

Н. Н. Карабутов, д-р техн. наук, проф., kn22@yandex.ru,
МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва

Применение структур для оценки характеристических показателей Ляпунова систем с периодическими коэффициентами

Рассмотрена задача идентификации характеристических показателей Ляпунова динамических систем с периодическими коэффициентами в условиях неопределенности. Идентификация характеристических показателей Ляпунова выполнена на основе анализа специального класса структур, описывающих динамику их изменения. Описан метод получения структур. Введено понятие адекватности полученных оценок характеристических показателей Ляпунова. Критерий адекватности основан на анализе области определения структур. Получено решение задачи определения области, которой принадлежит множество оценок характеристических показателей Ляпунова. Предложен метод оценки порядка системы. Он основан на анализе свойств почти периодических функций по Бору и предложенных структур. Рассмотрен случай, когда линеалы, соответствующие характеристическим показателям Ляпунова, могут пересекаться. Это приводит к бесконечному спектру характеристических показателей Ляпунова. Определена верхняя оценка для наименьшего показателя и граница подвижности для старшего показателя, и получено множество показателей системы. Предложен графический критерий, основанный на анализе свойств специального класса структур, для оценки адекватности оценок характеристических показателей Ляпунова. Для проверки множества полученных оценок применен метод гистограмм. Дано расширение почти периодических функций по Бору для решения рассматриваемой задачи. Получена оценка порядка системы на основе анализа структуры.

Ключевые слова: структура, динамическая система с периодическими коэффициентами, характеристический показатель Ляпунова, почти периодические функции по Бору

Введение

Характеристические показатели Ляпунова (ХПЛ) широко применяются для анализа качественного поведения динамических систем. Они позволяют оценить поведение траекторий различных объектов в физике [1], медицине [2], экономике [3], астрономии [4]. ХПЛ чаще всего определяют на основе анализа временных рядов. Предполагается, что известна априорная информация о структуре системы. В работе [5] представлен обзор вычисления наибольшего ХПЛ для различных классов систем. Алгоритм оценки ХПЛ для неизвестной динамической системы предложен в работе [6]. Он позволяет вычислить все ХПЛ и основан на применении сетей с многомерным упреждением. Базисом сети является множество монотонных сигмоидальных функций. Решение задачи сведено к подбору параметров функций, аппроксимирующих временной ряд по квадратичному критерию.

Для вычисления наибольшего ХПЛ нестационарных систем по экспериментальным данным используются различные алгоритмы.

Большинство из них основано на теореме Такенса [7]. Ф. Такенс показал, что фазовый портрет (аттрактор) системы можно реконструировать на основе одного временного ряда (экспериментальных данных). Следовательно, теорема может служить основой для вычисления различных показателей динамической системы. Для определения наибольшего ХПЛ широко применяются методы Вольфа [8], Розенштейна и Бенеттина [9] и их модификации. Многие авторы обобщают и развивают эти методы. Так, в работе [10] предложены алгоритмы вычисления наибольшего характеристического показателя Ляпунова на основе логарифмирования и интерполяции членов временного ряда, а также на основе выделения логарифма. Показано, что наилучшие результаты для стационарных систем дает применение метода Розенштейна и интерполяции. Применение интерполяции обеспечивает наилучшие результаты для нестационарных систем. Также предложена модель, имеющая форму произведения экспоненты и синусоиды с фазовым сдвигом, для компенсации нестационарной составляющей во вре-

менном ряде данных. Такой подход позволяет исключить нестационарную составляющую из временного ряда. Эта процедура не применима для идентификации ХПЛ нестационарной системы, так как она убирает слой ценной информации. Заметим, что реализация метода Розенштейна представляет собой трудоемкую процедуру, связанную с выбором и уточнением ряда параметров системы.

Существуют два основных метода оценки ляпуновских показателей по временному ряду [11]. Применение этих методов основано на анализе аттрактора, предварительно восстановленного в фазовом пространстве некоторой размерности методом Такенса. Первый метод [8] определяет две близкие траектории в восстановленном фазовом пространстве и отслеживает их поведение на некотором временном интервале (алгоритм Бенеттина). Идентификация спектра ляпуновских показателей происходит аналогично оценке по исходной системе уравнений вместе с уравнениями в вариациях. Достоинством этого метода является относительная простота, а недостатком — трудность идентификации всего спектра ляпуновских показателей, так как определяющую роль при рассмотрении двух близких траекторий играет старший ляпуновский показатель. Второй метод [12, 13] основан на использовании якобиана, так как ХПЛ можно определить как собственные числа матрицы Якоби для системы, которая сгенерировала рассматриваемую реализацию. Достоинством этого метода является возможность оценки спектра неотрицательных ляпуновских показателей по достаточно короткой реализации, а недостатком является высокая чувствительность к шумам и ошибкам, для уменьшения которой применяются различные приемы и алгоритмы.

Применение теоремы Такенса зависит от свойств имеющегося временного ряда [14]. Естественно, это влияет на эффективность критериев, применяемых для оценки упорядоченности системы (аттрактора). Этим можно объяснить сложность реализации многих методов идентификации ХПЛ.

Итак, различные модификации методов Розенштейна, Бенеттина, Вольфа и теорема Такенса широко применяются для идентификации ХПЛ стационарных систем. Свойства временного ряда, описывающего изменение переменных системы, оказывают существенное влияние на точность получаемых оценок ХПЛ. Различные

модификации, которые учитывают имеющуюся априорную информацию, используются для упрощения указанных методов. Эти подходы применяются для оценки ХПЛ нестационарных систем. Как правило, рассматриваемые методы позволяют находить старший (первый, наибольший) показатель Ляпунова. В подавляющем числе публикаций анализируются системы, в которых может возникать хаос. Нестационарные системы имеют свою специфику [15, 16]. В частности, они могут содержать спектр показателей Ляпунова. Как правило, большинство публикаций посвящено оценке старшего ХПЛ, а спектр показателей Ляпунова практически не удается идентифицировать. Поэтому требуется дальнейшая модификация рассмотренных выше подходов и методов для оценки ХПЛ. Не всегда предлагаются критерии и процедуры для проверки полученных решений.

В работах [17, 18] предложен подход к идентификации показателей Ляпунова, основанный на анализе специального класса структур. Структуры описывают динамику изменения ХПЛ стационарных динамических систем в условиях неопределенности. Они не требуют применения рассмотренных выше процедур и методов. Ниже дается обобщение метода на класс периодических систем.

Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A(t)X + BU; \\ Y &= CX + W_U U, \end{aligned} \quad (1)$$

где $X \in R^m$ — вектор состояния; $U \in R^k$, $Y \in R^n$ — вход и выход системы; $A(t) \in R^{m \times m}$, $W_U \in R^{n \times k}$, $B \in R^{m \times k}$, $C \in R^{n \times m}$.

Пусть матрица $A(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

A1. $A(t)$ является непрерывной матрицей Фробениуса и ограниченной

$$\|A(t)\| \leq \alpha_A, \quad (2)$$

где $\alpha_A > 0$, $\|\cdot\|$ — норма матрицы.

A2. $A(t)$ является почти периодической, т. е. из любой последовательности [17]

$$A_i(t) = A_i(t - \tau_i) \quad (3)$$

можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на всей оси к некоторой почти периодической матрице $A(t)$.

А3. Матрица $A(t)$ является гурвицевой для почти всех $t \geq 0$.

Экспериментальная информация для системы (1) имеет вид

$$I_o = \{Y(t), U(t), t \in J = [t_0, t_1]\}. \quad (4)$$

Запишем решение системы (1) в виде

$$X(t) = \chi(t_0, U, t), \quad (5)$$

где χ — оператор, однозначно определяемый матрицами A, B .

