

А. С. Девятисильный, д-р техн. наук, проф., devyatis@iacp.dvo.ru,

А. В. Шурыгин, мл. науч. сотр., artem.shurygin@bunjlabs.com,

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН

Модель гибридной спутниково-инерциальной навигационной системы неполной структуры

Представлена и исследована математическая модель гибридной навигационной системы (ГНС), состоящая из трехкомпонентного блока линейных ньютонометров, физически моделирующих векторный измеритель сил негравитационной природы, и бортовых приемников ГЛОНАСС, позиционирующих подвижный объект в эллипсоидальной системе координат. Отсутствие блока гироскопических датчиков угловых скоростей, традиционных для классических схем метода инерциальной навигации, и наличие не более двух бортовых устройств спутникового позиционирования (приемников) позволяет характеризовать рассматриваемую ГНС как систему неполной структуры. В качестве базового элемента математической модели задачи оценки линейных и угловых параметров движения объекта использована разработанная процедура многократного численного дифференцирования темпоральных данных спутникового позиционирования бортовых приемников ГЛОНАСС, устойчиво функционирующая независимо от шага дискретизации задачи по времени. Разработанная ГНС позволяет качественно оценивать траекторные параметры — местоположение, скорости, ускорения, рыбки и силы, обуславливающие траекторию, а также (при двухпозиционном приеме) и параметры пространственной ориентации объекта — углы Эйлера—Крылова и их производные. Приведены результаты вычислительного эксперимента. Область применения результатов исследования — численно-аналитическое планирование траекторий, определение параметров движения и управление подвижными объектами различного назначения и базирования.

Ключевые слова: метод инерциальной навигации, ГЛОНАСС, траектория, углы Эйлера—Крылова, ньютонометр, гироскоп, кажущееся ускорение, угловая скорость, эллипсоидальная система координат

Введение

Как известно [1, 2], классические представления об инерциальной (галлилеевой) системе отсчета, в которой выполняются законы динамики Ньютона, наиболее ярко проявляют себя в методе инерциальной навигации (ИНМ) — методе автономного определения кинематических параметров движения (как траекторных, так и пространственной ориентации) объекта по информации о нем, доставляемой инерциальными измерителями — ньютонометрами (акселерометрами) и гироскопами. Вместе с тем свойственная этому методу неустойчивость, обнаруживаемая при аналитических и численных исследованиях и верифицированная практикой создания автономных инерциальных навигационных систем, обуславливает необходимость нарушения его автономности и пополнения информационной базы метода наблюдения (измерениями) неинерциальной природы.

В данной работе рассмотрен вариант генерации гибридной навигационной системы (ГНС)

в случае, когда ее информационная база ограничена и представлена только измерениями вектора удельных сил негравитационной природы, или кажущегося ускорения [1], доставляемых ньютонометрами [2], и темпоральными данными о координатах места подвижного объекта (ПО), доставляемых не более чем двумя приемниками навигационной спутниковой системы (НСС) типа ГЛОНАСС/GPS. Область применения методологии таких ГНС — численно-аналитическое планирование маршрутных заданий, бортовое определение параметров движения и управление ПО различного назначения и базирования (сухопутного, морского, воздушного, космического).

Под "определением движения" здесь понимается решение двух задач — это, во-первых, определение кинематических параметров траектории (траекторная задача) и, во-вторых, определение параметров ориентации ПО в пространстве (задача ориентации).

Предлагаемая ГНС отличается от известных интегрированных инерциально-спутниковых

систем [3–5] отсутствием в ней гироскопических измерителей абсолютной угловой скорости вращения ПО и методологией математического моделирования и решения обеих задач.

Основные модельные представления

Принимая во внимание форму геоида, в качестве его признанной опорной модели примем эллипсоид вращения (эллипсоид Клеро) [2, 3]. В соответствии с этим и с учетом стандартов ПЗ-90 (Россия) и WGS-89 (США) известным образом введем эллипсоидальную (геодезическую) систему отсчета с координатами $\{\varphi, \lambda, h\}$ — геодезические широта, долгота и высота над поверхностью эллипсоида.

В точке O , принадлежащей траектории и отождествляемой с ПО, разместим начало правого прямоугольного координатного трехгранника $Ox = Ox_1x_2x_3$ с осью Ox_3 , направленной по нормали к поверхности эллипсоида, и осями Ox_1 и Ox_2 , ориентированными соответственно на географические Восток и Север.

