

И. Ш. Насибуллаев, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр., sp.ishn@gmail.com,

Э. Ш. Насибуллаева, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., elvira@anrb.ru,

О. В. Даринцев, д-р техн. наук, гл. науч. сотр., ovd@uimech.org,

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова — обособленное структурное подразделение

Федерального государственного бюджетного научного учреждения

Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, г. Уфа

Моделирование течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом эластичный микроканал системы охлаждения микрозахвата¹

Проведено численное моделирование течения рабочей жидкости в эластичном цилиндрическом микроканале, центральная часть которого расположена внутри пьезоэлектрического кольца. Течение индуцируется как деформацией канала пьезоэлементом по гармоническому закону, так и перепадом давления на входе и выходе в микроканал. Целью работы является создание трехмерной компьютерной модели управления режимом течения жидкости с помощью перепада давления и сжатия трубки пьезоэлементом. Полное численное моделирование требует больших затрат машинного времени, поэтому целесообразно построить модель элемента вычислительного стенда, которая позволяет по заданным входным параметрам найти расход жидкости с помощью простых аналитических формул на основе аппроксимации результатов расчета по полной модели для отдельных наборов параметров. Моделирование элемента вычислительного стенда дает возможность проводить вычисления в реальном времени с непосредственной интеграцией в систему управления технического устройства. Модель строится на основе полученных аналитических зависимостей с учетом введенных ограничений, что значительно сокращает объемы вычислений и повышает качество полученного результата. Решение полных уравнений упругости для трубки и уравнений гидродинамики в микроканале проводилось численно методом конечных элементов в пакете численного моделирования FreeFem++. Получены численные результаты расхода жидкости в зависимости от времени, физических свойств жидкости (динамической вязкости и плотности) и внешнего воздействия (градиента давления, амплитуды и частоты сжатия пьезоэлемента). Показаны варианты использования полученных результатов в практических приложениях. Например, в системе жидкостного охлаждения полученное соотношение между параметрами системы позволяет определить режим течения, предотвращающий втекание нагретой жидкости через выходное отверстие канала. Результаты планируется использовать при разработке вычислительного стенда капиллярного микрозахвата, содержащего две трубки (на входе и выходе) с пьезоэлементами, разделив устройство на две части — с динамически изменяемой и неизменной геометриями, — что значительно упростит полное численное моделирование.

Ключевые слова: микроробототехника, микронасадка, гидродинамика, эластичный микроканал, пьезоэлемент, линейная упругость, метод конечных элементов

Введение

В последнее время интенсивно развивается новое направление в гидродинамике — микрогидродинамика, которая описывает поведение сверхмалых объемов и потоков жидкостей в каналах с размерами, не превышающими сотни микрометров. В качестве областей применения чаще всего рассматриваются молекулярная биология, *in vitro* системы диагностики, лаборатория-на-чипе (англ. *lab-on-the-chip*), устройства регулирования микропотоков, капельные системы. При этом применяемые методики расчета получены эмпирическим путем и достаточно грубы,

поскольку в микросистемах, в первую очередь, принято учитывать возросшее влияние свойств поверхности канала, требования к которым зависят от способа и области применения микрофлюидной техники. Кроме того, в данных методиках гипотетически предполагаются малая шероховатость и однородность микроканала на всем протяжении, что гарантирует ламинарный характер течения жидкости. Однако, например, для задач интенсивного перемешивания растворов необходимо обеспечить турбулентное течение, т. е. внутренняя поверхность должна быть более "грубой".

В известных системах [1, 2] в основном рассматривается формирование потоков или капель в микроканалах с использованием шприцевых дозаторов с электроприводом, диффузных систем и других механизмов, имеющих нелинейную выходную характеристику. В связи с этим актуальной представляется разработка теоре-

¹Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 "Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники".

тического обоснования возможности создания приводов, использующих прямые преобразователи рода энергии, например, пьезоп приводы. Пьезоп привод имеет линейную механическую характеристику, что позволяет получить необходимый вид (линейный или изгибной) микроперемещения без дополнительных устройств. Диапазон этих перемещений (от десятка мкм до долей нм) сравним с требуемыми объемами перемещаемой жидкости за цикл, измеряемыми в пл. Усилий, развиваемых пьезоп приводом, достаточно для деформации толстостенных каналов, выполненных из упругих материалов.

К конструкции микрозахватов и микроприводов предъявляются жесткие требования по точности как абсолютной, так и при многократном повторении движений, линейности механической характеристики, минимизации воздействий на микрообъекты для полного исключения деформаций и паразитных эффектов контактной электрификации. Поэтому в ведущих лабораториях проводятся исследования и синтезируются специфические конструкции микророботов и микрооснастки, основанные на оригинальном использовании известных физических эффектов: поверхностного натяжения [3], межмолекулярного взаимодействия, силы Ван-дер-Ваальса [4], ультразвукового воздействия [5] и оптических эффектов [6]. Как видно из отмеченных выше публикаций, большая часть усилий направлена на разработку новых типов микроустройств, исключаящих непосредственный контакт микрооснастки с захватываемыми или удерживаемыми микрообъектами. Авторы считают, что более широкое использование гидромеханики в микроустройствах способно решить значительную часть проблем микромира, но это требует хорошей модельной и экспериментальной проработок ввиду исключительных требований к точности и погрешности перемещений, перемещаемых объемов жидкости и т. д. Использование жидкостей в микроустройствах также требует обязательного учета специфики работы микрооснастки или микророботов, связанной с влиянием масштабного фактора и определяемой значительным влиянием поверхностных, адгезионных, эффектов в "микромире". При этом при разработке сложных технических устройств полное моделирование микросистем является трудоемкой задачей, поскольку даже реализация упрощенных моделей требует значительного количества вычислительных

ресурсов. В связи с этим моделирование всего устройства целесообразно заменить вычислительным стендом системы связанных элементов, так как это позволит выявить особенности работы каждого элемента в параметрической области с учетом работы остальных элементов и построить простые аналитические зависимости, позволяющие с определенной точностью заменить полное численное моделирование.

Компьютерное моделирование течения жидкости в микроканалах, индуцированное внешним воздействием (например, перепадом давления на входе и выходе в микроканал, поступательным движением границы или деформацией канала), в последнее время активно развивается. Например, авторами настоящей работы разработаны компьютерные модели, которые могут быть использованы в качестве элемента вычислительного стенда (ЭВС), для одного элемента технического устройства — гидродинамического сопротивления. В работе [7] описана модель стационарного течения жидкости через цилиндрическое гидросопротивление с учетом перепада давления, радиуса проходного отверстия гидросопротивления и зависимости материала жидкости от температуры (во всей рабочей области температур). В работе [8] изучалось течение жидкости через систему трех элементов. В этих исследованиях геометрия канала была фиксированной.