Из соотношения (5) получаем решение системы (1) при $X_0 = X(t_0)$:

$$X(t) = X_g(t) + X_q(t), \quad (6)$$

где $X_q(t)$ — частное решение системы (1) с $U \in I_o$; $X_g(t)$ — общее решение системы (1) с $U(t) = 0$ при неизвестном $X_0 \in I_o$.

Пусть $X_g(X_0, t)$ — общее решение системы (1) с $X_0 = X_0(Y_0) \in I_o$.

Задача: определить оценки решения $X_g(t) = X_g(X_0, X_0, t)$ на множестве I_o и принять решение о спектре собственных чисел и порядке системы (1).

Оценка общего решения системы

Применим операцию $\{X(t)\} \setminus \{X_q(t)\}$ и сформируем множество $\{X_g(t)\}$ для оценки ХПЛ. Воспользуемся подходом, предложенным в работе [18].

Изложим метод решения задачи на примере системы (1) второго порядка с одним входом и выходом, $W_U = 0$. Введем обозначения: $y = Y$, $y \in R$, $u = U$, $u \in R$, $D_y(\omega)$, $D_u(\omega)$ — частотные спектры y , u , $|y(t)| < \infty$, $|u(t)| < \infty$. Так как матрица $A(t)$ удовлетворяет условию А3, то $D_y(\omega) \neq D_u(\omega)$, т. е. система (1) является нестационарной. Система (1) является динамической, поэтому она вносит запаздывание выхода относительно входа. Предлагаемый ниже подход к построению модели исключает это запаздывание.

Представим I_o в виде

$$I_o = I_o^q(J_q) \cup I_o^g(J_g),$$

где $J_q \cup J_g = J \subseteq R$; I_o^q , I_o^g — множества, содержащие информацию о X_q и X_g .

Определим оценку частного решения системы (1) на множестве $I_o^q(J_q)$. Так как $x_1 = y$, $y \in R$, то применим операцию дифференцирования переменной y и получим оценку компонент $x_2 = \dot{x}_1$ вектора $X \in R^2$. Обозначим $x_2 = \dot{y}$.

Утверждение 1 [18]. Модель

$$\widehat{X}_q(t) = \widehat{A}_q W(t), \quad \forall t \in J_q \quad (7)$$

применима для идентификации $X_q(t)$ на множестве I_o^q , где $\widehat{A}_q \in R^{2 \times 2}$ — матрица параметров модели, $W = [u \ u']^T$.

Свойства модели (7) зависят от выбора интервала $J_q \subset J$. Модель (7) применима и для случая $m > 2$.

Найдем оценку частного решения $\widehat{X}_q(t)$ системы на множестве I_o^g , используя модель (7). Затем получим оценку общего решения

$$\widehat{X}_g(t) = X(t) - \widehat{X}_q(t), \quad \forall t \in J_g,$$

где $\widehat{X}_g(t) = [\widehat{y}_g(t) \ \dot{\widehat{y}}_g(t)]^T$.

Предложенный подход обобщается на многомерный случай.

Далее рассматривается система (1) с одним входом u и выходом y . Предполагается, что система (1) является идентифицируемой. Для проверки этого условия применим подход, предложенный в работе [19].

Характеристические показатели Ляпунова и коэффициент структурности системы

Применим ХПЛ [15] для оценки свойств системы (1). ХПЛ для действительной функции $h(t)$ определяются как

$$\chi[h] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln|h(t)|}{t}, \quad (8)$$

где $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty}$ — верхний предел.

ХПЛ χ_i ($i = \overline{1, m}$) ненулевого решения стационарной системы (1) совпадают с действительными частями собственных чисел λ_i матрицы A .

Пусть известна оценка общего решения $X_g(t) \forall t \in J_g$ для системы (1) и выполняется условие А3. Применим (8) к $\widehat{y}_g(t)$:

$$\chi[\widehat{y}_g] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{\ln|\widehat{y}_g(t)|}{t}, \quad (9)$$

где $\bar{t} \in J_g$ — верхняя граница t на интервале $J_g \subset J$.

Соотношение (9) определяет наибольший ХПЛ. Если предел (8) существует, то $\chi[\widehat{y}_g]$ является оценкой максимального собственного числа матрицы A . Следовательно, $\chi[\widehat{y}_g]$ является

показателем степени устойчивости системы (1). Если $m = 2$, то на основе \hat{y}_g можно получить

$$\chi[\hat{y}_g] = \lim_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{\ln |\hat{y}_g|}{t}. \quad (10)$$

Иногда применяют показатель

$$\eta[h] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |h(t)|}{t}, \quad (11)$$

где $\lim_{t \rightarrow \infty}$ — нижний предел. Это нижний показатель Перрона [15].

Идея применения ХПЛ в задачах идентификации изложена в работе [19]. Предлагаемый подход основан на анализе коэффициента структурности (КС) [20]. Покажем связь между КС и ХПЛ.

Рассмотрим показатель

$$\rho(\hat{y}_g) = \rho_g = \ln |\hat{y}_g(t)|, \forall t \in \bar{J}_g \subset J_g, \quad (12)$$

где $\bar{J}_g = [t_0, \bar{t}]$ определяется в соответствии с (9), и систему с входом t и выходом $\rho(\hat{y}_g)$. Тогда КС для оценки структурных свойств этой системы имеет вид

$$k_s(t, \rho) = \frac{\rho(\hat{y}_g(t))}{t}. \quad (13)$$

$k_s(t, \rho)$ является основной переменной для вычисления показателя $\chi[\hat{y}_g]$ на интервале \bar{J}_g .

Итак, показана взаимосвязь между ХПЛ $\chi[\hat{y}_g]$ и КС $k_s(t, \rho)$ на информационном множестве $I_\rho = \{\rho(\hat{y}_g(t)), t \in \bar{J}_g\}$.

Рассмотрим множество

$$I_g(\hat{y}_g, t) = \{\hat{y}_g(t), t \in J_g\} = I_{\hat{X}_g} \setminus \{\hat{y}_g(t), t \in J_g\}. \quad (14)$$

Предположим, что система (1) является устойчивой, т. е. $\text{Re}(\lambda_i(t)) \leq 0$, $i = 1, m$, $\forall t > 0$, где $\lambda_i(t) \in \sigma(A)$ — i -е собственное число матрицы состояния.

Задача: оценить спектр $\sigma(A)$ характеристических показателей матрицы A системы (1) и ее порядок на основе анализа множеств I_ρ , I_g .

Так как множество (14) формируется на основе модели (7), то получаемая оценка \hat{y}_g будет содержать ошибки ε . Поэтому функция $\hat{y}_g(t)$ будет почти "периодической". Рассмотрим более подробно этот вопрос.

Почти периодические функции по Бору

Рассмотрим класс почти периодических функций по Бору.

Определение 1 [21]. Числовое множество $\Xi = \{\xi\}$ называется относительно плотным на действительной оси $-\infty < x < \infty$, если существует такое число $l > 0$, что каждый отрезок $a \leq x \leq a + l$ длины l содержит хотя бы один элемент нашего множества, т. е. при любом a имеем

$$[a, a + l] \cap \Xi \neq \emptyset.$$

Определение 2 [21]. Число $T = T_f(\delta)$ называется почти периодом функции $f(x)$ с точностью до δ (или δ -почти периодом или δ -смещением), если неравенство

$$|f(x + T_f) - f(x)| < \delta, \delta > 0 \quad (15)$$

имеет место для любого $x \in (-\infty, \infty)$.

