УДК 681.5.03 DOI: 10.17587/mau.21.14-20

С. А. Гайворонский, канд. техн. наук, доц., saga@tpu.ru,
Т. А. Езангина, канд. техн. наук, науч. сотр., eza-tanya@yandex.ru,
И. В. Хожаев, аспирант, мл. науч. сотр., ivh1@tpu.ru,
Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Параметрический синтез робастного регулятора на основе метода доминирующих полюсов*

Рассматривается линейная система управления, представленная характеристическим полиномом с интервальными коэффициентами, в которые линейно входят параметры робастного регулятора. Решается задача их определения в целях сохранения в системе гарантируемой динамики в условиях интервальной неопределенности параметров объекта. При параметрическом синтезе регулятора предлагается использовать корневые показатели качества — минимальную степень устойчивости и максимальную степень колебательности. Для их обеспечения параметрический синтез регулятора проводится на основе метода доминирующих полюсов. Применение данного метода предусматривает задание пары комплексно-сопряженных доминирующих полюсов, определяющих желаемые значения степени робастной устойчивости и робастной колебательности системы, а также правой границы области локализации всех остальных (свободных) полюсов. Для применения метода доминирующих полюсов используется свойство степени устойчивости и степени колебательности линейной интервальной системы определяться теми ее полюсами, которые являются образами определенных вершин многогранника коэффициентов интервального характеристического полинома. Параметры регулятора предлагается разделить на зависимые и свободные. Первые должны обеспечить заданное расположение доминирующих полюсов в одной из вершин многогранника коэффициентов (в доминирующей вершине). Свободные параметры регулятора призваны обеспечить требуемое удаление свободных полюсов от доминирующих. Для определения координат доминирующей вершины и проверочных вершин для локализации свободных полюсов проведено интервальное расширение основного фазового уравнения теории корневого годографа. В результате получены двойные интервальные фазовые неравенства, решение которых позволяет определить координаты искомых вершин многогранника коэффициентов характеристического полинома. Знание доминирующего вершинного полинома и заданных доминирующих полюсов позволяет выразить зависимые параметры регулятора через свободные. Полученные выражения используются для локализации свободных полюсов интервальной системы в заданной области. Для этого в каждой из найденных проверочных вершин проводится D-разбиение по свободным параметрам регулятора. После выбора значений свободных параметров из общей для всех D-разбиений области рассчитываются зависимые параметры регулятора. Приводится числовой пример параметрического синтеза ПИД регулятора, гарантирующего корневые робастные показатели качества интервальной системы четвертого порядка.

Ключевые слова: *линейная интервальная система, доминирующие полюсы, свободные полюсы, проверочные вершины, параметры регулятора, D-разбиение*

Введение

Реальные системы автоматического управления имеют параметры, которые неточно заданы или изменяются в определенных пределах по заранее неизвестным законам. Полиномы их передаточных функций могут быть приведены к интервальному виду (полиномы с интервальными коэффициентами). Согласно работе [1] такие системы классифицируются как линейные интервальные динамические системы (ЛИДС). Известно, что динамические свойства ЛИДС определяются ее доминирующими полюсами, так как влияние остальных (свободных) полюсов оказывается незначительным из-за их удаленности от доминирующих [2].

Коэффициенты характеристического полинома ЛИДС имеют фиксированные пределы изменения, и поэтому полюсы ЛИДС локализуются в замкнутых областях. Желаемое расположение робастным регулятором доминирующих и свободных полюсов ЛИДС предполагает, что области их локализации не должны выходить за допустимые границы при любых значениях интервальных параметров.

Решение задачи размещения полюсов ЛИДС рассматривается в работах [3, 4]. Однако предлагаемые в этих работах методы синтеза регуляторов предусматривают, что все элементы вектора состояния доступны для измерения. В связи с этим желательно более простое с точки зрения реализуемости размещение полюсов ЛИДС регулятором пониженного порядка по выходу системы.

Для стационарных систем такая задача решена в работах [5, 6]. Особенностью подхода, пред-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-79-00264).

