) определяется подсистемой

$$\begin{aligned} &\mathbf{y}_2(k + 1) = \mathbf{Y}_2^0(k,\ \mathbf{y}_2(k)), \\ &\mathbf{z}(k + 1) = \mathbf{Z}(k,\ \mathbf{0},\ \mathbf{y}_2(k),\ \mathbf{z}(k)). \end{aligned} \quad (16)$$

Система (16) включает "приведенную" подсистему (3), которая определяет *частичную* нуль-динамику системы (1) по отношению к "измеримым" переменным $\mathbf{y}_1$: динамику $\mathbf{y}$-компоненты решений $\mathbf{x}(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)$, для которых $\mathbf{y}_1(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0) \equiv \mathbf{0}$.

При выполнении условий 1), 2) теоремы 1 система (1) обладает следующим свойством детектируемости: если $\mathbf{y}_1(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0) \equiv \mathbf{0}$, то для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что выполняется предельное соотношение $|\mathbf{y}(k;\ k_0,\ \mathbf{x}_0)| = 0,\ k \to \infty$ при $|\mathbf{x}_0| < \delta$ и всех $k \geqslant k_0$. Это свойство определяет локальную *частичную* детектируемость системы (1).

Замечание 3. Анализ задач частичной (по части переменных) устойчивости и стабилизации, в том числе для дискретных (конечно-разностных) систем, и обзор результатов можно найти в работах [21—30].

Имеются другие подходы [22, 31—35] к задаче частичной (по заданной части переменных) стабилизации, также основанные на предварительном анализе устойчивости по меньшей части заданных переменных.

Пример. Пусть система (1) состоит из уравнений

$$\begin{aligned} &y_1(k+1) = \frac{1}{2}y_1(k) + y_1^2(k) + y_2(k)z_1(k); \\ &y_2(k+1) = \left[\frac{1}{2} - y_1(k)\sin z_2(k)\right]y_2(k); \\ &z_1(k+1) = [1 + 2y_1(k)\sin z_2(k)]z_1(k); \\ &z_2(k+1) = \mathbf{e}^k y_1(k)z_2(k). \end{aligned} \qquad (17)$$

1. Покажем, что нулевое решение $y_1(k) = y_2(k) = z_1(k) = z_2(k) = 0$ системы (17) равномерно асимптотически y_1-устойчиво. Для этого рассмотрим две вспомогательные функции

$$V(\mathbf{x}) = y_1^2 + 2y_2^2z_1^2,\ \mu_1 = y_2z_1.$$

При каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ в области

$$|y_1| + |\mu_1| < h,\ |\mathbf{z}| < \infty \qquad (18)$$

приращение ΔV выбранной V-функции в силу системы (17) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \left[\frac{1}{2}y_1(k) + y_2(k)z_1(k)\right]^2 + \\ &+ 2y_2^2(k)z_1^2(k)\left[\frac{1}{2} - y_1(k)\sin z_2(k)\right]^2 \times \\ &\times [1 + 2y_1(k)\sin z_2(k)]^2 - y_1^2(k) - 2y_2^2(k)z_1^2(k) = \\ &= \frac{1}{4}y_1^2(k) + y_1(k)y_2(k)z_1(k) + y_2^2(k)z_1^2(k) + \\ &+ \frac{1}{2}y_2^2(k)z_1^2(k) - 4y_1^2(k)y_2^2(k)z_1^2(k)\sin^2 z_2(k) + \\ &+ 8y_1^4(k)y_2^2(k)z_1^2(k)\sin^4 z_2(k) - y_1^2(k) - \\ &- 2y_2^2(k)z_1^2(k) = -\frac{3}{4}y_1^2(k) + y_1(k)\mu_1(k) - \frac{1}{2}\mu_1^2(k) - \\ &- 4y_1^2(k)\mu_1^2(k)\sin^2 z_2(k) + 8y_1^4(k)\mu_1^2(k)\sin^2 z_2(k). \end{aligned}$$

Поэтому для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ в области (18) (но не в области (2)) имеет место оценка

$$\Delta V \leqslant \gamma_1(y_1^2(k) + \mu_1^2(k)),\ \gamma_1 = \text{const} > 0.$$

На основании результатов работы [13] нулевое положение равновесия системы (17) равномерно асимптотически y_1-устойчиво.