Определение 3 [21]. Функция $f(x) \in (-\infty, \infty)$ называется почти периодической в смысле Бора (\mathcal{BF} -функцией), если относительно плотное множество почти периодов T_f функции $f(x)$ с точностью до δ существует, т. е. существует такое положительное число $l = l(\delta)$, что любой отрезок $[a, a + l]$ содержит, по меньшей мере, одно число T_f , для которого справедливо

$$|f(x + T_f) - f(x)| < \delta \text{ при } x \in (-\infty, \infty).$$

Функция $\hat{y}_g(t)$ принадлежит к классу экспоненциально-синусоидальных функций. Поэтому условие (15) может не выполняться. Обеспечим принадлежность $\hat{y}_g(t)$ к \mathcal{BF} -функции. Выполним следующие действия. Рассмотрим некоторую точку $t \in R$ и ее окрестность O_t . Определим среднее значение $\hat{y}_g(t) \forall t \in O_t$:

$$\alpha = \bar{y}_{g, O_t} = \frac{1}{N_t} \sum_i \hat{y}_i,$$

где N_t — число точек в O_t , $t_i \in O_t$ — текущее покрытие интервала O_t с шагом τ .

Для $t \in R$, принадлежащих окрестности $O_{t+T_{\hat{y}_g}}$, получим

$$\pi = \bar{y}_{g, O_{t+T_{\hat{y}_g}}} = \frac{1}{N_{t+T_{\hat{y}_g}}} \sum_i \hat{y}_i.$$

Определение 4. [22] Функция $\hat{y}_g(t) \in (0, \infty)$ называется $\alpha\pi$ -почти периодической в смысле Бора ($\mathcal{BF}_{\alpha\pi}$ -функцией), если для любого $\delta > 0$ существует относительно плотное множество почти периодов T_f функции $\hat{y}_g(t)$ с точностью до δ , т. е. существует положительное число $l = l(\delta)$ такое, что любой отрезок $[a, a + l]$ со-

держит, по меньшей мере, одно число T_f , для которого выполнено неравенство

$$\left| \frac{\hat{y}_g(t + T_f)}{\pi} - \frac{\hat{y}_g(t)}{\alpha} \right| < \delta \text{ при } t \in [0, \infty).$$

Структуры для оценки характеристических показателей Ляпунова

Изложим подход к оценке ХПЛ на основе анализа специального класса структур. Рассмотрим множества

$$I_{k_s} = \{k_s(t, \rho(\hat{y}_g(t))), t \in \bar{J}_g\};$$

$$I_{k'_s} = \{k'_s(t, \rho(\hat{y}_g(t))), t \in \bar{J}_g\}.$$

Определим на $I_{k_s}, I_{k'_s}$ отображение $S_{k_s, \rho} \rightarrow I_{k_s} \times I_{k'_s}$. Структура $S_{k_s, \rho}$ отражает динамику изменения показателей, зависящих от ХПЛ. Рассмотрим на множестве $I_{k'_s}$ функцию

$$\Delta k'_s(t) = k'_s(t, \rho(\hat{y}_g(t + \tau))) - k'_s(t, \rho(\hat{y}_g(t))), \quad (16)$$

описывающую изменение первой разности КС $k'_s(t, \rho(\hat{y}_g(t)))$, где $\tau > 0$.

Сформируем множество $I_{\Delta k'_s} = \{\Delta k'_s(t, \rho(\hat{y}_g(t))), t \in \bar{J}_g\}$ и рассмотрим структуру $SK_{\Delta k'_s, \rho}$, определенную на $I_{k_s, \rho} \times I_{\Delta k'_s, \rho}$. Введем преобразование, соответствующее структуре $SK_{\Delta k'_s, \rho}$:

$$L SK_{\Delta k'_s, \rho} \rightarrow I_{k_s, \rho} \times B(I_{\Delta k'_s, \rho}), \quad (17)$$

где $B(I_{\Delta k'_s, \rho}) \subset \{-1; 1\}$. Определим элементы бинарного множества $B(I_{\Delta k'_s, \rho})$ в виде

$$b(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta k'_s(t) \geq 0, \\ -1, & \text{если } \Delta k'_s(t) < 0, \end{cases} \quad t \in \bar{J}_g.$$

Замечание 1. Границы верхнего предела в выражении (9) можно выбрать на основе анализа изменения $S_{k_s, \rho}$ для некоторого класса систем.

Замечание 2. Выбор области значений функции $b(t)$ определяется удобством ее графического анализа. $b(t)$ можно задать на бинарном множестве $\{0; 1\}$.

Изложенный подход был предложен для класса стационарных систем. Некоторая модификация этого подхода требуется при анализе α -почти периодических систем. В частности, структура $L SK_{\Delta k'_s, \rho}$ эффективно работает для случая стационарных систем. $L SK_{\Delta k'_s, \rho}$ является неэффективной для периодических систем, так как функция $b(t)$ отражает все изменения в структуре $SK_{\Delta k'_s, \rho}$.

Оценка порядка системы

Результаты, излагаемые далее, относятся к системе (1) с матрицей Фробениуса, $y \in R$, $W_U = 0$, $U = u$, $u \in R$. Считаем, что матрица A удовлетворяет условиям А1–А3.

Рассмотрим критерий оценки порядка системы. Он основан на модификации теоремы 1 [18] для учета специфики рассматриваемой системы.

Рассмотрим структуру $SK_{\Delta k'_s, \rho}$, определенную на $I_{k_s, \rho} \times I_{\Delta k'_s, \rho}$ и описываемую функцией $f_{sk}(t) : k_s \rightarrow \Delta k_s$. Функция $f_{sk}(t)$ является $B\mathcal{F}_{\alpha\pi}$ -функцией. Поэтому $f_{sk}(t)$ содержит области \mathcal{D}_{sk} , которые имеют резко изменяющуюся амплитуду.

Определение 5. Область \mathcal{D}_{sk} функции f_{sk} называется $\alpha\pi$ -областью на интервале $J_{sk} = [t, t + T]$ ($T > 0$) изменения t , если она соответствует изменению $B\mathcal{F}_{\alpha\pi}$ -функции $k_s(t)$ на этом интервале.

Теорема 1. Пусть система (1) удовлетворяет условиям А1–А3. Тогда система (1) имеет порядок m , если функция $f_{sk}(t)$ на интервале $[t_0, t^*] \subset \bar{J}_g$ ($t^* \leq \bar{t}$) содержит не менее m областей \mathcal{D}_{sk} .

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим случай простых действительных корней. Система (1) является устойчивой. Пусть собственные числа системы расположены в порядке убывания: $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$. $\lambda_i(t)$ ($i = \overline{1, m}$) является периодической функцией. Функция $\exp(\lambda_i(t)t) \in \hat{y}_g$, является $\alpha\pi$ -почти периодической на некотором подинтервале $J_{\lambda_i} \subset J$. $\exp(\lambda_i(t)t)$ соответствует ХПЛ χ_{λ_i} , принадлежащий линеалу $L^i(t)$, а χ_{λ_i} соответствует области \mathcal{D}_{sk}^i на структуре $SK_{\Delta k'_s, \rho}$. Область \mathcal{D}_{sk}^i конгруэнтна в пространстве решений системы (1) линеалу $L^{m-i}(t)$ (см. определение в работе [15]). Переход между линеалами может выполняться $m - 1$ раз. Функция $\rho(\hat{y}_g(t))$ зависит от $\hat{y}_g(t)$, поэтому каждый такой переход будет приводить к изменению свойств структуры $SK_{\Delta k'_s, \rho}$. ■

Замечание 3. Так как собственные числа $\lambda_i(t)$ матрицы A являются периодическими функциями времени, то линеалы $L^i(t)$ и $L^{i+1}(t)$ могут пересекаться. Этот случай может приводить к бесконечному спектру характеристических показателей Ляпунова. Эта особенность отмечена в работе [15].