Траекторная задача. Обратимся теперь к кинематике, или к "геометрии движения" [1], точки O и обозначим $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ вектор ее линейной скорости движения относительно твердой Земли, а $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ — вектор угловой скорости вращения трехгранника Ox , обусловленной криволинейностью траектории. Оба вектора рассматриваются в проекциях на оси Ox . Между координатами $\{\varphi, \lambda, h\}$ и скоростями достаточно просто установить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\dot{\varphi}, \quad \omega_2 = \dot{\lambda} \cos \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\lambda} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{v_2}{r_2}, \quad \dot{\lambda} = \frac{v_1}{r_1 \cos \varphi}, \quad v_3 = \dot{h}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $r_1 = a/(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} + h$, $r_2 = a(1 - e^2)/(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} + h$ — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных главных нормалей сечений поверхности $h = \text{const}$, проходящих через оси Ox_1 (сечение, касательное к параллели) и Ox_2 (меридиальное сечение); a и e — значения большой полуоси и эксцентриситета используемой модели земного эллипсоида; $r_\psi = (r_1^{-1} \sin^2 \psi + r_2^{-1} \cos^2 \psi)^{-1}$ — радиус кривизны нормального сечения эллипсоида при $h = \text{const}$ в точке O , проходящего через вектор-проекцию \mathbf{v}_p вектора \mathbf{v} на плоскость Oy_1y_2 [2];

ψ — путевой угол движения, отсчитываемый по ходу часовой стрелки от оси Oy_2 к оси Oy_1 , так что $v_1 = v_p \sin \psi$, $v_2 = v_p \cos \psi$, $v_p = |\mathbf{v}_p|$.

Под решением траекторной задачи далее понимается решение задачи оценки значений параметров $\varphi, \lambda, h, r_1, r_2, r_\psi, v_1, v_2, v_3$ и т. д. и их производных до порядка $n - 1$. При этом математическая модель такой общей задачи рассматривается как совокупность моделей частных обратных задач вида "состояния—измерения" порядка n , где каждая из частных моделей ассоциируется с некоторой функцией времени $\eta(t)$, аппроксимируемой моделью "состояний" вида $\eta(t) = \eta_1, \dot{\eta}_1 = \dot{\eta}_2 = \dots = \dot{\eta}_n = 0$ по ее темпорально измеряемым с инструментальными погрешностями значениями $\eta(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots; t_{k+1} = t_k + \tau, \tau = \text{const}$. Как видно, каждая частная модель "состояний" — это система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с простейшей одноклеточной жордановой (с нулевыми диагональными элементами) матрицей [6] в качестве матрицы связи, имеющей индекс нильпотентности, равный n . Естественное обращение к такой модели существенно упростило дискретизацию задачи по времени и реализацию нейросетевого алгоритма динамического псевдообращения [7, 8] калмановского типа с ядерным механизмом настройки [8] на фоне преодоления проблемы разрешимости задачи при больших значениях n и малых τ в условиях конечной точности вычислений и измерений [9].

Полагая далее, что траекторная задача решена [9], обратимся к динамике теперь уже материализованной точки O , т. е. к уравнениям Ньютона, которые с учетом вращения Земли с угловой скоростью $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ в осях трехгранника Ox представимы в следующем виде:

$$D_{ij}V_j = g_i + f_j, \quad V_j(0) = V_{0,i}, \quad (2)$$

где $D_{ij} = \delta_{ij}d/dt + e_{ikj}(\omega_k + u_k)$ — оператор абсолютной производной; δ_{ij} — символ Кронекера; e_{ikj} — символ Леви—Чивита ($i, k, j = \overline{1, 3}$; по повторяющимся индексам проводится суммирование); $u = |\mathbf{u}|$, $u_1 = 0$, $u_2 = u \cos \varphi$, $u_3 = u \sin \varphi$; $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)^T$ — вектор абсолютной скорости, причем $V_1 = v_1 + u_2 r_1$, $V_2 = v_2$, $V_3 = v_3$; $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ — вектор кажущегося ускорения; $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)^T$ — напряженность гравитационного поля Земли (ГПЗ), известного с достаточной точностью.