ложенного в работе [6], является возможность не только обеспечить требуемое расположение доминирующих полюсов, но и размещать свободные полюсы в желаемой области. Интервальное расширение такого подхода для ЛИДС проводится в работах [7, 8]. Оно позволяет расположить желаемым образом доминирующие полюсы ЛИДС, но не гарантирует, что области локализации свободных полюсов не выйдут за заданную границу и тем самым не нарушится принцип доминирования. Поэтому представляет интерес параметрический синтез линейного регулятора по выходу, который обеспечивал бы желаемое расположение областей локализации доминирующих и свободных полюсов ЛИДС.

Постановка задачи

Пусть интервальный характеристический полином (ИХП) ЛИДС имеет вид

$$D(s,k)=\sum_{i=0}^{n}[d_i(k)]s^i, \qquad (1)$$

где $[d_i(k)]$ — интервальные коэффициенты ($\underline{d_i(k)} \leqslant d_i(k) \leqslant \overline{d_i(k)}$), образующие многогранник с 2^{n+1} вершинами; k — вектор параметров регулятора, линейно входящих в коэффициенты ИХП (1). Так как доминирующие полюсы определяют минимальную степень устойчивости и максимальную колебательность ЛИДС, то области их локализации могут быть ограничены усеченным сектором G, как показано на рис. 1. На этом же рисунке указана и граница области Г расположения свободных полюсов ЛИДС.

Задачей параметрического синтеза линейного регулятора является нахождение таких

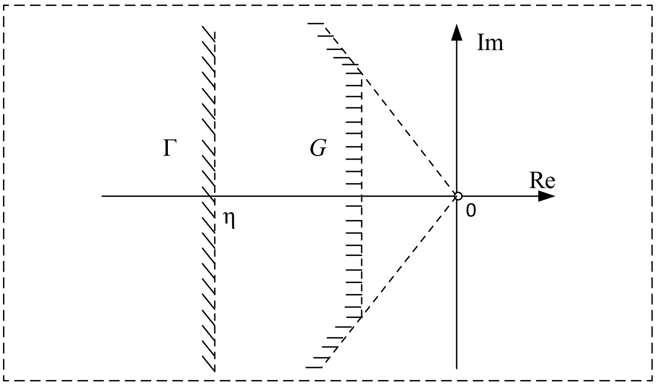

Рис. 1. Области локализации доминирующих и свободных полюсов

Рис. 1. Areas of dominant and unrestricted poles allocation

значений его параметров k_l, $l = 1, 2, ..., r$, которые при возможных вариациях коэффициентов ИХП (1) гарантировали бы расположение доминирующих полюсов ЛИДС в усеченном секторе G одновременно с локализацией свободных полюсов в заданной области Г (рис. 1).

Интервальные углы выхода реберных ветвей из доминирующего полюса

Отображение ребер многогранника коэффициентов ИХП на корневую плоскость образует многопараметрический интервальный корневой годограф (МИКГ). Исходя из угловых свойств корневого годографа [9] угол выхода реберной ветви МИКГ из комплексного полюса P_1 можно найти по формуле

$$\Theta_1^i=\pi r_i-\sum_{p=2}^{n}\Theta_p+i\Theta_0,\ i=\overline{0,n}, \qquad (2)$$

где Θ_p и Θ_0 — углы между вещественной осью и векторами, направленными из комплексного полюса P_1 соответственно к p-му полюсу и к i-м нулям с координатами (0; j0), $r_i = 1$ при значении коэффициента $d_i > \underline{d_i}$, $r_i = 0$ при значении $d_i < \overline{d_i}$.