Замечание 4. Если частотные спектры линеалов $L^i(t)$ и $L^{i+1}(t)$ пересекаются, то для системы (1), согласно замечанию 3, можно построить пирамиду [15], соответствующую ступенчатому набору линеалов

$$0 \equiv \mathcal{L}^0(t) \subset \mathcal{L}^1(t) \subset \dots \subset \mathcal{L}^n(t) \equiv \mathcal{L}^m(t)$$

с почти гладкими гранями. Такое представление влияет на спектр получаемых характеристических показателей Ляпунова.

Структурный подход к оценке характеристических показателей Ляпунова

Изложим подход, который не требует обработки множества I_{k_s} для идентификации характеристических показателей Ляпунова. Он предложен в работе [17] и основан на анализе свойств структур, введенных в разделе "Структуры для оценки ХПЛ". Подход базируется на анализе изменения структуры \mathcal{S} , отражающей свойства системы в специальном пространстве.

Известно [17], что ХПЛ системы влияют на характер изменения \mathcal{S} . Рассмотрим структуры $\mathcal{S}_{k_s, p}$ и $\mathcal{S}_{k_s, p}^i$ ($i > 1$) как пример структуры \mathcal{S} .

Введем структуру $\mathcal{S}_{k_s, p}^i$, которая определена на множестве $I_{k_s} \times I_{k_s}^i$ и структуру $\mathcal{S}_{\Delta k_s, p}^i$, где i обозначает i -ю производную $\hat{y}_g(t)$,

$$I_{k_s}^i = \{k_s(t, \rho(\hat{y}_g^{(i)}(t))), t \in \bar{J}_g\}. \quad (18)$$

Структура $\mathcal{S}_{k_s, p}^i$, как показано в работе [17], отражает изменение ХПЛ. Характеристические показатели $\chi_i[\hat{y}_g]$ соответствуют локальным минимумам $\mathcal{S}_{k_s, p}^i$. χ_m соответствует глобальному минимуму, а χ_1 соответствует максимуму функции, описывающей изменение $\mathcal{S}_{k_s, p}^i$.

Теорема 2 [17]. Если система (1) является устойчивой и содержит простые собственные числа, то структуры $\mathcal{S}_{k_s, p}^i$, $i = \overline{1, m}$, содержат информацию о характеристических показателях Ляпунова.

Расположение локальных минимумов на $\mathcal{S}_{k_s, p}^i$ совпадает с областями \mathcal{D}_{sk} структуры $\mathcal{S}_{\Delta k_s, p}^i$. Анализ \mathcal{D}_{sk}^i позволяет выделить множество \mathcal{M}_{LE} , содержащее оценки показателей системы (1). Мощност \mathcal{M}_{LE} может не совпадать с числом характеристических показателей системы. \mathcal{M}_{LE} характеризует доступное множество линеалов системы (1).

Выбор времени \bar{t} в (10) осуществляется на основе анализа изменения структуры $\mathcal{S}_{\Delta k_s, p}^i$.

Замечание 5. Структура $\mathcal{S}_{\Delta k_s, p}^i$, где $i > 1$, может применяться для принятия решения о ХПЛ.

Предлагаемый подход дает оценки наименьшего ХПЛ $\eta_i[\hat{y}_g]$. В этом состоит основное от-

личие данного подхода от процедур, предлагаемых в литературе. Если структура $\mathcal{S}_{\Delta k_s, p}^i$ содержит единичное резкое изменение значения, то это является признаком того, что $\mathcal{S}_{k_s, p}^i$ содержит оценку $\eta_m[\cdot]$. Так как $|\eta_m[\cdot]| > |\chi_i[\cdot]|$, где $i = \overline{1, m-1}$, то $\eta_m[\cdot]$ обозначим через κ_m и будем называть верхней оценкой наименьшего ХПЛ. Объясняется это тем, что соответствующий линеал $\mathcal{L}^m(t)$ имеет минимальную область определения. Функция $\hat{y}_g(t)$ на $\mathcal{L}^m(t)$ не является α -почти периодической, так как ее параметры α , π быстро убывают на $\mathcal{L}^m(t)$. Следовательно, условие (15) не выполняется. Поэтому линеал $\mathcal{L}^m(t)$ содержит только одно значение, которое соответствует κ_m . Итак, справедливо следующее утверждение:

Утверждение 2. Пусть система (1) удовлетворяет условиям А1—А3 и структура $\mathcal{S}_{\Delta k_s, p}^i$ содержит точку М, в которой резко изменяется значение функции, описывающей изменение $\mathcal{S}_{\Delta k_s, p}^i$. Тогда глобальный минимум соответствует точке М на структуре $\mathcal{S}_{k_s, p}^i$, и значение глобального минимума является верхней оценкой κ_m наименьшего $\eta_i[\hat{y}_g]$.

Замечание 6. Так как решение принимается на основе нескольких структур $\mathcal{S}_{k_s, p}^i$ ($i \geq 1$), то выберем верхнюю границу из $\kappa_{m,i}$ и обозначим ее κ_m .

Множество \mathcal{M}_{LE} оценок спектра ХПЛ формируется на основе анализа минимумов $\mathcal{S}_{k_s, p}^i$ и замечания 5.

Рассмотрим задачу определения области, которой принадлежит множество \mathcal{M}_{LE} . Связано это с тем, что мощност множества \mathcal{M}_{LE} может быть большой (см. замечание 3). Определим допустимую область для \mathcal{M}_{LE} и число, определяющее подвижност старшего показателя Ляпунова. Эта область ограничена показателем κ_m снизу. При выборе данных параметров можно ограничиться временным диапазоном $[0, \bar{t}]$, где \bar{t} выбирается согласно (9). Осуществим выбор области изменения χ_1 на основе анализа структуры $\mathcal{S}_{\Delta k_s, p}^i$. Область $\mathcal{D}_{sk}^1 \subset \mathcal{S}_{\Delta k_s, p}^i$ является индикатором наличия χ_1 . Фрагмент $\mathcal{V}_{k_s, p}^1$ на структуре $\mathcal{S}_{k_s, p}^i$, который изменяется на интервале $J_{k_s, p}^1$, соответствует области \mathcal{D}_{sk}^1 . Следовательно, $\chi_1 \in J_{k_s, p}^1$. Тогда допустимая граница подвижности старшего показателя χ_1 определяется в виде

$$\chi_1 \leq \sup J_{k_s, p}^1. \quad (19)$$

Неравенство (19) дает допустимую границу (границу подвижности [15]) изменения χ_1 в условиях неопределенности. Области подвижности для $\chi_i, i > 1$, определяются аналогично.

Рассмотрим критерии для оценки элементов множества M_{LE} и (19). Понятие адекватности, принятое в теории параметрической идентификации, в данном случае неприменимо. Как следует из раздела "Введение", подавляющее большинство публикаций посвящено вычислению показателей Ляпунова. Вопросы проверки качества полученных оценок не рассматривались. Такие теоретические показатели, как прочность, достижимость не поддаются проверке в условиях неопределенности. Поэтому далее предлагается метод для проверки так называемой χ -адекватности полученных оценок ХПЛ. Он основан на анализе структур, рассмотренных выше, и учете свободного движения системы.