В работе [9] исследовалось течение жидкости в плоском канале с гидросопротивлением для двух случаев динамического изменения геометрии канала: поперечное сжатие проходного отверстия гидросопротивления, когда течение вызывается приложенным к слою перепадом давления, и продольное движение гидросопротивления вдоль канала, когда течение вызывается этим движением. Полученные результаты показывают, что динамическое изменение геометрии канала позволяет регулировать расход жидкости. В работе [10] проведено трехмерное моделирование течения жидкости через трубку, деформируемую пьезоэлементом по гармоническому закону. Деформации задавались либо граничными условиями Дирихле (когда задано перемещение на поверхности контакта трубки и пьезоэлемента), либо Неймана (когда задано внешнее давление на поверхности контакта). Показано, что подбором давления пьезоэлемента на внешнюю часть трубки можно получить такую же деформацию внутренней части трубки, как и при задании

перемещения поверхности контакта внутрь на определенную величину (зависимость является линейной), что означает взаимозаменяемость рассматриваемых граничных условий. Данная замена может потребоваться при моделировании системы пьезоэлементов, когда согласование граничных условий Дирихле на соседних пьезоэлементах является сложным, в то время как для граничных условий Неймана проблем в согласовании нет. Также в данной работе изучены два режима течения жидкости в деформированной трубке: вход трубки закрыт, течение индуцируется деформацией трубки; оба конца открыты, течение индуцируется как деформацией трубки, так и приложенным к слою перепадом давления. Первый режим позволяет провести тестирование компьютерной модели, а второй — предложить механизм дозирования жидкости, управляемый двумя параметрами: частотой сжатия пьезоэлемента и перепадом давления.

В настоящей работе представлена методика построения ЭВС в виде аналитической формулы на основе трехмерного моделирования течения жидкости через эластичный микроканал, деформируемый пьезоэлементом по гармоническому закону, а также предложены варианты использования полученных результатов в практических приложениях. Целью настоящей работы является создание трехмерной компьютерной модели управления режимом течения жидкости, индуцированным приложенным вдоль канала перепадом давления и частотой сжатия трубки пьезоэлементом. Данная модель значительно сократит объемы вычислений и позволит применять ее в системе управления техническим устройством в реальном времени.

Постановка задачи и основные уравнения

При проведении синтеза новой конструкции капиллярного микрозахвата, отличающегося от первого опытного образца (рис. 1, а) [11] значительно меньшими размерами и, соответственно, более быстродействующего, возник целый ряд проблем технического и научного характера. Наиболее значимой из них является реализация эффективной и малогабаритной системы отвода теплоты от основного

элемента захвата — термоэлектрического модуля (элемента Пельтье), что потребовало постановки и решения новых, как технических, так и теоретических (модельных) задач. Если в изначальной конструкции для отвода теплоты использовался радиатор с установленным на нем вентилятором, то при уменьшении размеров такое решение не представляется, во-первых, эффективным, во-вторых, реализуемым при сохранении габаритных размеров и, в-третьих, не оказывающим влияние на захватываемые микрообъекты. Поэтому было принято решение использовать другой тип — жидкостное охлаждение (рис. 1, б).

В новом варианте конструкции захвата используется модуль на элементах Пельтье ТВ-7-0.6-0.8 размером $4,3 \times 4,3 \times 2,55$ мм и максимальной холодильной мощностью 1,1 Вт, что значительно меньше термоэлемента, используемого в первом варианте конструкции ТВ-127-1,4-2,5 размером $40 \times 40 \times 4,8$ мм и мощностью 37,4 Вт. Так как быстродействие захвата напрямую зависит от скорости охлаждения или нагрева рабочей поверхности, то использование классического воздушного радиатора приводит к снижению эффективности работы, но использование жидкостной схемы также требует проведения дополнительных исследований в силу целого ряда причин. В частности, трубки, соединяющие захват и емкость с охлаждающей жидкостью, имеют малые размеры (внешний диаметр не более 3,5 мм, радиус канала не более 1 мм), что, с учетом незначительных расходов охлаждающей жидкости, требует специфических расчетов. Если в полученном варианте конструкции захвата еще возможно использование классических конструкций мини-насосов, обеспечивающих

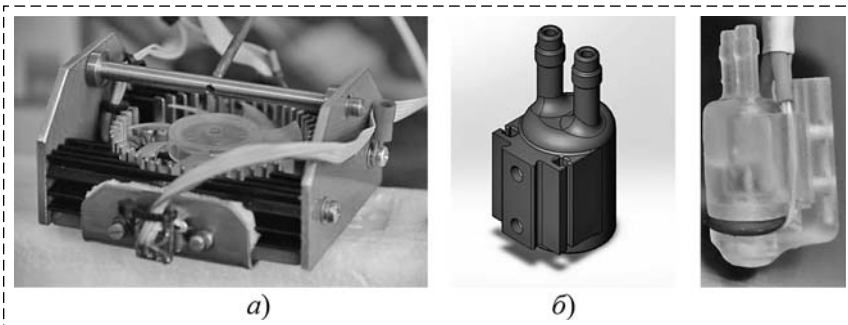


Рис. 1. Капиллярный захват:

а — экспериментальный образец; б — уменьшенный вариант (3D-модель и сборка)

Fig. 1. The capillary gripper:

а — experimental sample; б — smaller gripper (3D model and device)

требуемые скорости течения жидкости через систему охлаждения с многократным запасом, то при дальнейшем уменьшении габаритных размеров и сокращении секундного расхода (менее 1 мл/с) требуется проведение расчетов с новыми моделями, более полно учитывающими специфику гидродинамики микроканалов и позволяющими построить эффективные устройства, обеспечивающие сверхмалые объемы расхода жидкости.

В связи с вышеизложенным в настоящей работе рассматривается трехмерное течение жидкости через упругую трубку с внутренним R_1 и внешним R_2 радиусами и длиной L , центральная часть которой расположена внутри пьезоэлемента длины ℓ . На рис. 2 представлена геометрия задачи и введены следующие обозначения: Γ_1 — внешняя поверхность трубки; Γ_2 — внутренняя поверхность трубки; Γ_3 — входное отверстие; Γ_4 — выходное отверстие. В декартовой системе координат ось Ox является центральной осью трубки, а начало отсчета расположено в геометрическом центре трубки.