По условиям задачи задана пара комплексно-сопряженных доминирующих полюсов P_1 и P_2, определяющих одновременно минимальную степень устойчивости ЛИДС и ее максимальную колебательность. Очевидно, что расположение доминирующих полюсов в заданных точках позволяет определить значение угла Θ_0 в выражении (2). Относительно углов полюсов Θ_p заметим, что один угол, образованный сопряженным с P_1 полюсом P_2, равен 90°, а остальные углы от свободных полюсов являются интервальными и зависят от их возможного расположения в области Г. На этом основании к соотношению (2) применим интервальное расширение:

$$[\Theta_1^i]=\pi r_i-\sum_{p=2}^{n}[\Theta_p]+i[\Theta_0],\ i=\overline{0,n}. \qquad (3)$$

В выражении (3) интервал $[\Theta_1^i]$ зависит от суммы углов свободных полюсов. Определим их сумму для двух характерных случаев, когда левее границы области Г лежит пара свободных полюсов P_3 и P_4 (рис. 2, *а*, см. вторую сторону обложки) или один вещественный свободный полюс P_3 (рис. 2, *б*, см. вторую сторону обложки).

Допуская возможность произвольного расположения свободных полюсов на рис. 2, *а* и 2, *б*, можно сделать следующие заключения.

1. Если пара комплексно-сопряженных полюсов P_3 и P_4 мигрирует в области, расположенной левее границы Г (рис. 2, *а*), то сумма углов $[\Theta_3]$ и $[\Theta_4]$, образованных полюсами P_3 и P_4 относительно полюса P_1, принадлежит интервалу $[0°; 2\alpha]$, где $\alpha = \angle P_1\eta 0$.

2. Если вещественный полюс P_3 мигрирует в отрезке, расположенном левее границы Г (рис. 2, *б*), то угол $[\Theta_3]$, образованный полюсом P_3 относительно полюса P_1, принадлежит интервалу $[0°; \alpha]$, где $\alpha = \angle P_1\eta 0$.

На основании этих заключений можно сделать вывод: сумма углов для произвольного числа m свободных полюсов ЛИДС лежит в интервале $[0°; \alpha m]$. Таким образом, выражение (3) может быть записано в виде

$$[\Theta_1^i] = \pi r_i - [0°; \alpha m] - 90° + i\Theta_0, \quad i = \overline{0, n}. \qquad (4)$$

Определение доминирующей вершины на основе двойных интервальных угловых неравенств

Для того чтобы полюс P_1 в доминирующей вершине V определял степень устойчивости ЛИДС, следует наложить ограничения на углы выхода $[\Theta_1^i]$ реберных ветвей МИКГ из P_1. С учетом (4) запишем:

$$90° \leqslant \pi r_i - [0°; \alpha m] - 90° + i\Theta_0 \leqslant 270°, \quad i = \overline{0, n}. \qquad (5)$$

Если же необходимо, чтобы P_1 определял степень колебательности ЛИДС, то

$$\Theta_0 \leqslant \pi r_i - [0°; \alpha m] - 90° + i\Theta_0 \leqslant \Theta_0 + 180°, \quad i = \overline{0, n}. \qquad (6)$$

Очевидно, что условием определения полюсом P_1 одновременно степени устойчивости и степени колебательности ЛИДС является составленное на основе (5) и (6) двойное неравенство

$$\Theta_0 \leqslant \pi r_i - [0°; \alpha m] - 90° + i\Theta_0 \leqslant 270°, \quad i = \overline{0, n}. \qquad (7)$$

Для выполнения неравенства (7) при изменении любого из коэффициентов d_i из доминирующей вершины V необходимо в (7) для коэффициента r_i выбрать значение 0 или 1: $r_i = 0$ не меняет угол выхода ветви МИКГ по ребру d_i, а при $r_i = 1$ угол изменяется на 180°. Для выбора r_i преобразуем (7) к более удобному виду:

Таблица 1
Table 1

Координаты доминирующих вершин

Coordinates of dominant vertices

Θ_0	α	m	Координаты доминирующей вершины
120	8,8	1	$\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}$
		2	$\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \underline{d_4}$
135	5,6	1	$\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}$
			$\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \underline{d_3}$
		2	$\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \underline{d_4}$
			$\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \underline{d_3}, \underline{d_4}$
150	3,2	1	$\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \underline{d_3}$
		2	$\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \underline{d_3}, \underline{d_4}$

$$\Theta_0(1 - i) + 90° \leqslant [-\alpha m; 0°] \pm \pi r_i \leqslant 360° - \Theta_0 i, \quad i = \overline{0, n}. \qquad (8)$$