Разрешая уравнение (2) относительно \mathbf{f} покомпонентно и принимая во внимание (1), получаем:

$$\begin{aligned} f_1 &= \dot{v}_1 + \frac{v_1}{r_1}(v_3 - v_2 \operatorname{tg} \varphi) - v_2 u_3 \left(\frac{r_1}{r_2} + 1 \right) + \\ &+ v_3 u_2 + u_2 \dot{r}_1 - g_1; \\ f_2 &= \dot{v}_2 + \frac{v_1^2}{r_1} \operatorname{tg} \varphi + \frac{v_2 u_3}{r_2} + 2v_1 u_3 + u_2 u_3 r_1 - g_2; \\ f_3 &= \dot{v}_3 - \frac{v_1^2}{r_1} + \frac{v_2^2}{r_2} - 2v_1 u_2 - u_2^2 r_1 - g_3. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом того, что все значения переменных в правой части (3) известны благодаря интерпретации данных спутникового позиционирования ПО, т. е. при решении траекторной задачи [9], вектор \mathbf{f} также может быть вычислен. Таким образом, устанавливается и каузальность траектории, что существенно для дальнейших построений.

Задача ориентации. Введем жестко связанный с ПО правый координатный трехгранник, в осях которого могут проводиться векторные измерения, — приборный трехгранник $Oy = Oy_1 Oy_2 Oy_3$, в идеале совпадающий с трехгранником Ox , но реально связанный с ним матрицей ориентации $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $(i, j = \overline{1,3})$, так что $y_i = a_{ij}x_j$ и $x_j = a_{ji}y_i$. Суть задачи определения ориентации ПО в физическом пространстве состоит в оценке элементов матрицы \mathbf{A} и, как следствие, значений трех углов последовательного вращения трехгранника Oy из состояния $Oy \equiv Ox$ в текущее состояние. Учитывая, что под ПО здесь понимается объект искусственного происхождения, целесообразно считать, что оси трехгранника Oy совпадают со строительными осями ПО, и ввести углы Эйлера—Крылова — углы курса (α), крена (β) и тангажа (θ), соответствующие последовательности парциальных вращений относительно осей Oy_3, Oy_2, Oy_1 .

Для определения значений девяти элементов (направляющих косинусов) матрицы \mathbf{A} (или трех углов Эйлера—Крылова), вообще говоря, достаточно найти систему двух неколлинеарных векторов, известных своими проекциями как в Ox , так и в Oy . В качестве таких двух векторов могут быть взяты орты известных звезд, пульсаров или иных объектов. Корректность решения проблемы в таком случае обуславливается возможностью пополнения системы двух векторов третьим, образуемым вектор-

ным произведением известных двух, и, таким образом, линейной независимостью этих трех векторов; в предельном случае, когда наблюдению в Ox и Oy доступен только один вектор, определить ориентацию Oy относительно Ox можно только с точностью до поворота Oy относительно Ox вокруг этого единственного вектора как оси.

Возможность вычисления \mathbf{f} , демонстрируемая системой уравнений (3), обращает внимание на методологически другую возможность — это непосредственное измерение проекций \mathbf{f} в трехграннике Oy с помощью тройки линейных ньютометров; таким образом, решается проблема выбора первого из двух требуемых векторов. Однако важно отметить, что, оставаясь в рамках анонсируемой в настоящей работе задачи комплексирования измерений геодезических координат места объекта с помощью НСС и измерений ньютометров, строго решить проблему и второго вектора также можно, но только в случае двух- (и более) позиционного бортового приема данных НСС. Вместе с тем, как показывают вычислительные эксперименты, и при однопозиционном приеме возможны вполне допустимые приближенные оценки углов, если отождествлять угол α с путевым углом ψ в рамках псевдоизмерения $\alpha = -\psi + \delta\alpha$, когда $\delta\alpha$ выступает в качестве небольшой методологической погрешности, обусловленной взаимодействием ПО с внешней средой. В таком случае методом последовательных приближений достаточно просто и в пределах шага дискретизации τ численно решается система уравнений $\mathbf{f}_y = \mathbf{A}\mathbf{f}$, где \mathbf{f}_y — вектор силы \mathbf{f} , измеряемой ньютометрами, т. е. задача точечного оценивания углов β и θ .