Упругие деформации твердого тела описываются уравнением движения (второй закон Ньютона), связывающим динамическое изменение вектора перемещений (деформаций) $\mathbf{s}$, который определяет поперечную деформацию стенки канала благодаря действию пьезоэлемента, и действия внутренних, описываемых тензором напряжений $\bar{\sigma}$, и объемных сил $\mathbf{f}_v$ [12]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = \nabla \bar{\sigma} + \mathbf{f}_v,$$

где ρ — объемная плотность жидкости; t — время; ∇ — оператор набла.

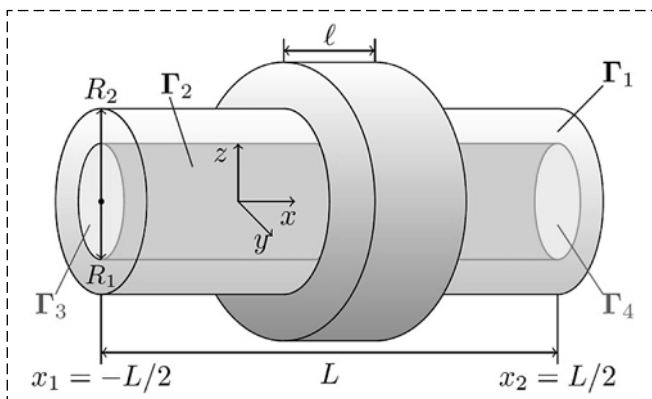


Рис. 2. Геометрия и основные обозначения модели сжатия трубки пьезоэлементом

Fig. 2. Geometry and basic notation of a piezoelectric tube compression model

Предполагается, что после приложения силы прошло достаточно времени для установления поля деформации. Тогда статическое условие равновесия в отсутствии объемных сил примет вид:

$$\nabla \bar{\sigma} = 0. \quad (1)$$

В изотропном теле тензор напряжений $\bar{\sigma}$ зависит от тензора деформаций $\bar{\varepsilon}$ и вектора перемещений $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$ следующим образом:

$$\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\varepsilon} + \lambda(\nabla \mathbf{s}) \bar{I}, \quad (2)$$

где $\bar{I}$ — единичный тензор; а коэффициенты Ламе

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

зависят от модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν .

Подставляя формулу (2) в уравнение (1) и исключая тензор деформаций $\bar{\varepsilon}$ согласно определению

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{s} + (\nabla \mathbf{s})^T),$$

получаем уравнение равновесия, содержащее только вектор перемещений:

$$\nabla[\mu(\nabla \mathbf{s} + (\nabla \mathbf{s})^T) + \lambda(\nabla \mathbf{s}) \bar{I}] = 0. \quad (3)$$

Деформации $\mathbf{s}$ определялись решением уравнения (3) численно в вариационной формулировке в пакете численного моделирования *FreeFem++* [13] методом конечных элементов:

$$\int_{\Omega} \frac{\mu}{2} (\nabla \mathbf{s} + (\nabla \mathbf{s})^T)(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) + \lambda(\nabla \mathbf{s})(\nabla \mathbf{v}) d\Omega = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — пробные функции; интегрирование проводится по всему объему Ω трубки.

Эквивалентность деформаций на внутренней стенке трубки между граничными условиями на внешней стенке, заданными в виде Дирихле и Неймана, показана в работе [10]. В настоящей работе удобно на поверхности контакта пьезоэлемента и канала задать граничные условия в виде Дирихле. Тогда компоненты вектора деформации $\mathbf{s}$ в области контакта S определяются как

$$s_x = 0, s_y = f_p(t) \Delta s_y / R_2, s_z = f_p(t) \Delta s_z / R_2 \quad (5)$$

для $(x, y, z) \in S$, поскольку $|\mathbf{s}| = f_p(t) \Delta s$.

В расчетах функция $f_p(t)$ выбрана в виде

$$f_p(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right), \quad (6)$$

где $T = 1/f$ — период колебаний; f — частота колебаний пьезоэлемента.

Дополнительное условие: концы трубки зафиксированы, т. е. $\mathbf{s} = 0$.

Течение несжимаемой вязкой жидкости в канале описывается уравнениями Навье—Стокса и неразрывности, которые имеют следующий вид [14]:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p - \eta \Delta \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \mathbf{u} = 0, \quad (7)$$

где $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ — вектор скорости жидкости; ∇p — градиент давления; η — динамическая вязкость жидкости; Δ — оператор Лапласа.

Для численного моделирования уравнения (7) записывали в вариационной форме и решали методом конечных элементов.

Уравнение неразрывности в вариационной форме (с пробной функцией q) для повышения устойчивости численной схемы записывали со стабилизационным слагаемым, имеющим смысл малой искусственной сжимаемости ($\nabla \mathbf{u} + \varepsilon_p p = 0$, $\varepsilon_p \sim 10^{-10}$):

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1} q d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_p p q d\Omega = 0. \quad (8)$$

Для численного решения уравнений Навье—Стокса (7) после деления на ρ проведения дискретизация по времени по схеме Эйлера следующим образом:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu_l \Delta \mathbf{u}^{n+1} = 0,$$

где $\nu_l = \eta/\rho$ — кинематическая вязкость жидкости; верхние индексы " $n+1$ " и " n " обозначают текущий и предыдущий моменты времени соответственно, а параметр $\tau = t^{n+1} - t^n$ — шаг по времени. Последние уравнения линеаризованы путем замены нелинейного слагаемого по схеме Пикарда:

$$(\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \approx (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1}.$$

Тогда вариационная форма уравнения Навье—Стокса (7) (с пробными функциями $\mathbf{w}$) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \mathbf{w} d\Omega - \\ - \int_{\Omega} \frac{p}{\rho} \nabla \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} \nu_l \nabla \mathbf{u}^{n+1} \nabla \mathbf{w} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим граничные условия. На стенке канала Γ_2 выполняется условие залипания — скорость жидкости равна скорости границы. За шаг по времени τ стенка смещается на величину $\mathbf{s}$ со скоростью $\mathbf{s}/\tau$. На входе Γ_3 и выходе Γ_4 добавляется условие параллельности течения. К слою приложен перепад давления $\Delta p = p_1 - p_2$, где p_1 и p_2 — давления на границах Γ_3 и Γ_4 соответственно, что позволяет регулировать течение жидкости путем изменений частоты сжатия пьезоэлемента и значение перепада давления. Таким образом, граничные условия примут вид

$$\Gamma_2: \mathbf{u} = \mathbf{s}/\tau; \Gamma_3, \Gamma_4: u_y = u_z = 0; \\ p(\Gamma_3) - p(\Gamma_4) = \Delta p. \quad (10)$$