Рассмотрим структуру $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$, описываемую функцией $f_{\hat{y}_g, \hat{y}_g} : \hat{y}_g \rightarrow \hat{y}_g$ в пространстве $\mathcal{R}_y = (\hat{y}_g, \hat{y}_g)$. Так как система (1) удовлетворяет условиям А1—А3, то $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$ содержит области, которые отражают $\alpha\pi$ -почти периодическое поведение системы. Рассмотрим структуры $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$ и $SL_{k_{s,p}^i}$, которые описываются функциями

$$f_{SL_{k_{s,p}^i}} : \hat{y} \rightarrow k_{s,p}^i, \quad f_{SL_{\Delta k_{s,p}^i}} : \hat{y} \rightarrow \Delta k_{s,p}^i. \quad (20)$$

Определение 6. Оценки характеристических показателей Ляпунова χ_i являются χ -адекватными в пространстве \mathcal{R} , если области их определения совпадают с областями $\alpha\pi$ -почти периодичности структуры $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$.

Рассмотрим фрагменты $\mathcal{D}_{sl}^j \subset SL_{\Delta k_{s,p}^i}$ ($j \geq 1$) по аналогии с $\mathcal{D}_{sk} \subset SK_{\Delta k_{s,p}^i}$ в пространстве \mathcal{R}_y . Обозначим области определения \mathcal{D}_{sl}^j через $\text{dom } \mathcal{D}_{sl}^j$.

Теорема 3. Если области определения фрагментов \mathcal{D}_{sl}^j структуры $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$ совпадают с областями $\alpha\pi$ -почти периодичности структуры $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$, то оценки χ_i являются χ -адекватными областям $\alpha\pi$ -почти периодичности $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$.

Доказательство теоремы 3. Функция $f_{sk}(t)$ содержит не менее m областей \mathcal{D}_{sk}^j согласно теореме 1. Структуры $SK_{\Delta k_{s,p}^i}$ и $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$ имеют одинаковую область значений. Данное утверждение справедливо и для $\mathcal{D}_{sk}^j, \mathcal{D}_{sl}^j$, которые определяют изменение ХПЛ. Конгруэнтность областей значений $\mathcal{D}_{sk}^j, \mathcal{D}_{sl}^j$ следует из равенства областей значений $\mathcal{D}_{sk}^j, \mathcal{D}_{sl}^j$. Если область

определения фрагмента \mathcal{D}_{sl}^j структуры $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$ и область $\alpha\pi$ -почти периодичности $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$ совпадают, то при существовании зависимости между функциями $f_{SL_{k_{s,p}^i}}$ и $f_{SL_{\Delta k_{s,p}^i}}$ получаем, что некоторая совокупность элементов множества M_{LE} покрывает соответствующую $\alpha\pi$ -почти периодическую область $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$. Следовательно, оценки χ_i являются χ -адекватными в пространстве \mathcal{R}_y . ■

В работах [17, 18] предложен метод гистограмм для проверки полученных оценок характеристических показателей (типа корней) стационарных систем. Ниже даются примеры его применения.

Примеры

Пусть выполняются требования к системе (1), изложенные в разделе "Постановка задачи", и известно множество (4).

1. Рассмотрим систему, фазовый портрет которой показан на рис. 1. Вход $u(t) = 5 + 2\sin(0,2\pi t)$. Рис. 1 показывает, что в системе присутствуют колебания.

Применим модель (7) для выделения общего решения из $y(t)$ на временном интервале [5; 40] с. Модель (7) имеет вид $\hat{y}_q(t) = \hat{A}_q [1 \ u(t) \ \dot{u}(t)]^T$, где $\hat{A}_q = [0,302; 0,189; -0,203]^T$. Коэффициент детерминации равен 0,95. Далее получена оценка для $\hat{y}_g(t) = y(t) - \hat{y}_q(t)$. Оценка для $\dot{y}_g(t)$ определяется аналогично, а модель (7) имеет вид

$$\hat{y}_q(t) = [-0,17; -0,89; 0,27][1 \ u(t) \ \dot{u}(t)]^T. \quad (21)$$

Коэффициент детерминации модели (21) равен 0,99. Построим портрет системы в пространстве \mathcal{R}_y , чтобы убедиться, что система (1) принадлежит к классу систем с периодическими коэффициентами. Он показан на рис. 2.

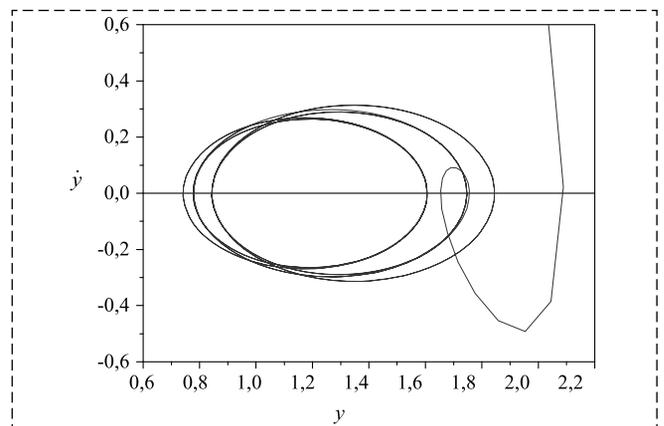


Рис. 1. Фазовый портрет системы (1)
Fig. 1. Phase portrait of the system (1)

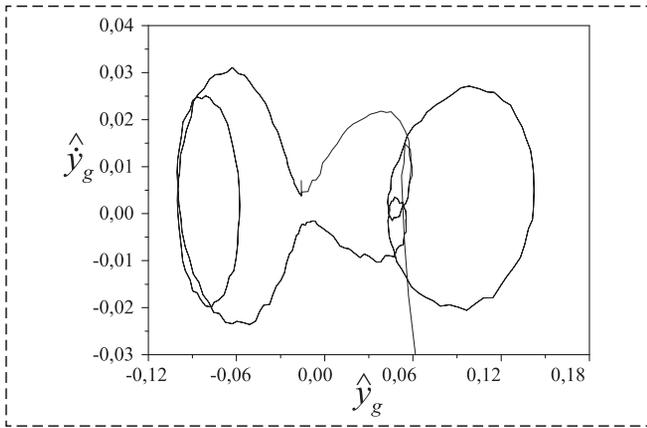


Рис. 2. Фазовый портрет системы в пространстве \mathcal{R}_y
Fig. 2. Phase portrait of system (1) in space \mathcal{R}_y

Результаты идентификации ХПЛ показаны на рис. 3–6. Изменение структур $S\mathcal{K}_{\Delta k'_{s,\rho}}$ и $S_{k'_{s,\rho}}$ представлено на рис. 3, где $\Delta k'_s$ имеет вид (16), k_s описывается выражением (13), а

$$k'_s(t, \rho) = \frac{\rho(\hat{y}_g(t))}{t}. \quad (22)$$

Множество ХПЛ $\mathcal{M}_{LE} = \{-1,8; [-1,21; -0,88]\}$ определяем на основе анализа $S\mathcal{K}_{\Delta k'_{s,\rho}}$. Применяв теорему 1, получим, что порядок системы равен 2. Верхняя оценка для наименьшего ХПЛ равна $\kappa_m = -1,8$.

Допустимая граница подвижности старшего показателя χ_1 равна $-0,8$. Еще одно множество ХПЛ имеем на интервале $k_s \in [-0,2; -0,13]$, что подтверждает вывод, сделанный в замечании 3.

На рис. 4, 5 показаны результаты оценки χ -адекватности множества ХПЛ. Оценки χ -адекватности в пространствах \mathcal{R}_y и $\mathcal{R}_{\Delta} = (\hat{y}_g, \Delta k'_{s,\rho})$ на временном интервале [3; 55]с представлены на рис. 4.

Области \mathcal{D}_{sk}^i функции f_{sk} совпадают с областями α -почти периодичности структуры $S_{k'_{s,\rho}}$, что подтверждает χ -адекватность оценок ХПЛ.