Подобным же образом вычисляется и вся тройка углов Эйлера—Крылова, т. е. $\{\alpha, \beta, \theta\}$, и дополнительно угол курсового дрейфа $\delta\alpha = \psi - \alpha$, если на борту ПО осуществляется двухпозиционный прием спутниковой навигационной информации и решается система уравнений $\{\mathbf{f}_y = \mathbf{A}\mathbf{f}, \mathbf{l}_y = \mathbf{A}\mathbf{l}\}$, где \mathbf{l}_y — технологический (известный) вектор места второго приемника НСС в Oy , а \mathbf{l} — этот же вектор в Ox , вычисляемый по данным его позиционирования НСС. Здесь же оценивается необходимое число производных углов α, β, θ и, таким образом, реализуется возможность оценки в трехграннике Oy вектора угловой скорости собственного вращения $\mathbf{q}_y = (q_{y,1}, q_{y,2}, q_{y,3})^T$,

где $q_{y,1} = \dot{\theta} + \dot{\alpha} \sin \beta$, $q_{y,2} = \dot{\beta} \cos \theta + \dot{\alpha} \sin \theta \cos \beta$, $q_{y,3} = \dot{\alpha} \cos \theta \sin \beta - \dot{\beta} \sin \theta$. Очевидно, возможен и отказ от исходной декларируемой бортовой системы измерителей и пополнение ее, например, астровизирами известных звезд или пульсаров.

В общем случае, если вектор \mathbf{q}_y определен, то открывается возможность и для оценки абсолютной угловой скорости ПО $\mathbf{p}_y = (p_{y,1}, p_{y,2}, p_{y,3})^T$ в проекциях на оси Oy , а именно: $\mathbf{p}_y = \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{u})_x + \mathbf{q}_y$, где индекс "x" указывает на то, что вектор $\boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}$ представлен своими проекциями в трехграннике Ox . Таким образом, по сути, реализуется безгироскопный датчик угловых скоростей, что с учетом возможности качественного дифференцирования вектора \mathbf{p}_y открывает путь для оценки главного момента сил — вектора \mathbf{m}_y , обуславливающего совместно с вектором \mathbf{f} движение реального ПО. Действительно, $m_{y,i} = J_{ij} \dot{p}_{y,j} + (e_{ikj} p_{y,k}) J_{js} p_{y,s}$, где $\mathbf{J} = (J_{js})$ — известный тензор инерции ПО, $i, j, k, s = \overline{1,3}$. Эта процедура занимает важное место при численно-аналитическом планировании управляемого движения ПО по задан-

ной траектории в условиях его взаимодействия с реальной средой как тела, имеющего конкретные масс-геометрические характеристики.

Вычислительные эксперименты

Численная верификация теоретических представлений, изложенных выше, выполнена для ПО с различными масс-геометрическими характеристиками и параметрами движения. В качестве примера здесь приведены результаты численного моделирования для ПО с массой $m = 1500$ кг и тензором инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(J_{11}, J_{22}, J_{33})$, $J_{11} = J_{33} = 3,8 \cdot 10^3$ кг·м², $J_{22} = 52,9$ кг·м², движущегося со скоростью $v = 247,5$ м/с (0,75М, М = 330 м/с²) по траектории, представленной на рис. 1. Предполагается, что данные позиционирования ГЛОНАСС поступают с шагом $\tau = 0,2$ с, содержат погрешности со среднеквадратическими значениями (СКЗ) $\sigma_\varphi = \sigma_\lambda = \sigma_h = 1,5$ м и временами корреляции $\tau_c = 4$ с; СКЗ погрешностей оценивания — $\sigma_\varphi = 4,9$ м, $\sigma_\lambda = 4,8$ м, $\sigma_h = 0,01$ м. На рис. 2, а представлено оценки удельных сил, выполненные по формулам (3); СКЗ погрешностей оценивания — $\sigma_{f_1} = \sigma_{f_2} = 0,0038$ м/с², $\sigma_{f_3} = 9,8556 \cdot 10^{-6}$ м/с². На рис. 2, б представлены оценки углов α, β, θ ; СКЗ погрешностей оценок — $\sigma_\alpha = 0,0015^\circ$, $\sigma_\beta = 0,0212^\circ$, $\sigma_\theta = 0,0231^\circ$. При этом погрешности шумов ньютометров характеризуются СКЗ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,01$ м/с² и временем корреляции $\tau_c = 1,5$ с; место второго приемника НСС в Oy — $y = (0,4 \text{ м}, 0)^T$. На рис. 3 пред-