Решениями (8) для всех i является набор значений r_i, задающих пределы d_i и, следовательно, координаты доминирующей вершины V многогранника коэффициентов ИХП. Определим такую вершину для различных вариантов расположения доминирующих полюсов ЛИДС третьей и четвертой степеней. Согласно условию (8) исходной информацией для этого являются углы Θ_0 и α, а также число m свободных полюсов. Заметим, что α определяется углом Θ_0 и степенью ρ доминирования. Данная степень находится как отношение расстояния от заданной пары доминирующих полюсов до границы области Г к расстоянию от доминирующих полюсов до мнимой оси. Результаты расчетов сведены в табл. 1.

Из табл. 1 следует, что в координатах доминирующей вершины предел коэффициента d_3 ИХП при переходе от $\Theta_0 = 120°$ к $\Theta_0 = 135°$ изменяется с максимального на минимальный. Однако при $\Theta_0 = 135°$ он может быть как $\overline{d_3}$, так и $\underline{d_3}$, т. е. следует рассматривать две возможные доминирующие вершины.

Определение граничных вершин для локализации свободных полюсов

Так как степень устойчивости ЛИДС определяется корнями ИХП в вершинах многогранника его коэффициентов, то можно заключить, что правая вертикальная граница области локализации свободного полюса проходит через образ одной из вершин многогранника. Учитывая это, выберем вершины, образы которых лежат на границе области Г и все выходящие из них реберные ветви МИКГ направлены внутрь этой области. Назовем такие вершины граничными.

Очевидно, что если граничные вершины лежат в области Г, то это гарантирует локализацию в ней всех свободных полюсов ЛИДС. Решим задачу выбора граничных вершин также с использованием угловых неравенств. Для этого рассмотрим рис. 3, *а* и 3, *б* (см. вторую сторону обложки), где вместе с заданными доминирующими полюсами показано возможное расположение свободных полюсов ЛИДС.

На рис. 3, *а* граничным свободным полюсом является вещественный полюс P_3, левее которого могут располагаться другие комплексно-сопряженные и вещественные свободные полюса ЛИДС. Сумма углов, определяемых относительно P_3 свободными и доминирующими полюсами, равна нулю. Поэтому выражение для углов выхода из P_3 реберных ветвей МИКГ имеет вид

$$\Theta_3^i = \Theta_0 i = 180° i,\ i = \overline{0, n}. \qquad (9)$$

Для того чтобы все реберные ветви МИКГ выходили из P_3 строго влево по вещественной оси, все углы (9) должны быть равны 180°. Запишем это условие в виде уравнений:

$$180° i \pm \pi r_i = 180°, \qquad (10)$$

решением которых является набор значений r_i и соответствующие ему координаты одной из граничных вершин многогранника интервальных коэффициентов.

Рассмотрим далее второй случай (рис. 3, *б*), когда на границу области Г попадает пара комплексно-сопряженных свободных полюсов P_3 и P_4. Пусть эти полюсы могут принимать произвольные значения на вертикальной прямой. Тогда сумма углов всех других полюсов относительно полюса P_3 определяется выражением

$$\sum_{p=2}^{n} [\Theta_p] = 90° + [180°, 360°] + [0°, 90°](m-2), \qquad (11)$$

где 90° — угол от полюса P_4; [180°, 360°] — интервал суммы углов от пары комплексно-сопряженных доминирующих полюсов; m — число свободных полюсов ЛИДС ($m \geqslant 2$). Если допустить, что комплексные свободные полюсы P_3 и P_4 могут принимать любые значения на вертикальной границе области Г, то сумма углов, определяемых относительно P_3 i нулями (0, j0) реберных передаточных функций, определяется интервальным выражением

$$[\Theta_0] i = [90°, 180°] i, \quad i = \overline{0, n}.$$

С учетом этого и в результате замены в выражении (11) интервала [180°, 360°] на 2·[90°, 180°] получим выражения углов выхода реберных ветвей МИКГ из P_3 в виде

$$[\Theta_3^i] = [90°, 180°] i - 90° - [180°, 360°] - [0°, 90°](m-2), \quad i = \overline{0, n}. \qquad (12)$$