Рис. 5 представляет результаты χ -адекватности оценок ХПЛ в пространствах \mathcal{R}_y и $\mathcal{R}_{k^1} = (\hat{y}_g, k^1_{s,\rho})$. Они коррелируют с результатами, представленными на рис. 4. Структуры отражают состояние системы идентификации ХПЛ, начиная с $t \geq 3$ с.

Метод гистограмм [17, 18] подтверждает полученные оценки χ_i . Гистограмма дает спектр показателей Ляпунова. Пример распределения ХПЛ на основе анализа параметра (22) показан на рис. 6, где n — число попаданий χ_i в заданный интервал.

Вернемся к исходной системе (1). Система второго порядка (1) имеет следующие параметры:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) \end{bmatrix};$$

$$a_1(t) = -3 + 0,2 \sin(0,02\pi t);$$

$$a_2(t) = -4 + 0,3 \sin(0,04\pi t).$$

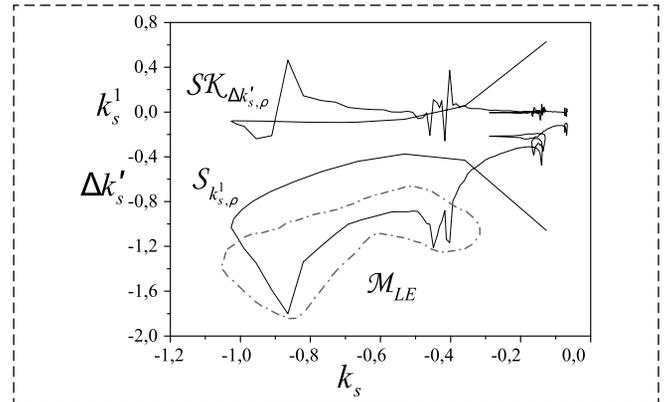


Рис. 3. Множество ХПЛ
Fig. 3. Set of Lyapunov exponents

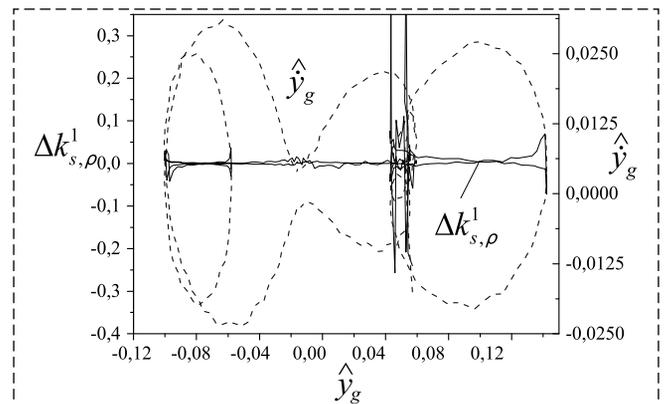


Рис. 4. Результаты оценки χ -адекватности в пространствах \mathcal{R}_y и \mathcal{R}_{Δ}
Fig. 4. Estimation results of χ -adequacy in spaces \mathcal{R}_y and \mathcal{R}_{Δ}

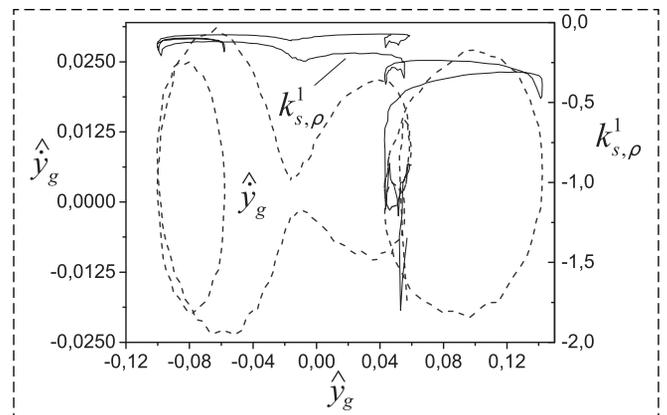


Рис. 5. Результаты оценки χ -адекватности в пространствах \mathcal{R}_y и \mathcal{R}_{k^1}
Fig. 5. Estimation results of χ -adequacy in spaces \mathcal{R}_y and \mathcal{R}_{k^1}

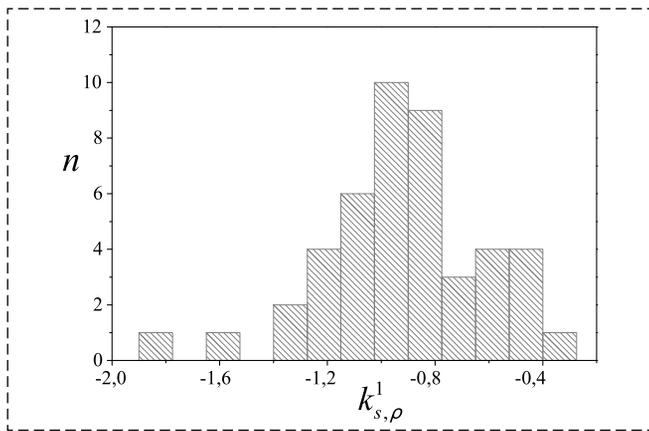


Рис. 6. Распределение показателей Ляпунова
Fig. 6. Distribution of Lyapunov exponents

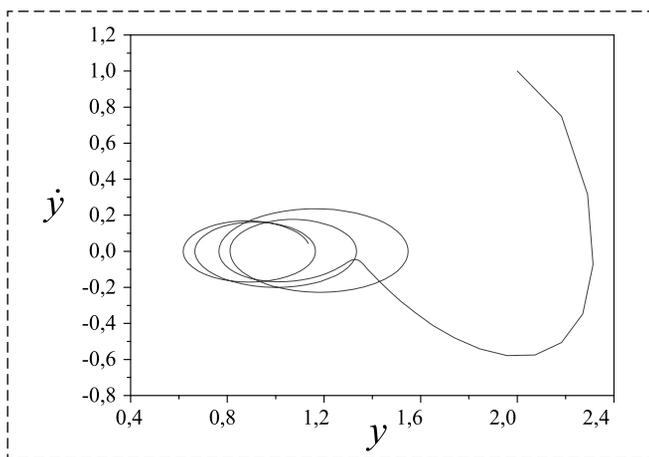


Рис. 7. Фазовый портрет системы
Fig. 7. Phase portrait of the system

Собственные числа матрицы A изменяются в диапазонах: $\lambda_1(t) \in [-1,325; -0,819]$, $\lambda_2(t) \in [-2,37; -3,48]$. Результаты моделирования показывают, что предлагаемый подход позволяет получить оценки ХПЛ.

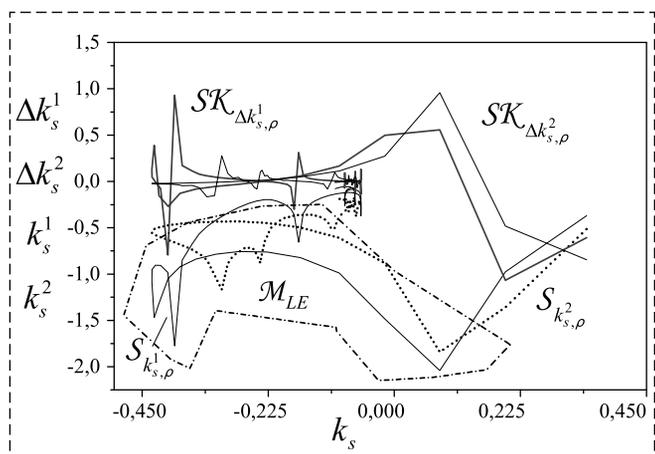


Рис. 8. Множество ХПЛ
Fig. 8. Set of Lyapunov exponents

2. Рассмотрим систему, фазовый портрет которой показан на рис. 7. Известно информационное множество (4) для системы. Вход $u(t) = 5 + 2\sin(0,2\pi t)$. Из рис. 7 следует, что в системе присутствуют колебания. Вход имеет только одну частоту. Поэтому наличие в структуре колебаний с другими частотами говорит о том, что система может относиться к классу периодических систем.