2. "Приведенная" подсистема (3) в данном случае имеет вид

$$y_2(k+1) = \frac{1}{2}y_2(k)$$

и ее нулевое положение равновесия $y_2(k) = 0$ равномерно асимптотически устойчиво. Кроме того, в данном случае выполнено неравенство (4), в котором $|Y_2^*| = |y_1(k)y_2(k)|$.

Поэтому на основании теоремы 2 заключаем, что нулевое положение равновесия системы (17) равномерно асимптотически (y_1, y_2)-устойчиво.

3. Приложение к задаче частичной стабилизации

Пусть система дискретных уравнений (1), в которой $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1^{\text{т}}, \mathbf{y}_2^{\text{т}}, \mathbf{z}^{\text{т}})^{\text{т}}$ описывает возмущенное движение объекта управления с учетом позиционных управлений $\mathbf{u}$, дискретно формируемых по принципу обратной связи в каналах управления.

Считаем, что переменные, входящие в векторы $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}$, измеряются и используются для формирования управлений $\mathbf{u}$ вида $\mathbf{u} = \mathbf{u}(k, \mathbf{y}_1(k), \mathbf{z}(k))$, $\mathbf{u}(k, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, а переменные, входящие в вектор $\mathbf{y}_2$, не измеряются. Пусть формируемые управления таковы, что замкнутая система (1) удовлетворяет общим требованиям, указанным в разделе 1, и нулевое положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ этой системы равномерно асимптотически $\mathbf{y}_1$-устойчиво.

Поскольку при $\mathbf{y}_1(k) = \mathbf{0}$, $\mathbf{z}(k) = \mathbf{0}$ управления нулевые, то динамика "приведенной" подсистемы (3) не зависит от формируемых управлений, а определяется только структурой и параметрами объекта. Считаем их выбранными так, что нулевое положение равновесия "приведенной" подсистемы (3) равномерно асимптотически устойчиво по всем переменным.

В результате при выбранной структуре и параметрах объекта достигнутая за счет выбора управлений равномерная асимптотическая $\mathbf{y}_1$-устойчивость нулевого положения равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) означает равномерную асимптотическую устойчивость по всем переменным.

Заключение

Указаны легко интерпретируемые условия частичной детектируемости нелинейной дискретной (конечно-разностной) системы, при выполнении которых устойчивость по части переменных нулевого положения равновесия означает его устойчивость по к другой — бóльшей части переменных. Введено понятие частичной нуль-динамики этой системы.

Дано приложение полученных результатов к задаче частичной стабилизации нелинейных управляемых дискретных систем.