Чтобы определить координаты граничных вершин для локализации свободных полюсов ЛИДС, зададим в соотношении (12) для интервала $[\Theta_3^i]$ нижний и верхний пределы (соответственно 90° и 270°). После преобразований получим систему двойных интервальных угловых неравенств:

$$180° \leqslant [90°, 180°](i-2) - [0°, 90°](m-2) \leqslant 360°, \quad i = \overline{0, n}. \qquad (13)$$

На основе решений (10) и (13) получены и приведены в табл. 2 координаты граничных вершин для локализации в области Г свободных полюсов ЛИДС третьего и четвертого порядков.

Таблица 2
Table 2

Координаты граничных вершин

Coordinates of boundary vertices

n	m	Координаты граничных вершин
3	1	$\underline{d_0}, \overline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3}$
4	2	$\underline{d_0}, \overline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3}, \underline{d_4}$
		$\underline{d_0}, \overline{d_1}, \underline{d_2}, \underline{d_3}, \overline{d_4}$
		$\underline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \underline{d_3}, \overline{d_4}$

Основные соотношения для параметрического синтеза линейного регулятора

Зададим передаточную функцию интервального объекта управления ЛИДС в виде $W_{ОУ}(s) = \dfrac{A(s)}{B(s)}$, где $A(s) = \sum_{i=0}^{m} a_i s^i$, $B(s) = \sum_{j=0}^{n} b_j s^j$,

$\underline{a_i} \leqslant a_i \leqslant \overline{a_i}$, $\underline{b_j} \leqslant b_j \leqslant \overline{b_j}$, $n \geqslant m$. Для обеспечения в ЛИДС гарантируемой динамики, определяемой парой доминирующих полюсов, используем ПИД регулятор с передаточной функцией

$$W_{\text{РЕГ}}(s) = \frac{k_0 + k_1 s + k_2 s^2}{s},$$

где k_0, k_1 и k_2 — настраиваемые параметры. Разделим их на зависимые параметры k_1, k_2 и свободный параметр k_0. Зададим пару доминирующих полюсов $s_1 = -\alpha + j\beta$, $s_2 = -\alpha - j\beta$ и на основе решения интервальных фазовых неравенств (8) определим доминирующую вершину V многогранника интервальных коэффициентов ЛИДС. По соответствующим этой вершине пределам коэффициентов ИХП сформируем вершинный полином

$$D^V(s, k) = d_n^V(k)s^n + d_{n-1}^V(k)s^{n-1} + \ldots + d_0^V(k). \quad (14)$$

Подставив в (14) значение корня s_1 и выделив в уравнении вещественную и мнимую части, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re} D^V(\alpha, \beta, k_0, k_1, k_2) = 0; \\ \operatorname{Im} D^V(\alpha, \beta, k_0, k_1, k_2) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Из уравнений системы (15) найдем зависимости $k_1 = f_1(\alpha, \beta, k_0, k_2)$; $k_1 = f_2(\alpha, \beta, k_0, k_2)$, на основании которых выразим зависимые параметры k_1, k_2 регулятора через свободный параметр k_0. Подставив $k_1(k_0)$, $k_2(k_0)$ в (1), получим ИХП с одним параметром k_0:

$$D(s, k_1) = [d_n(k_0)]s^n + [d_{n-1}(k_0)]s^{n-1} + \ldots + [d_0(k_0)].$$

Далее, используя выражения (10) и (13), определим набор граничных вершин для локализации свободных полюсов ЛИДС и в них проведем D-разбиение по параметру k_0. После выбора свободного параметра k_0 из области пересечения отрезков устойчивости всех вершинных D-разбиений рассчитываются значения зависимых параметров k_1 и k_2 ПИД регулятора по полученным выше выражениям.