Рассмотрим начальные условия. Компонента скорости вдоль канала соответствует пуазейлевскому течению:

$$u_x = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R_1^2 - y^2 - z^2), \quad u_y = u_z = 0,$$

а распределение давления линейно:

$$p = \frac{\Delta p}{L} \left(\frac{L}{2} - x \right).$$

На каждом шаге итерации Пикарда решается система уравнений (8)—(9) с граничными условиями (10), пока норма поправки решений $\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|$ не станет меньше заданной погрешности ε_u с обновлением решений $\mathbf{u}^{n+1} \rightarrow \mathbf{u}^n$, $p^{n+1} \rightarrow p^n$.

Заметим, что для решения задачи необходимым является выполнение гипотезы сплошной среды, в рамках которой феноменологические уравнения движения жидкости (7) являются корректными. Данную гипотезу можно считать обоснованной, если выполняется следующее неравенство [15]:

$$\frac{r_s}{2R_1} < 10^{-3},$$

где $r_s \approx \sqrt[3]{\bar{V}/N_A}$ — характерный размер в жидкости для неделимого объема $\bar{V}/N_A$; $\bar{V}$ — молярный объем жидкости; N_A — число Авогадро. Из последнего неравенства следует, что, например, для воды с молярным объемом

$\bar{V} \approx 0,18 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}$ значение нижнего предела радиуса микроканала $R_1 \approx 0,155 \text{ мкм}$, а для уайт-спирита с $\bar{V} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}$ — $R_1 = 0,345 \text{ мкм}$.

Результаты

При расчетах использовались следующие геометрические (рис. 2) и физические параметры системы: длина трубки $L = 10 \text{ мм}$; внутренний радиус $R_1 = 1 \text{ мм}$; внешний радиус $R_2 = 1,75 \text{ мм}$; длина контакта пьезоэлемента вдоль трубки $\ell = 1 \text{ мм}$; материал трубки — силиконовая резина с модулем Юнга $E = 5 \cdot 10^6 \text{ Па}$ и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,49$; два вида рабочей жидкости — вода и уайт-спирит с объемными плотностями $\rho = 998,2 \text{ кг/м}^3$ и $\rho = 790 \text{ кг/м}^3$ и динамическими вязкостями $\eta = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ и $\eta = 0,529 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ соответственно. Физические параметры жидкостей взяты при температуре 20°C . Максимальное значение деформаций на поверхности контакта пьезоэлемента и трубки составляло $\Delta s = 0,1 \text{ мм}$. Форму сигнала рассчитывали по формуле (6) с частотами $f = 0,5 \dots 1,2 \text{ кГц}$ (для воды) и $f = 0,5 \dots 2,5 \text{ кГц}$ (для уайт-спирита). Перепад давления $G = \Delta p/L = 0 \dots 4 \text{ кПа/м}$.

Размерность расчетной сетки составляла 56 узлов вдоль трубки и 40 узлов по окружности трубки, 4 элемента по толщине стенки. В этом случае общее число узлов для трубки — 6039, объемных элементов — 22 660 и граничных элементов — 9604, а для канала — 3011 узлов, 9839 объемных элементов и 5064 граничных элементов. Отличие объема расчетной области трубки в недеформированном состоянии от объема, вычисленного аналитически по формуле $V_a = \pi(R_2^2 - R_1^2)L$ (объем полого цилиндра), не превышает 0,4 %. Тестовый расчет расхода жидкости при отсутствии деформаций канала отличается от аналитической формулы для течения Пуазейля в цилиндрической трубе [14] на 0,06 %. Баланс изменения объема при деформации канала (объем втекающей жидкости равен сумме изменения объема канала в результате деформации и вытекающей жидкости) соблюдался с погрешностью 0,37 %.

Отметим, что рассмотренные в п. 1 уравнения упругих деформаций являются линейными, поэтому отклик системы должен быть пропорционален внешнему воздействию.

Решение уравнений упругости для трубки и уравнений гидродинамики в канале проводили

численно методом конечных элементов в пакете численного моделирования *FreeFem++* [13].

Моделирование деформации трубки

Деформация трубки происходит в результате сжатия пьезоэлементом, представляющим собой пьезокерамическое кольцо, надетое на трубку. Зависимость сжатия от времени определяется выражением $f_p(t)\Delta s$, где $f_p(t)$ задает периодическую функцию от времени по формуле (6). Деформации рассчитывали по формуле (4) с граничными условиями Дирихле (5). На рис. 3 показаны профили внутренней и внешней поверхностей трубки в сечении $y = 0$ и $z > 0$ (верхняя половина сечения) при максимальном сжатии трубки пьезоэлементом. Стрелками показаны соответствующие профили R_1 и R_2 в недеформированном состоянии. Видно, что деформации локализованы в области, включающей подобласть контакта пьезоэлемента с трубкой длиной ℓ и примыкающих подобластей также длиной порядка ℓ . Расчетная сетка канала строится по полю деформаций на внутренней поверхности трубки. Отметим, что на внутренней поверхности профиль вдоль оси Ox имеет более гладкую форму, чем на внешней поверхности, что сохраняет ламинарность течения жидкости в микроканале в более широком диапазоне градиента давления.

Отметим, что поскольку расчеты проводили с использованием линейной теории упругости, то существуют ограничения на максимальное значение деформации. В приведенных расчетах максимальная деформация составляла 5,7 %

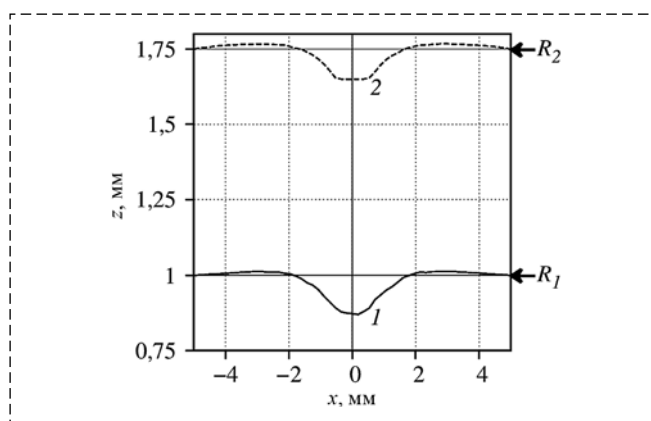


Рис. 3. Профили поверхностей трубки при максимальной деформации в сечении $y = 0$ и $z > 0$ для $\Delta s = 0,1 \text{ мм}$:

1 — внутренняя поверхность; 2 — внешняя поверхность

Fig. 3. The profiles of the tube surfaces at maximum deformation in the cross section $y = 0$ and $z > 0$ for $\Delta s = 0,1 \text{ мм}$:

1 — inner surface; 2 — outer surface

от внешнего радиуса R_2 , что позволяет провести качественный расчет поля деформаций, но количественно может содержать погрешность профиля деформаций порядка нескольких процентов относительно более точных методов (нелинейной модели Нео—Гукка, моделей гиперупругих материалов Муни—Ривлина и Огдена). В настоящей работе использование линейных уравнений упругости оправданно, поскольку расход жидкости в основном зависит от минимального радиуса отверстия в канале (который будет одинаков в любой модели, поскольку определяется граничными условиями) и слабее зависит от погрешности профиля деформации.

Моделирование течения жидкости

Решение уравнений гидродинамики проводили по формулам (8) и (9) с граничными условиями (10) на расчетной сетке канала, построенной с учетом деформации трубки.

В отсутствие перепада давления, когда $\Delta p = 0$ и, следовательно, $G = 0$, при сжатии пьезоэлемента жидкость течет в обоих направлениях симметрично относительно центра канала. Расходы жидкости на входе и выходе равны половине изменения объема, вызванного деформацией стенки канала. Поскольку за период канал восстанавливает свою форму, то суммарный объем жидкости будет равен нулю.

Под действием градиента давления $G > 0$ возникает течение в канале в положительном направлении оси Ox . Суммарное течение складывается из течения, индуцированного перепадом давления, и течения, индуцированного деформацией канала. Подбором значения перепада давления G и частоты колебаний пьезоэлемента f можно контролировать характер течения жидкости. Однако полное численное моделирование требует больших затрат машинного времени, поэтому целесообразно его заменить более простыми приближенными аналитическими формулами, построенными с помощью аппроксимации результатов расчета по полной модели для отдельных наборов параметров. Следовательно, необходимо построить ЭВС, позволяющий по заданным входным параметрам найти расход жидкости с помощью простых аналитических формул. Данный ЭВС даст возможность проводить вычисления в реальном времени с непосредственной интеграцией в систему управления технического устройства.

Построение ЭВС

Во всех расчетах по полной модели течение оставалось ламинарным с параболическим профилем скорости на границе Γ_4 . Следовательно, для построения аналитической формулы ЭВС за основу можно взять пуазейлевское течение, где скорость течения $u_x(r)$ ($r = (y^2 + z^2)^{1/2}$) и расход жидкости Q определяются по формулам [14]

$$u_x(r) = \frac{G}{4\eta}(R_1^2 - r^2);$$

$$Q_p(G, \eta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} u_x(r) r dr d\theta = \pi \frac{GR_1^4}{8\eta}. \quad (11)$$

Представим аппроксимацию расхода жидкости в виде

$$Q = F_1 + F_2, \quad (12)$$

где F_1 и F_2 — функции, построенные по результатам численного моделирования. Функция F_1 определяет модификацию пуазейлевского течения, индуцированного градиентом давления, с учетом деформации канала и может зависеть от внешних факторов G , f и свойств жидкости η , ρ . А функция F_2 определяет течение в отсутствие градиента давления, индуцированное деформацией канала, и зависит только от частоты f .

Определим выражение для функций F_1 и F_2 , рассмотрев отдельно расходы рабочей жидкости в трех случаях:

- при фиксированном градиенте давления G за период изменения сигнала (средний расход);
- при фиксированной частоте f за период изменения сигнала (средний расход);
- при фиксированных градиенте давления G и частоте f в зависимости от времени.

Вывод проиллюстрируем на конкретных примерах.

На рис. 4 показана зависимость минимального $Q_{\min}$, максимального $Q_{\max}$ и среднего $Q_a = (Q_{\min} + Q_{\max})/2$ значений расходов жидкости, протекающей через правую границу Γ_4 за период T , для воды и уайт-спирита от частоты пьезоэлемента f при постоянном градиенте давления $G = 2$ кПа/м. Видно, что:

1) с ростом частоты f происходит линейное снижение $Q_{\min}$, линейный рост $Q_{\max}$ при сохранении среднего значения Q_a . Следовательно, $F_1 \sim Q_a$, $F_2 \sim (Q_{\max} - Q_{\min})/2 = \Delta Q/2$;

2) уменьшение вязкости приводит к росту расхода жидкости, при этом отношение средних расходов Q_a^w/Q_a^s (верхний индекс "w" соот-

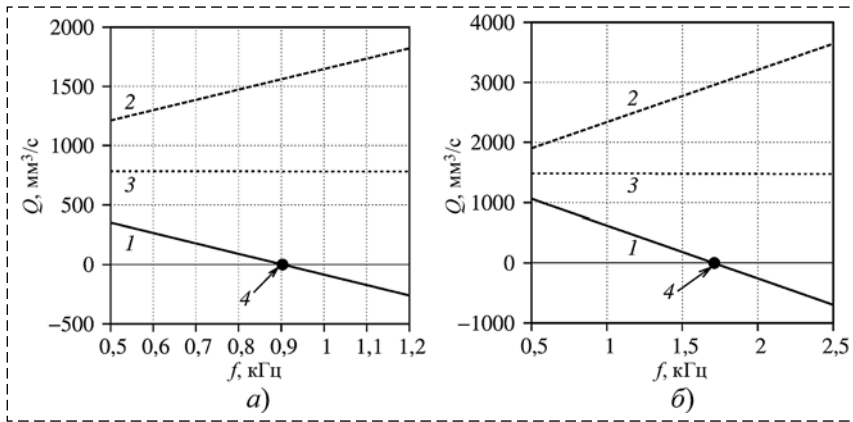


Рис. 4. Зависимости расходов жидкости (а — вода; б — уайт-спирит), протекающей через правую границу Γ_4 , от частоты пьезоэлемента f при постоянном градиенте давления $G = 2$ кПа/м:

1 — минимальный расход $Q_{\min}$; 2 — максимальный расход $Q_{\max}$; 3 — средний расход Q_a ; 4 — пограничный режим $Q_{\min} = 0$, определенный по формуле (15)