Список литературы

1. **Halanay A., Wexler D.** Qualitative Theory of Impulsive Systems. Bucharest: Ed. Acad. RPR, 1968. 312 p.
2. **Фурасов В. Д.** Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. М.: Наука, 1982. 192 с.
3. **Agarwal R. P.** Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Appli-cations, 2 ed., N. Y.: Marcel Dekker, 2000. 971 p.
4. **Александров А. Ю., Жабко А. П.** Устойчивость движений дискретных динамических систем. СПб.: изд-во СПбГУ, 2007. 136 с.
5. **Haddad W. M., Chellaboina V.** Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach, Princeton: Princeton University Press, 2008. 976 p.
6. **Зуев А. Л., Игнатьев А. О., Ковалев А. М.** Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. Киев: Наукова Думка, 2013. 430 с.
7. **Болтянский В. Г.** Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973. 448 с.
8. **Джури Э. И.** Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 5. С. 3—28.
9. **Pachpatte B. G.** Partial stability of solutions of difference equations // Proc. Nat. Acad. Sci., India, 1973. Vol. A43. P. 235—238.
10. **Michel A. N., Molchanov A. P., Sun Y.** Partial Stability and Boundedness of General Dynamical Systems on Metric Spaces // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2003. Vol. 52, N. 4. P. 1295—1316.
11. **Абрамов С. А., Бронштейн М. Б.** Решение дифференциальных и разностных систем по отношению к части неизвестных // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 2. С. 229—241.
12. **Costa E. F., Astolfi A.** Partial Stability for a Class of Nonlinear Systems // SIAM J. Control Optim. 2009. Vol. 47, N. 6. P. 3203—3219.
13. **Ramírez-Llanos E., Martínez S.** Distributed and Robust Fair Optimization Applied to Virus Diffusion Control // IEEE Trans. Network Sci. Engineering. 2017. V. 4, N. 1. P. 41—54.
14. **Ramírez-Llanos E., Martínez S.** Distributed Discrete-Time Optimization Algorithms with Applications to Resource Allocation in Epidemics Control // Optimal Control Appl. Meth. 2018. V. 39, N. 1. P. 160—180.
15. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 6. С. 371—375.
16. **Byrnes C. I., Isidori A., Willems J. C.** Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. Vol. 36, N. 11. P. 1228—1240.
17. **Isidori A.** The Zero Dynamics of a Nonlinear System: From the Origin to the Latest Progresses of a Long Successful Story // European J. Control. 2013. Vol. 19, N. 5. P. 369—378.
18. **Ingalls B. P., Sontag E. D., Wang Y.** Measurement to Error Stability: a Notion of Partial Detectability for Nonlinear Systems // Proc. 41th IEEE Conf. on Decision and Control. Las Vegas, Nevada. 2002. P. 3946—3951.
19. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К задаче частичной детектируемости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 2009. № 1. С. 25—38.
20. **Halanay A.** Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags. N. Y.: Acad. Press, 1966. 528 p.
21. **Румянцев В. В., Озиранер А. С.** Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 256 с.
22. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998. 448 p.
23. **Воротников В. И.** Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 3—59.
24. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. Т. 51, Вып. 5. С. 23—31.
25. **Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.** Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
26. **Jammazi C.** Backstepping and Partial Asymptotic Stabilization // Intern. J. Control, Autom., Syst. 2008. Vol. 6, N. 6. P. 859—872.
27. **Efimov D. V., Fradkov A. L.** Input-to-Output Stabilization of Nonlinear Systems via Backstepping // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2009. Vol. 19, N. 6. P. 613—633.
28. **Binazadeh T., Yazdanpanah M. J.** Partial Stabilization of Uncertain Nonlinear Systems // ISA Trans. 2012. Vol. 51, N. 2. P. 298—303.
29. **L'Afflitto A., Haddad W. M., Bakolas E.** Partial-State Stabilization and Optimal Feedback Control // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2016. Vol. 26, N. 5. P. 1026—1050.
30. **Zuyev A. L.** Partial Stabilization and Control of Distributed Parameter Systems with Elastic Elements. Cham: Springer Int. Publ., 2015. 245 p.
31. **Воротников В. И.** Об управлении угловым движением твердого тела. Игровой подход // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, Вып. 3. С. 82—103.
32. **Воротников В. И.** О синтезе ограниченных управлений в игровой задаче переориентации асимметричного твердого тела // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 5. С. 630—634.
33. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К нелинейной задаче одноосной переориентации трехроторного гиростата при игровой модели помех // Автоматика и телемеханика. 2012. № 9. С. 35—48.
34. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К нелинейной задаче трехосной переориентации трехроторного гиростата при игровой модели помех // Космические исследования. 2013. Т. 51, Вып. 5. С. 412—418.
35. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К задаче переориентации трехроторного гиростата при неконтролируемых внешних помехах // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 6. С. 414—419.