Применим для идентификации ХПЛ подход, изложенный в первой части этого раздела. Построим модель (7) для получения общего решения для y, \dot{y} . Выполним операцию численного дифференцирования для вычисления \dot{y} . Модели (7) имеют вид

$$\hat{y}_q(t) = [0,75; 0,07; -0,22][1 u(t) \dot{u}(t)]^T;$$

$$\hat{\dot{y}}_q(t) = [-0,394; -0,059; 0,078][1 u(t) \dot{u}(t)]^T.$$

Коэффициенты детерминации для этих моделей равны 0,99. Далее находим оценки свободного движения системы.

Рассмотрим структуры $SK_{\Delta k_{s,\rho}^1}$, $S_{k_{s,\rho}^1}$, представленные на рис. 8, и на основе их анализа оценим порядок системы. Результаты анализа показывают, что система имеет третий порядок. Получено множество показателей Ляпунова $M_{LE} = \{-2,04; -1,842; -1,77; -1,167; -0,878\}$ на основе анализа $SK_{\Delta k_{s,\rho}^1}$ и $SK_{\Delta k_{s,\rho}^2}$. Верхняя оценка для наименьшего ХПЛ равна $\kappa_m = -2,04$. Допустимая граница подвижности старшего показателя χ_1 равна $-0,8$.

Результаты проверки χ -адекватности ХПЛ представлены на рис. 9, 10. Из рисунков следу-

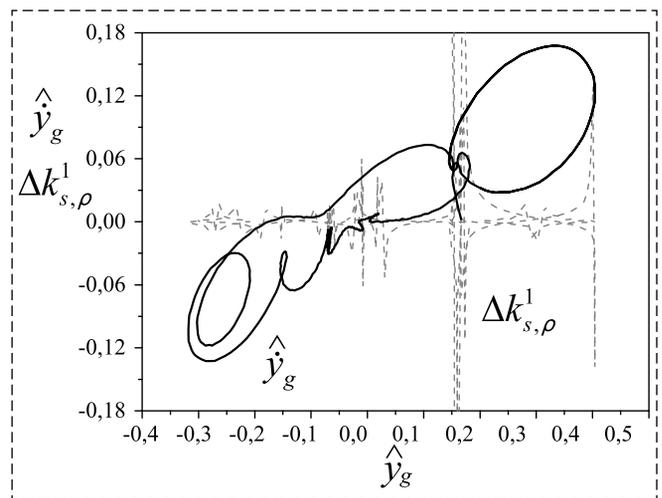


Рис. 9. Результаты оценки χ -адекватности в пространствах \mathcal{R}_y и \mathcal{R}_Δ
Fig. 9. Estimation results of χ -adequacy in spaces \mathcal{R}_y and \mathcal{R}_Δ

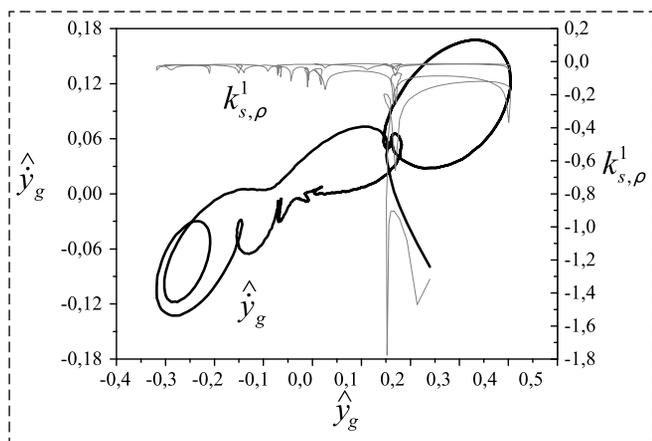


Рис. 10. Результаты оценки χ -адекватности в пространствах \mathcal{R}_y и \mathcal{R}_{k^1}

Fig. 10. Estimation results of χ -adequacy in spaces \mathcal{R}_y and \mathcal{R}_{k^1}

ет, что ХПЛ-оценки являются χ -адекватными. Рис. 10 представляет распределение показателей Ляпунова. Оно совпадает с полученным множеством \mathcal{M}_{LE} . Форма структуры $S_{\hat{y}, \hat{y}}$ (см. рис. 8, 9) определяется параметрами системы (1).

Исходная система имеет следующие собственные числа матрицы состояния:

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= -1 + 0,2\sin(0,02\pi t); \\ \lambda_2(t) &= -2 + 0,3\sin(0,04\pi t); \\ \lambda_3(t) &= -3 + 0,2\sin(0,06\pi t).\end{aligned}$$

Заключение

Предложен подход к оценке ХПЛ, принятый в задачах нелинейной динамики. Он отличается от большинства существующих подходов, основанных на анализе временного ряда и теореме Такенса. Решение задачи базируется на формировании массива, содержащего информацию об общем решении системы. Строится виртуальная геометрическая структура, анализ которой позволяет сделать заключение о свойствах системы. Введено понятие α -почти периодической функции в смысле Бора, так как рассматриваемые процессы не являются периодическими в общепринятом смысле. Предложены структуры, отражающие динамику изменения характеристических показателей Ляпунова. На основе этих структур сформирован массив ХПЛ. Получены верхняя оценка наименьшего показателя и граница подвижности для старшего показателя, а также множество показателей системы. Предложен графический критерий, основанный на анализе свойств специального класса структур,

для оценки адекватности полученных оценок показателей. Применен метод гистограмм для проверки множества полученных оценок.

Результаты моделирования подтвердили работоспособность предложенных методов и алгоритмов.