Fig. 4. Dependences of fluid flow (a — water; b — white spirit) flowing through the right boundary Γ_4 on the frequency f of the piezoelectric element with a constant pressure gradient $G = 2$ kPa/m:

1 — minimum flow rate $Q_{\min}$; 2 — maximum flow rate $Q_{\max}$; 3 — average consumption Q_a ; 4 — boundary mode $Q_{\min} = 0$, determined by the formula (15)

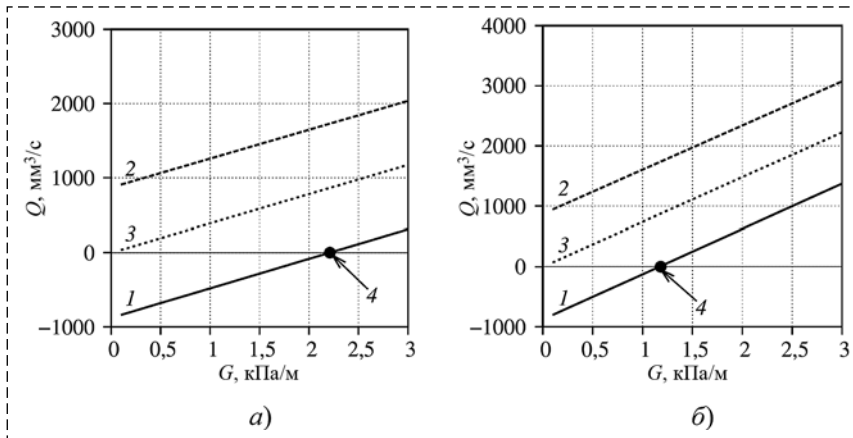


Рис. 5. Зависимости расходов жидкости (а — вода; б — уайт-спирит), протекающей через правую границу Γ_4 , от градиента давления G при постоянной частоте $f = 1$ кГц:

1 — минимальный расход $Q_{\min}$; 2 — максимальный расход $Q_{\max}$; 3 — средний расход Q_a ; 4 — пограничный режим $Q_{\min} = 0$, определенный по формуле (15)

Fig. 5. Dependences of fluid flow (a — water; b — white spirit) flowing through the right boundary Γ_4 on the pressure gradient G at a constant frequency $f = 1$ kHz:

1 — minimum flow rate $Q_{\min}$; 2 — maximum flow rate $Q_{\max}$; 3 — average consumption Q_a ; 4 — boundary mode $Q_{\min} = 0$, determined by the formula (15)

ветствует воде, а "s" — уайт-спириту) с точностью 0,023 % совпадает с отношением для динамических вязкостей η^s/η^w .

На рис. 5 показана зависимость минимального $Q_{\min}$, максимального $Q_{\max}$ и среднего Q_a расходов жидкости, протекающей через правую границу Γ_4 за период T , для воды и уайт-спирита от градиента давления G при постоянной частоте $f = 1$ кГц. Видно, что все три величины линейно возрастают, при этом отношение средних расходов

$Q_a^w(G_1)/Q_a^s(G_2)$, взятых для различных градиентов давления G_1 и G_2 , с точностью 0,03 % совпадает с выражением $(G_1/G_2)/(\eta^w/\eta^s)$.

На рис. 6 показаны зависимости расхода Q и суммарного объема жидкости V , протекающей через правую границу Γ_4 , от частоты пьезоэлемента при постоянном градиенте давления $G = 2$ кПа/м. Видно, что изменения расхода жидкости являются гармоническими и совпадают с частотой колебаний пьезоэлемента. Однако расход жидкости пропорционален производной от $f_p(t)$, заданной в виде (6), значит функция F_2 должна быть пропорциональна или, с точностью до постоянной, функции $f_q(t, f) = \sin(2\pi ft)$. Плотность жидкости ρ не оказывает существенного влияния на течение жидкости.

Таким образом, аппроксимация расхода жидкости (12) примет следующий вид:

$$Q(t) = Q_a + \frac{\Delta Q}{2} f_q(t, f). \quad (13)$$

Формула (13) является простой аналитической заменой полного численного моделирования, полученной по единичному численному расчету для заданного набора параметров, и может быть использована, например, в системе управления техническим устройством в реальном времени.

На основе выражения (13) получим универсальную формулу, позволяющую вычислить расход для произвольных рабочих жидкостей

и параметров системы трубка—пьезоэлемент. В пределе, когда амплитуда колебаний пьезоэлемента $\Delta s \rightarrow 0$, функции $F_1 \rightarrow Q_p$ (одновременно $Q_a \rightarrow Q_p$ на рис. 6, а и в, расход жидкости при пуазейлевском течении (13) показан штрих-пунктирной линией) и $F_2 \rightarrow 0$. Поскольку $Q \sim G$ и $Q \sim 1/\eta$, то при известных результатах моделирования $Q_{\min}$, $Q_{\max}$ и Q_a для значений $(G, f, \eta, \Delta s)$ при другом наборе параметров $(G^*, f^*, \eta^*, \Delta s^*)$ функция F_1 изменяется пропорционально