Методика размещения полюсов интервальной системы

В результате проведенных исследований разработана методика размещения полюсов ЛИДС. Она содержит следующие этапы:

1. Выбирается линейный регулятор с тремя или четырьмя настраиваемыми параметрами, которые разделяются на два зависимых (для двух доминирующих полюсов) и свободные (не больше двух параметров, необходимых для D-разбиения).
2. Записывается ИХП ЛИДС в виде (1).
3. Задаются координаты доминирующих полюсов ЛИДС, определяющие желаемую границу области G, а также граница области Г.
4. Составляются интервальные неравенства (8), и на основании их решения формируется доминирующий вершинный полином (14).
5. В полином (14) подставляются координаты доминирующего полюса и находятся выражения зависимых параметров регулятора через свободные.
6. С использованием полученных в п. 5 зависимостей ИХП (1) приводится к виду, содержащему только свободные параметры регулятора.
7. На основании решений (10) и (13) формируются граничные вершинные полиномы для локализации свободных полюсов ЛИДС в области Г.
8. Для всех полученных в п. 7 полиномов проводится D-разбиение по свободным параметрам регулятора. Их значения выбираются из области пересечения областей устойчивости всех D-разбиений.
9. По полученным в п. 5 выражениям при выбранных значениях свободных параметров вычисляются два зависимых параметра регулятора.

Пример

Пусть объект управления ЛИДС задан интервальной передаточной функцией:

$$W_0(p) = \frac{100}{[1; 1{,}5]s^3 + [40; 80]s^2 + [150; 200]s + [1024; 1200]}.$$

Тогда ИХП системы с ПИД регулятором $W_{\text{РЕГ}}(s) = \dfrac{k_0 + k_1 s + k_2 s^2}{s}$ и единичной обратной связью имеет вид

$$D(s, k_0, k_1, k_2) = [1; 1{,}5]s^4 + [40; 80]s^3 + ([150; 200] + 100k_2)s^2 + ([1024; 1200] + 100k_1)s + 100k_0.$$

Желаемая степень робастной устойчивости и степень робастной колебательности ЛИДС задана ее доминирующими полюсами в точках $s_1 = -1 + j2$ и $s_2 = -1 - j2$. Задана также граница свободных полюсов ЛИДС $X(j\beta) = -9 + j\beta$, $-\infty < \beta < \infty$.

Параметры регулятора разделены на свободный k_0 и зависимые k_1 и k_2. В результате решения интервального неравенства (8) определены координаты доминирующей вершины $V(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \underline{d_4})$ и соответствующий ей доминирующий вершинный полином

$$\begin{gathered} D^V(s, k_0, k_1, k_2) = s^4 + 80s^3 + \\ + (200 + 100k_2)s^2 + (1024 + 100k_1)s + 100k_0. \end{gathered} \tag{16}$$

После подстановки $s_1 = -1 + j2$ в (16) получена система уравнений вида (15), из которой определены зависимости $k_1(k_0) = 0{,}4k_0 - 634$ и $k_2(k_0) = 0{,}2k_0 - 39$. На основании этих зависимостей сформирован ИХП, содержащий только свободный параметр k_0 регулятора:

$$\begin{gathered} D(s, k_0) = [1; 1{,}5]s^4 + [40; 80]s^3 + \\ + ([150; 200] + 100k_2(k_0))s^2 + \\ + ([1024; 1200] + 100k_1(k_0))s + 100k_0. \end{gathered} \tag{17}$$

Для локализации свободных полюсов ЛИДС левее вертикальной прямой, проходящей через точку $(-9;\ j0)$, на основании ИХП (17) сформированы три вершинных полинома для трех граничных вершин из табл. 1:

$$\begin{gathered} D_1(s, k_0) = s^4 + 80s^3 + (150 + 100k_2(k_0))s^2 + \\ + (1200 + 100k_1(k_0))s + 100k_0; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} D_1(s, k_0) = 1{,}5s^4 + 40s^3 + (150 + 100k_2(k_0))s^2 + \\ + (1200 + 100k_1(k_0))s + 100k_0; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} D_1(s, k_0) = 1{,}5s^4 + 40s^3 + (200 + 100k_2(k_0))s^2 + \\ + (1200 + 100k_1(k_0))s + 100k_0. \end{gathered}$$

Для каждого из этих полиномов определена своя область D-разбиения параметра k_0 и затем найдена общая область $k_0 \geqslant 35{,}25$. Значение свободного параметра k_0 выбрано на левой границе этой области. После подстановки $k_0 = 35{,}25$ в выражения зависимых параметров регулятора получены следующие их значения: $k_1 = 7{,}76$, $k_2 = 6{,}66$. При найденных значениях параметров ПИД регулятора построен и показан на рис. 4 (см. вторую сторону обложки) МИКГ рассматриваемой ЛИДС.