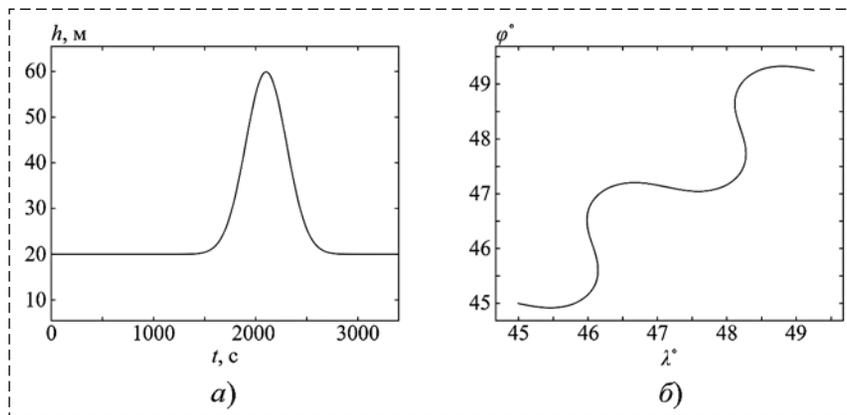


Рис. 1. Элементы траектории движения: высота (а), широта и долгота (б)
Fig. 1. Trajectory elements: height (a), latitude and longitude (b)

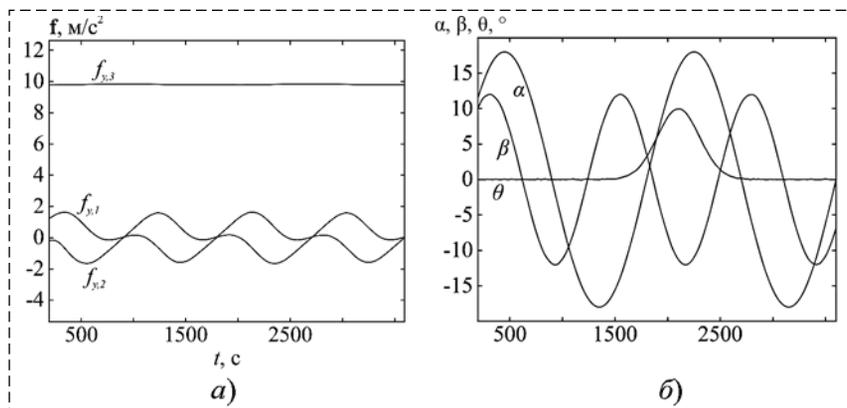


Рис. 2. Оценки удельных сил (а) и углов Эйлера—Крылова (б)
Fig. 2. Estimates of specific forces (a) and Euler—Krylov angles (b)

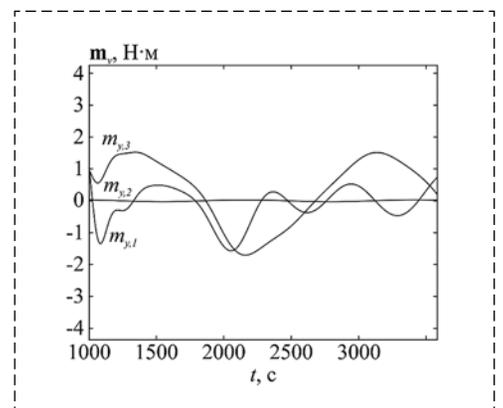


Рис. 3. Оценки моментов сил
Fig. 3. Torque estimations

ставлены моменты сил, обуславливающих вращение ПО; СКЗ погрешностей оценивания — $\sigma_{m_1} = 0,0123 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $\sigma_{m_2} = 1,7012 \cdot 10^{-4} \text{ Н}\cdot\text{м}$, $\sigma_{m_3} = 3,2007 \cdot 10^{-4} \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе, в значительной степени базирующейся на результатах предшествующей ей работы авторов [9], показано, что при комплексировании бортовой навигационной системы двумя датчиками позиционирования ГЛОНАСС и трехкомпонентным блоком ньютометров вполне достижима высококачественная оценка всех кинематических параметров движения, а также сил и моментов, его обеспечивающих.