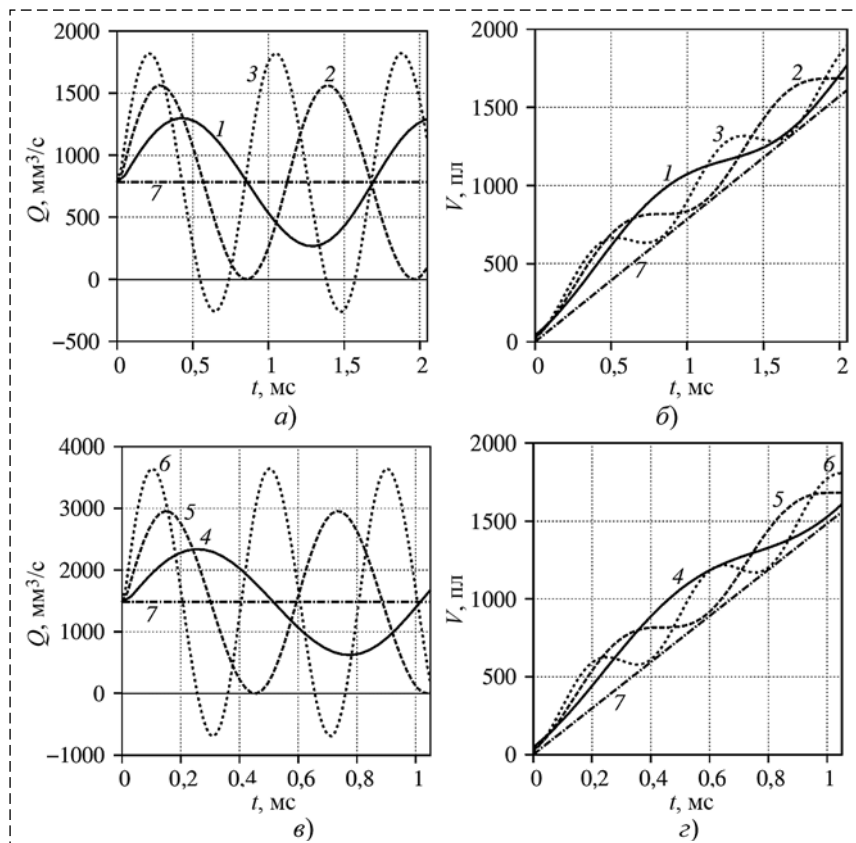


Рис. 6. Расход Q и суммарный объем V жидкости (а, б — вода; в, г — уайт-спирит), протекающей через правую границу Γ_4 для разных частот f при постоянном градиенте давления $G = 2$ кПа/м:

1 — $f = 600$ Гц; 2 — $f = 904$ Гц; 3 — $f = 1200$ Гц; 4 — $f = 1000$ Гц; 5 — $f = 1709$ Гц; 6 — $f = 2500$ Гц; 7 — пуазейлевское течение, определенное по формуле (11)

Fig. 6. The flow rate Q and the total volume V of the fluid (а, б — water; в, г — white spirit) flowing through the right boundary Γ_4 for different frequencies f with a constant pressure gradient $G = 2$ kPa/m:

1 — $f = 600$ Hz; 2 — $f = 904$ Hz; 3 — $f = 1200$ Hz; 4 — $f = 1000$ Hz; 5 — $f = 1709$ Hz; 6 — $f = 2500$ Hz; 7 — poiseuille current defined by the formula (11)

$Q_p(G^*, \eta^*)/Q_p(G, \eta)$, где $Q_p(G, \eta)$ вычисляется по аналитической формуле (11).

Объем жидкости, выдавливаемый за счет деформации трубки за период, от частоты не зависит, но расход жидкости прямо пропорционален частоте f , т. е. $Q \sim ds/dt \approx \Delta s f$, следовательно, для нового набора данных F_2 изменяется пропорционально $(\Delta s^* f^*)/(\Delta s f)$. Окончательно получим выражение для величины $Q(t)$ для нового набора параметров $(G^*, f^*, \eta^*, \Delta s^*)$, без необходимости в полном численном моделировании процесса для этого набора, в виде формулы ЭВС:

$$Q(t) = Q_a \frac{Q_p(G^*, \eta^*)}{Q_p(G, \eta)} + \frac{\Delta Q}{2} \frac{\Delta s^*}{\Delta s} \frac{f^*}{f} f_q(t, f^*). \quad (14)$$

Для определения скорости $u_x(r, t)$ по известному расходу, определяемому выражением (14), в формулах (11) исключим градиент давления G ,

тогда аппроксимация для скорости примет следующий вид:

$$u_x(t) = \frac{2}{\pi R_1^4} (R_1^2 - r^2) Q(t).$$

Полученное выражение для скорости можно использовать в качестве граничного условия для связанного ЭВС при моделировании системы ЭВС. Например, в системе трубка—микрозахват достаточно провести моделирование микрозахвата с граничными условиями на скорость в области крепления трубок к микрозахвату.

Как видно из рис. 4—6, для разных наборов параметров (G, f, η) , а также при изменении Δs реализуются два режима течения:

1) за период расход жидкости через границу Γ_4 может сменить свой знак, т. е. жидкость часть периода вытекает, а часть периода втекает через данную границу. В этом случае $Q_{\min} < 0$;

2) жидкость весь период течет в положительном направлении Ox . В этом случае $Q_{\min} > 0$.

Формула (14) позволяет точно определить параметры, при которых реализуется пороговый режим $Q_{\min} = 0$. Значение $Q(t)$ будет минимальным при $t = 3T/4$. Подставляя

этот момент времени и раскрывая выражения для $Q_p(G, \eta)$ по формуле (11), получим соотношение для определения граничного режима:

$$\frac{G^*}{G} \frac{\eta}{\eta^*} \frac{\Delta s}{\Delta s^*} \frac{f}{f^*} = \frac{\Delta Q}{2Q_a}. \quad (15)$$

Приведем пример применения формулы (15) для определения частоты сжатия пьезоэлемента f^* , соответствующей пороговому режиму течения жидкости (на рис. 4 данная частота обозначена закрашенным кругом). Для этого достаточно провести расчет для одного набора параметров $(G, f, \eta, \Delta s)$, например, $G = 2$ кПа/с, $f = 1$ кГц, η для воды или уайт-спирита и $\Delta s = 0,1$ мм. Тогда, поскольку $G^* = G$, $\eta^* = \eta$ и $\Delta s^* = \Delta s$, получим пороговую частоту $f^* = 0,904$ кГц для воды и $f^* = 1,71$ кГц для уайт-спирита. На рис. 5 пороговый режим, который обозначен закрашенным кругом, определен

по этому же набору параметров, но с учетом $f^* = f$, $\eta^* = \eta$ и $\Delta s^* = \Delta s$ имеем градиенты давления $G^* = 2,21$ кПа/м для воды и $G^* = 1,17$ кПа/м для уайт-спирита. В использованном подборе параметров для определения порогового режима максимальная погрешность для расхода жидкости $Q(t)$ между расчетными данными и данными, полученными с помощью аппроксимационной формулы (15), не превышает 0,06 % при подборе частоты f^* и 0,1 % при подборе градиента давления G^* . При этом заметим, что вычисленная частота f^* отличается от заданной f на 14 %, а вычисленный градиент давления G^* от заданного G — на 11 %. Если параметры исходного расчета находятся дальше от пороговых значений, то погрешность увеличивается. Например, если заданная частота f или градиент давления G отличаются от пороговых в два раза в большую или меньшую сторону, то погрешность $Q(t)$ составит 0,3 % и 0,6 % соответственно (на графике эти изменения будут практически не заметны). Таким образом, аппроксимация работает с высокой степенью точности для широкого интервала параметров.