Список литературы

1. **Thamilmaran K., Senthilkumar D. V., Venkatesan A., Lakshmanan M.** Experimental realization of strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced electronic circuit // *Physical Review E*. 2006. Vol. 74, N. 9. P. 036205.
2. **Porcher R., Thomas G.** Estimating Lyapunov exponents in biomedical time series // *Physical Review E*. 2001. Vol. 64, N. 1. P. 010902(R).
3. **Holyst J. A., Urbanowicz K.** Chaos control in economical model by time-delayed feedback method // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2000. Vol. 287, N. 3–4. P. 587–598.
4. **Macek W. M., Redaelli S.** Estimation of the entropy of the solar wind flow. *Physical Review E*. 2000. Vol. 62, N. 5. P. 6496–6504.
5. **Skokos Ch.** The Lyapunov Characteristic Exponents and Their Computation // *Lect. Notes Phys.* 2010. Vol. 790. P. 63–135.
6. **Gencay R., Dechert W. D.** An algorithm for the n Lyapunov exponents of an n-dimensional unknown dynamical system // *Physica D*. 1992. Vol. 59. P. 142–157.
7. **Takens F.** Detecting strange attractors in turbulence // *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics* /Eds D. A. Rand, L.-S. Young. Berlin: Springer-Verlag, 1980. Vol. 898. P. 366–381.
8. **Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.** Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D*. 1985. N. 16. P. 285–301.
9. **Rosenstein M. T., Collins J. J., De Luca C. J.** A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets Source // *Physica D*. 1993. Vol. 65, Iss. 1-2. P. 117–134.
10. **Беспалов А. В., Поляхов Н. Д.** Сравнительный анализ методов оценки первого показателя Ляпунова // *Современные проблемы науки и образования*. 2016. № 6. 8 с.
11. **Передерий Ю. А.** Метод оценки спектра ляпуновских показателей по временной реализации // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2012. Т. 20, № 1. С. 99–104.
12. **Moskalenko O., Koronovskii A. A., Hramov A. E.** Lyapunov exponent corresponding to enslaved phase dynamics: Estimation from time series // *Physical review E*. 2015. P. 012913.
13. **Cvitanović P., Artuso R., Mainieri R., Tanner G., Vattay G.** *Chaos: Classical and Quantum*. ChaosBook.org version16.0. 2017.
14. **Филатов В. В.** Структурные характеристики аномалий геофизических полей и их использование при прогнозе // *Геофизика, геофизическое приборостроение*. 2013. № 4(16). С. 34–41.
15. **Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.** *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*. М.: Наука, 1966. 576 с.
16. **Москаленко О. И., Павлов А. С.** Способ оценки нулевого условного показателя Ляпунова по временному ряду // *Письма в ЖТФ*. 2014. Т. 40. Вып. 12. С. 66–72.
17. **Karabutov N.** Structural methods of estimation Lyapunov exponents linear dynamic system // *International journal of intelligent systems and applications*. 2015. Vol. 7, N. 10. P. 1–11.
18. **Карабутов Н. Н.** Структуры в задачах идентификации: Построение и анализ. М.: URSS/Ленанд. 2018. 312 с.
19. **Karabutov N.** About structural identifiability of nonlinear dynamic systems under uncertainty // *Global journal of science frontier research: (A) Physics and Space Science*. 2018. Vol. 18, Iss. 11. P. 51–61.
20. **Карабутов Н. Н.** Структурная идентификация статических объектов: Поля, структуры, методы. М.: URSS. 2011. 152 с.
21. **Демидович Б. П.** *Лекции по математической теории устойчивости*. М.: Наука, 1967. 472 с.
22. **Karabutov N.** About Lyapunov exponents identification for systems with periodic coefficients // *International journal of intelligent systems and applications*. 2018. Vol. 10, N. 11. P. 1–10.

Frameworks Application for Estimation of Lyapunov Exponents for Systems with Periodic Coefficients

N. N. Karabutov, kn22@yandex.ru,

MIREA — Russian Technological University, Moscow, MSAWT, 119454, Russian Federation

Corresponding author: Karabutov Nikolay N., DTS, Professor,
MIREA — Russian Technological University, Moscow, 119454, Russian Federation,
e-mail: kn22@yandex.ru

Accepted on October 06, 2019

Abstract

The identification problem of Lyapunov exponents is considered for dynamic systems with periodic coefficients under uncertainty. Indexes identification is based on the analysis of a special class of frameworks describing dynamics of indexes change. The method of frameworks obtaining is described. The adequacy concept of obtained estimations Lyapunov exponents is introduced. The adequacy criterion is based on the analysis of the structure definition domain. The domain which belongs to the set of Lyapunov exponents estimates is determined. The method proposed for the order estimation of the system. The method is based on the properties analysis of almost periodic to Bohr functions and proposed frameworks. The case when lineals for Lyapunov exponents are crossed is considered. WE obtain to an infinite spectrum of Lyapunov exponents. Upper bound for the smallest index and mobility limit for the large index are obtained and the index set of the system is determined. The graphics criteria based on the analysis of framework properties are proposed for the adequacy estimation of obtained indexes. The histogram method is applied to check of estimations set. It is shown that a dynamic system with periodic coefficients can have a set of Lyapunov exponents. The extension of almost periodic functions on Bohr is proposed to the problem solve of Lyapunov exponents evaluation. The system order estimation is obtained on the basis of the framework property analysis.

Keywords: framework, nonlinear dynamic system, phase portrait, structural identification, nonlinearity, synchronizability, almost periodic function on Bohr For citation:

Karabutov N. N. Frameworks Application for Estimation of Lyapunov Exponents for Systems with Periodic Coefficients, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 1, pp. 3–13.

DOI: 10.17587/mau.21.3-13

References

1. **Thamilmaran K., Senthilkumar D. V., Venkatesan A., Lakshmanan M.** Experimental realization of strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced electronic circuit, *Physical Review E.*, 2006, vol. 74, no. 9, pp. 036205.
2. **Porcher R., Thomas G.** Estimating Lyapunov exponents in biomedical time series. *Physical Review E.*, 2001, vol. 64, no. 1, pp. 010902(R).
3. **Holyst J. A., Urbanowicz K.** Chaos control in economical model by time-delayed feedback method. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2000, vol. 287, no. 3–4, pp. 587–598.
4. **Macek W. M., Redaelli S.** Estimation of the entropy of the solar wind flow, *Physical Review E.*, 2000, vol. 62, no. 5, pp. 6496–6504.
5. **Skokos Ch.** The Lyapunov Characteristic Exponents and Their Computation, *Lect. Notes Phys.*, 2010, vol. 790, pp. 63–135.
6. **Gencay R., Dechert W. D.** An algorithm for the n Lyapunov exponents of an n -dimensional unknown dynamical system, *Physica D.*, 1992, vol. 59, pp. 142–157.
7. **Takens F.** Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics*, Eds D. A. Rand, L.-S. Young. Berlin, Springer-Verlag, 1980, vol. 898, pp. 366–381.
8. **Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.** Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica 16D*, 1985, no. 16, pp. 285–301.
9. **Rosenstein M. T., Collins J. J., De Luca C. J.** A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets Source, *Physica D.*, 1993, vol. 65, iss. 1–2, pp. 117–134.
10. **Bespalov A. V., Polyakhov N. D.** Comparative analysis of methods for estimating the first Lyapunov exponent, *Modern problems of science and education*, 2016, no. 6, 8 p. (in Russian).
11. **Perederiy Y. A.** Method for calculation of lyapunov exponents spectrum from data series, *Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics*, 2012, iss. 20, no. 1, pp. 99–104 (in Russian).
12. **Moskalenko O., Koronovskii A. A., Hramov A. E.** Lyapunov exponent corresponding to enslaved phase dynamics: Estimation from time series, *Physical review E* 92, 2015, pp. 012913.
13. **Cvitanović P., Artuso R., Mainieri R., Tanner G., Vattay G.** *Chaos: Classical and Quantum*. ChaosBook.org version 16.0. 2017.
14. **Filatov V. V.** Structural characteristics of geophysical fields anomalies and their use in forecasting, *Geophysics*, 2013, no. 4(16), pp. 34–41.
15. **Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. M., Nemytsky V. V.** *Theory of Lyapunov indexes and its application to stability problems*, Moscow, Nauka, 1966 (in Russian).
16. **Moskalenko O., Pavlov A. S.** A method of evaluating zero conditional Lyapunov exponent time serie, *Pis'ma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*, 2014, vol. 40, no. 12, pp. 66–72.
17. **Karabutov N.** Structural methods of estimation Lyapunov exponents linear dynamic system, *International journal of intelligent systems and applications*, 2015, vol. 7, no. 10, pp. 1–11.
18. **Karabutov N.** *Frameworks in identification problems: Design and analysis*, Moscow, URSS/Lenand, 2018, 306 p. (in Russian).
19. **Karabutov N.** About structural identifiability of nonlinear dynamic systems under uncertainty, *Global journal of science frontier research: (A) Physics and Space Science*, 2018, vol. 18, iss. 11, pp. 51–61.
20. **Karabutov N. N.** *Structural identification of static objects: Fields, frameworks, methods*, Moscow, URSS/Lenand, 2011, 152 p. (in Russian).
21. **Demidovich B. P.** *Lektion on mathematical stability theory*, Moscow, Nauka, 1967.
22. **Karabutov N.** About Lyapunov exponents identification for systems with periodic coefficients, *International journal of intelligent systems and applications*, 2018, vol. 10, no. 11, pp. 1–10.