Из рис. 4 видно, что расположение доминирующих и свободных полюсов системы гарантирует в ЛИДС заданные корневые показатели.

Заключение

В результате проведенных исследований разработана методика желаемого размещения областей локализации доминирующих и свободных полюсов ЛИДС в условиях интервальности коэффициентов ее характеристического полинома. Границы областей полюсов определяют в ЛИДС минимально допустимую степень устойчивости и максимально допустимую колебательность. Основой методики является нахождение у многогранника коэффициентов полинома доминирующей и граничных вершин, образы которых определяют границы областей локализации соответственно доминирующих и свободных полюсов. Для выбора этих вершин проведено интервальное расширение основного фазового уравнения теории корневого годографа. В результате получены условия для углов выхода реберных ветвей МИКГ из образов указанных вершин в виде интервальных фазовых неравенств. Их решениями являются координаты вершин и соответствующие им вершинные полиномы ЛИДС. На основе этих полиномов и метода D-разбиения проведен параметрический синтез линейного регулятора, обеспечивающего в ЛИДС гарантируемую динамику.

Список литературы

1. **Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г.** Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Техническая кибернетика. 1991. № 1. С. 3—30.
2. **Райцын Т. М.** Синтез систем автоматического управления методом направленных графов. Л.: Энергия, 1970. 96 с.
3. **Хлебалин Н. А.** Синтез интервальных регуляторов в задаче модального управления // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. Саратов: Саратовский политех. ин-т. 1988. С. 26—30.
4. **Захаров А. В., Шокин Ю. И.** Синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математических моделей // ДАН СССР. 1988. Т. 299, № 2. С. 292—295.
5. **Скворцов Л. М.** Интерполяционный метод решения задачи назначения доминирующих полюсов при синтезе одномерных регуляторов // Изв. РАН. ТиСУ. 1996. № 4. С. 10—13.
6. **Вадутов О. С., Гайворонский С. А.** Решение задачи размещения полюсов системы методом D-разбиения // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 5. С. 23—27.
7. **Замятин С. В., Гайворонский С. А.** Решение задачи размещения полюсов линейной интервальной динамиче-

ской системы в заданном секторе // Известия Томского политехнического университета. 2006. Т. 309, № 5. С. 16—20.

8. **Замятин С. В.** Размещение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы с обеспечением заданных показателей качества // Известия Томского политехнического университета. 2006. Т. 309, № 7. С. 10—12.

9. **Удерман Э. Г.** Метод корневого годографа в теории автоматических систем. М.: Наука, 1972. 448 с.

Parametric Synthesis of a Robust Controller Based on the Method of Dominant Poles

S. A. Gayvoronskiy, saga@tpu.ru, **T. A. Ezangina**, eza-tanya@yandex.ru, **I. V. Khozhaev**, ivh1@tpu.ru,
National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, 634050, Russian Federation

Corresponding author: **Ezangina Tatiana Al.**, Ph. D., Researcher, National Research Tomsk Polytechnic University, 634050, Tomsk, Russian Federation, e-mail: eza-tanya@yandex.ru