On Problem of Partial Detectability for Nonlinear Discrete-Time Systems

V. I. Vorotnikov, vorotnikov-vi@rambler.ru,
Sochi institute of the RUDN, Sochi, 354340, Russian Federation,
Yu. G. Martyshenko, j-mart@mail.ru,
Russian state university of oil and gas, Moscow, 119991, Russian Federation

Corresponding author: **Vorotnikov Vladimir I.,** Doctor Sci. (Phys.&Math.), Professor, Sochi institute of the RUDN, Sochi, 354340, Russian Federation, Phone: (862) 241-12-70 (office); e-mail: vorotnikov-vi@rambler.ru

Accepted on December 02, 2019

Abstract

Discrete (finite-difference) systems are widely used in modern nonlinear control theory. One of the main problems of a qualitative study of such systems is the problem of stability of the zero equilibrium position, which has great generality. In most works, such a stability problem is analyzed with respect to all variables that determine the state of the system. However, for many cases important in applications, it becomes necessary to analyze a more general problem of partial stability: the stabil-

ity of the zero equilibrium position not for all, but only with respect to some given part of the variables. Such a problem is often also considered as auxiliary problem in the study of stability with respect to all variables. In this way, the corresponding concepts and problems of detectability of the studied system arise, which play an important role in the process of analysis of nonlinear controlled systems. Then, more general problems of partial detectability were posed, within the framework of which the situation was studied when stability from a part of variables implies stability not with respect to all, but with respect to more part of the variables. This article studies a nonlinear discrete (finite-difference) system of a general form that admits a zero equilibrium position. Easily interpreted conditions are found on the structural form of the system under consideration that determine its partial detectability, for which stability over a given part of the variables of the zero equilibrium position means its stability with respect to the other, more part of the variables. In this case, the stability with respect to the remaining part of the variables is uncertain and can be investigated additionally. In the process of analyzing this problem of partial detectability, the concept of partial null-dynamics of the system under study is introduced. An application of the obtained results to the stabilization problem with respect to part of the variables of nonlinear discrete controlled systems is given.

Keywords: *nonlinear discrete-time (difference) systems, partial stability, partial detec-tability, partial stabilization*

For citation:

Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G. On Problem of Partial Detectability for Nonlinear Discrete-Time Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 3, pp. 136—142.