Список литературы

1. **Ишлинский А. Ю.** Классическая механика и силы инерции. М.: Едиториал УРСС, 2018. 320 с.
2. **Андреев В. Д.** Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967. 648 с.
3. **Перов А. И., Харисов В. Н.** ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования. М.: Радиотехника, 2010. 800 с.
4. **Groves P.** Challenges of Integrated Navigation // Proceedings of the 31st International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation. Miami. 2018. P. 3237–3264.5.
5. **Mahboub D., Mohammadi A.** A Constrained Total Extended Kalman Filter for Integrated Navigation // The Journal of Navigation. 2018, vol. 71 (4). P. 971–988.
6. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 656 с.
7. **Осипов Ю. С., Кряжемский А. В.** Задачи динамического обращения // Вестник РАН. 2006. Т. 76. С. 615–624.
8. **Девятисильный А. С.** Нейроморфное расширение бортовых функций ГЛОНАСС для подвижной технологической платформы // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. № 10. С. 5–8.
9. **Девятисильный А. С., Шурыгин А. В., Стоценко А. К.** Аналитическое конструирование и численное исследование моделей определения движения на данных ГЛОНАСС // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18. № 11. С. 782–787.

Model of Hybrid Satellite-Inertial Navigation System with Partial Structure

A. S. Devyatisilny, devyatis@dvo.ru, A. V. Shurygin, artem.shurygin@bunjlabs.com,

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, 690041, Russian Federation

Corresponding author: **Devyatisilny Aleksandr S.**, PhD, Professor

Head of the Navigation and Control Department, Institute of Automation and Control Processes, Far eastern Branch of RAS, Vladivostok, 690041, Russian Federation, e-mail: devyatis@dvo.ru

Accepted on August 07, 2019

Abstract

A mathematical model of a hybrid navigation system (GNS) consisting of a three-component block of linear newtonometers (accelerometers) physically simulating a vector-based measurer of non-gravitational nature forces and on-board GLONASS receivers that positioning a moving object in an ellipsoidal coordinate system is presented and investigated. The absence of a gyroscopic angular velocity sensors unit, traditional for the classical schemes of the inertial navigation method, and the presence of no more than two onboard satellite positioning devices (receivers) make it possible to characterize the considered GNS as a partial structure system. As a basic element of a mathematical model for estimating linear and angular parameters of an object's motion, the developed procedure of multiple numerical differentiation of temporal data acquired from on-board satellite receivers, which functions stably irrespective of the magnitude of the discretization step of the problem in time, was used. The developed GNS makes it possible to qualitatively evaluate both the trajectory parameters (location, velocity, acceleration and forces causing the trajectory) as well as the parameters of the spatial orientation of the object (Euler-Krylov angles and its derivatives) with a two-positioning technique. The results of the computational experiment are given. The field of application of the research results is numerical-analytical planning of trajectories, determination of motion parameters and control of moving objects for various purposes and basing.

Keywords: inertial navigation, GLONASS, trajectory, speed, estimation, Euler-Krylov angles, newtonometer, gyro, apparent acceleration, angular velocity, ellipsoidal coordinate system

For citation:

Devyatisilny A. S., Shurygin A. V. Model of Hybrid Satellite-Inertial Navigation System with Partial Structure, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 12, pp. 751–755.

DOI: 10.17587/mau.20.751-755

References

1. **Ishlinskij A. Ju.** Classical mechanics and inertial forces, Moscow, Editorial, URSS. 2018. 320 p. (in Russian).
2. **Andreev V. D.** The theory of inertial navigation. Correctable systems, Moscow, Nauka, 1967, 648 p. (in Russian).
3. **Perov A. I., Harisov V. N.** GLONASS. Principles of construction and operation, Moscow, Radiotekhnika, 2005, 688 p. (in Russian).
4. **Groves P.** Challenges of Integrated Navigation. Proceedings of the 31st International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation. Miami, 2018, pp. 3237–3264.5.
5. **Mahboub D., Mohammadi A.** Constrained Total Extended Kalman Filter for Integrated Navigation, *The Journal of Navigation*, 2018, vol. 71 (4), pp. 971–988.
6. **Horn R., Johnson Ch.** Matrix analysis, Moscow, Mir, 1989, 656 p. (in Russian).
7. **Osipov Ju. S., Krjazhenskij A. V.** *Vestnik RAN*, 2006, vol. 76, pp. 615–624 (in Russian).
8. **Devyatisil'nyj A. S.** *Journal of technical physics*, 2015, vol. 85, no. 10, pp. 5–8 (in Russian).
9. **Devyatisilny A. S., Shurygin A. V., Stotsenko A. K.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no.11, pp. 782–787 (in Russian).