Accepted on June 21, 2019

Abstract

In the paper a linear control system described by its characteristic polynomial with interval coefficients including parameters of controller linearly is considered. Problem of the research is finding parameters of a controller guaranteeing dynamic characteristics of a system despite interval parametric uncertainty of its object. It is proposed to base a controller synthesis on root quality indices: minimal stability degree and maximal oscillability degree. Desired values of these indices will be provided with the help of dominant poles method. Applying this method consists in placing a pair of complex-conjugate dominant poles; all other poles — unrestricted poles — will be placed by defining a right border of their allocation area on a complex plane. To apply dominant poles method, a feature of stability degree and oscillability degree to be determined by images of certain vertices of a parametric polytope was used. To synthesize a controller, it is proposed to divide its parameters in two groups: dependent ones and unrestricted ones. The first group of controller parameters is to provide desired allocation of dominant poles in one of vertices of parametric polytope (a dominant vertex). Unrestricted parameters of a controller are to provide desired distance between dominant poles and allocation area of unrestricted poles. To find coordinates of a dominant vertex and verifying vertices providing unrestricted poles allocation, an interval extension of basic phase equation of a root locus theory was developed. This resulted in interval phase inequalities, whose solution allows finding coordinates of desired vertices of characteristic polynomials coefficients polytope. Knowing a dominant vertex polynomial and dominant poles allows expressing dependent parameters of a controller from unrestricted ones. Obtained expressions allow placing unrestricted poles in a desired area of a complex plane. To do this, a D-partition by unrestricted parameters of a controller is performed in all verifying vertices of parametric polytope of a system. After choosing values of unrestricted parameters from intersection of all stability domains obtain during D-partition, dependent parameters of a controller can be calculated. An example of synthesizing a PID-controller guaranteeing desired values of dynamics characteristics for an interval control system of the fourth order is provided.

Keywords: *linear interval dynamic system, dominant poles, unrestricted poles, dominant vertex, controller synthesis, D-partition inequalitites*

Acknowledgements: This article was prepared with the financial support of Russian Foundation for Basic Research (project 18-58-00045 Bel_a).

For citation:

Gayvoronskiy S. A., Ezangina T. A., Khozhaev I. V. Parametric Synthesis of a Robust Controller Based on the Method of Dominant Poles, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2020, vol. 21, no. 1, pp. 14—20.

DOI: 10.17587/mau.21.14-20

References

1. **Gusev Yu. M., Efanov V. N., Krymskij V. G.** Analysis and synthesis of linear interval dynamic systems (problem condition). Analysis with the help of interval characteristic polynomials, *Tekhnicheskaya Kibernetika,* 1991, no. 1, pp. 3—30 (in Russian).

2. **Rajcyn T. M.** Control system synthesis on a base of directed graph method grafov, Leningrad, Energiya, 1970, 96 p. (in Russian).

3. **Xlebalin N. A.** Synthesis of control systems considering interval uncertainty of their mathematical models parameters, *Analiticheskie metody' sinteza regulyatorov*, Mezhvuz. nauchn. sb. Saratov, Saratovskij politex. in-t, 1988, pp. 26—30 (in Russian).

4. **Zaxarov A. V., Shokin Yu. I.** Synthesis of interval controllers as a problem of modal control**,** *DAN SSSR***,** 1988, vol. 299, no. 2, pp. 292—295 (in Russian).

5. **Skvorczov L. M.** Synthesizing SISO-controllers by placing dominant poles with the help of interpolation method, *Izv. RAN. TiSU*, 1996, no. 4, pp. 10—13 (in Russian).

6. **Vadutov O. S., Gayvoronskiy S. A.** Placing poles of a control system with the help of *D*-partition method, *Journal of Computer and Systems Sciences International***,** *Izv. RAN. TiSU*, 2004, no. 5, pp. 23—27 (in Russian).

7. **Zamyatin S. V., Gayvoronskiy S. A.** Placing poles of linear interval dynamic system in a desired sector, *Izvestiya Tomskogo politexnicheskogo universiteta*, 2006, vol. 309, no. 5, pp. 16—20 (in Russian).

8. **Zamyatin S. V.** Providing desired control quality by placing allocation areas of dominant poles of interval control system, *Izvestiya Tomskogo politexnicheskogo universiteta*, 2006, vol. 309, no. 7, pp. 10—12 (in Russian).

9. **Uderman E. G.** Root locus method in control theory, Moscow, Nauka, 1972. 448 p. (in Russian).