DOI: 10.17587/mau.21.136-142

References

1. **Halanay A., Wexler D.** Qualitative Theory of Impulsive Systems. Bucharest, Ed. Acad. RPR, 1968, 312 p.
2. **Furasov V. D.** Stability and Stabilization of Discrete Processes, Moscow, Nauka, 1982, 192 p. (in Russian).
3. **Agarwal R. P.** Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications, 2 ed., N. Y., Marcel Dekker, 2000, 971 p.
4. **Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P.** (Stability of Motion of Discrete Dynamical Systems, Saint-Petersburg, Saint-Petersburg Univ. Press, 2007, 136 p. (in Russian).
5. **Haddad W. M., Chellaboina V.** Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach, Princeton, Princeton University Press, 2008, 976 p.
6. **Zuyev A. L., Ignatyev A. O., Kovalev A. M.** Stability and Stabilization of Nonlinear Systems, Kiev, Naukova dumka, 2013, 430 p. (in Russian).
7. **Boltyanskii V. G.** Optimal Control of Discrete Processes, Moscow, Nauka, 1973, 448 p. (in Russian).
8. **Juri E. I.** Robustness of discrete systems, *Automation and Remote Control,* 1990, vol. 51, no. 5, pp. 571—592.
9. **Pachpatte B. G.** Partial stability of solutions of difference equations, *Proc. Nat. Acad. Sci., India,* 1973, vol. A43, pp. 235—238.
10. **Michel A. N., Molchanov A. P., Sun Y.** Partial Stability and Boundedness of General Dynamical Systems on Metric Spaces, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2003, vol. 52, no. 4, pp. 1295—1316.
11. **Abramov S. A., Bronstein M.** Solving Linear Systems of Differential and Difference Equations with Respect to a Part of the Unknowns, *Comp. Math. Math. Phys.*, 2006, vol. 46, no. 2, pp. 218—230.
12. **Costa E. F., Astolfi A.** Partial Stability for a Class of Nonlinear Systems, *SIAM J. Control Optim.*, 2009, vol. 47, no. 6, pp. 3203—3219.
13. **Ramírez-Llanos, E., Martínez S.** Distributed and Robust Fair Optimization Applied to Virus Diffusion Control, *IEEE Trans. Network Sci. Engineering*, 2017, vol. 4, no. 1, pp. 41—54.
14. **Ramírez-Llanos E., Martínez S.** Distributed Discrete-Time Optimization Algorithms with Applications to Resource Allocation in Epidemics Control, *Optimal Control Appl. Meth.*, 2018, vol. 39, no. 1, pp. 160—180.
15. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** K zadache chastichnoy ustoychivosti ne-lineynykh diskretnykh sistem (To Problem of Partial Stability of Nonlinear Discrete-Time Systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie,* 2017. vol. 18, no. 6, pp. 371—375 (in Russian).
16. **Byrnes C. I., Isidori A., Willems J. C.** Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1991, vol. 36, no. 11, pp. 1228—1240.
17. **Isidori A.** The Zero Dynamics of a Nonlinear System: From the Origin to the Latest Progresses of a Long Successful Story, *European J. Control*, 2013, vol. 19, no. 5, pp. 369—378.
18. **Ingalls B. P., Sontag E. D., Wang Y.** Measurement to Error Stability: a Notion of Partial Detectability for Nonlinear Systems, *Proc. 41th IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada. 2002, pp. 3946—3951.
19. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** On Partial Detectability of the Nonlinear Dynamic Systems, *Automation and Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 1, pp. 20—32.
20. **Halanay A.** Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags, New York, Acad. Press, 1966, 528 p.
21. **Rumyantsev V. V., Oziraner A. S.** Stability and Stabilization of Motion with Respect to a Part of the Variables, Moscow, Nauka, 1987, 256 p. (in Russian).
22. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control, Boston, Birkhauser, 1998, 448 p.
23. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control**:** the State of the Art and Developing Prospects, *Automation and Remote Control,* 2005, vol. 66, no. 4, pp. 511—561.
24. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** On the partial stability of nonlinear dynamical systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.,* 2010, vol. 49, no. 5, pp. 702—709.
25. **Fradkov A. L., Miroshnik I. V., Nikiforov V. O.** Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1999, 528 p. (in Russian).
26. **Jammazi C.** Backstepping and Partial Asymptotic Stabilization, *Intern. J. Control*, *Autom.*, *Syst.*, 2008, vol. 6, no. 6, pp. 859—872.
27. **Efimov D. V., Fradkov A. L.** Input-to-Output Stabilization of Nonlinear Systems via Backstepping, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2009, vol. 19, no. 6, pp. 613—633.
28. **Binazadeh T., Yazdanpanah M. J.** Partial Stabilization of Uncertain Nonlinear Systems, *ISA Trans.*, 2012, vol. 51, no. 2, pp. 298—303.
29. **L'Afflitto A., Haddad W. M., Bakolas E.** Partial-State Stabilization and Optimal Feedback Control, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2016, vol. 26, no. 5, pp. 1026—1050.
30. **Zuyev A. L.** Partial Stabilization and Control of Distributed Parameter Systems with Elastic Elements, Cham, Springer Int. Publ., 2015, 245 p.
31. **Vorotnikov V. I.** The Control of the Angular Motion of a Solid with Interference. A Game-Theoretic Approach, *J. Appl. Math. Mech.*, 1994, vol. 58, no. 3, pp. 457—476.
32. **Vorotnikov V. I.** On Bounded Control Synthesis in a Game Theory Problem of Reorientation of an Asymmetric Solid, *Physics-Doklady*, 1995, vol. 40, no. 8, pp. 421—425 (in Russian).
33. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** On the Nonlinear Uniaxial Reorientation Problem for a Three-Rotor Gyrostat in the Game Noise Model, *Automation and Remote Control,* 2012, vol. 73, no. 9, pp. 1469—1480.
34. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** On the Nonlinear Problem of Three-Axis Reorientation of a Three-Rotor Gyrostat in the Game Noise Model, *Cosmic Research*, 2013, vol. 51, no. 5, pp. 372—378 (in Russian).
35. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** To Problem of Three-Rotor Gyrostat Reorientation under Uncontrolled External Disturbances, *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie,* 2016, vol. 17, no. 6, pp. 414—419 (in Russian).