Полученное соотношение (15) имеет практическое применение, например, при использовании системы трубка—пьезоэлемент для жидкостного охлаждения микрозахвата или другого технического устройства. Возможность определения порогового режима $Q_{\min} = 0$ повышает эффективность охлаждения путем выбора параметров, предотвращающих втекание нагретой жидкости обратно через выходное отверстие канала.

Заключение

Разработанная трехмерная компьютерная модель, описывающая поведение жидкости в микроканалах при использовании пьезоэлектрических приводов, является первым шагом в разработке теоретического базиса для создания микроприводов и исполнительных микромеханизмов. Микроустройства, базирующиеся на микрофлюидике и обладающие хорошими расчетными характеристиками, будут востребованы при проектировании новых перспективных конструкций микророботов и исполнительных микроустройств. Построенную на основе численного моделирования аналитическую модель ЭВС планируется использовать при разработке экспериментального образца капиллярного микрозахвата для расчета параметров системы жидкостного охлаждения

и выбора режимов работы микронасоса на базе пьезоэлементов, обеспечивающих прокачку необходимого объема жидкости для отвода излишков теплоты от элемента Пельтье. Необходимость расчетов новой конструкции насоса обусловлена тем, что классические перистальтические насосы не обладают линейностью производительности, при малых объемах прокачиваемой жидкости велика инерционность, переходной процесс затянут во времени. Точность разработанной модели позволяет проанализировать работу синтезируемых устройств практически на всех режимах работы от включения/выключения до переходных процессов при смене скорости потока.

Список литературы

1. Bruus H. Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark, 2006. 247 p.
2. Stroock A., Stephan K. Chaotic Mixer for Microchannels // Science. 2002. Vol. 295, iss. 5555. P. 647—651.
3. Lambert P. Capillary forces in microassembly: modeling, simulation, experiments, and case study. Microtechnology and MEMS. Springer, New York, 2007. 263 p.
4. Van der Merwe A. F., Matope S. Manipulation of Van der Waals forces by geometrical parameters in micro-material handling // Journal for New Generation Sciences. 2010. Vol. 8, N. 3, P. 152—166.
5. Reinhart G., Höppner J. The Use of Acoustic Levitation Technologies for Non-Contact Handling Purposes // Annals of the German Academic Society for Production Engineering VIII. 2001. P. 77—82.
6. Van Brussel H., Peirs J., Reynaerts D., Delchambre A., Reinhart G. Assembly of Microsystems // Annals of the CIRP. 2000. Vol. 49, N. 2. P. 451—472.
7. Насибуллаев И. Ш., Насибуллаева Э. Ш. Влияние температуры на динамику течения жидкости в технических системах с жиклерами // Тр. Института механики им. П. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 1. С. 1—9.
8. Насибуллаев И. Ш., Насибуллаева Э. Ш. Течение жидкости через систему связанных элементов технического устройства типа труба—гидросопротивление—труба // Тр. Института механики им. П. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 2. С. 141—149.
9. Насибуллаев И. Ш., Насибуллаева Э. Ш. Течение жидкости через гидросопротивление с динамически изменяемой геометрией // Тр. Института механики им. П. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 59—66.
10. Насибуллаев И. Ш., Насибуллаева Э. Ш., Даринцев О. В. Изучение течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом канал // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 3. С. 1—10.
11. Пат. 2261795 Российская Федерация, МПК 7B 25J 7/00, 15/00. Капиллярный микрозахват с обратной связью / О. В. Даринцев, А. Б. Мигранов. № 2004105379; заявл. 24.02.2004 г.; опубл. 10.10.2005. Бюл. № 28. 6 с.
12. Ландау Л., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
13. Hecht F. New development in FreeFem++ // J. Numer. Math. 2012. Vol. 20, N. 3—4. P. 251—266. DOI: 10.1515/jnum-2012-0013
14. Ландау Л., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
15. Белоусов К. И., Евстапов А. А., Кухтевич И. В., По-смитная Я. С. Основы нанотехнологий. Часть 1. Микро- и нанотехнологии для биологических и медицинских исследований. Часть 2. Капельная микрофлюидика: Учеб. пособие. СПб.: Университет ИТМО, 2015. 55 с.

Simulation of Fluid Flow through a Elastic Microchannel Deformed by a Piezoelement in Microgrip Cooling Systems

I. Sh. Nasibullayev, sp.ishn@gmail.com, E. Sh. Nasibullaeva, elvira@anrb.ru, O. V. Darintsev, ovd@uimech.org, Mavlyutov Institute of Mechanics — Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, 450054, Ufa, Russian Federation

Corresponding author: **Darintsev Oleg V.**, Ph.D., Head Scientific Researcher, Mavlyutov Institute of Mechanics — Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, 450054, Ufa, Russian Federation, e-mail: ovd@uimech.org

Accepted on August 09, 2019

Abstract

The flow of the fluid in an elastic cylindrical microchannel, the central part of which is located inside the piezoelectric ring, is simulated numerically. It arises as due to channel deformation by piezoelement according to the harmonic law, and pressure drop at the inlet and outlet to the microchannel. The aim of the work is to create a three-dimensional computer model of controlling the flow of a fluid by means of a pressure drop and a tube compression piezoelectric element. The model of an element of a computational bench that allows you to find fluid flow using specified analytical formulas, built using an approximation of the calculation results for the full model for individual sets of parameters. Modeling an element of a computing bench will allow real-time calculations with direct integration into the control system of a technical device. The model is based on the obtained analytical dependencies taking into account the restrictions introduced, which can significantly reduce the amount of computation and improve the quality of the result. The solution of the full equations of elasticity for the tube and the equations of hydrodynamics in the microchannel was carried out numerically by the finite element method in the package of numerical simulation FreeFem++. Numerical results are obtained for the flow rate of a fluid as a function of time, the physical properties of the fluid (dynamic viscosity and density) and external influences (the magnitude of the pressure gradient, the amplitude and frequency of compression of the piezoelectric element). The variants of using the obtained results in practical applications are shown. For example, in a liquid cooling system, the obtained relationship between the system parameters allows one to determine the flow regime that prevents the flow of heated liquid through the channel outlet. It is planned to use the results in the development of a computing stand for capillary micro-capture, containing two tubes (at the input and output) with piezoelectric elements, dividing the device into two parts (with dynamically changing and unchanged geometries) which will greatly simplify the full simulation.

Keywords: microrobotics, microequipment, hydrodynamics, elastic microchannel, piezoelectric element, linear elasticity, finite element method

Acknowledgements: This research was supported by Basic Research Program 1.7 "New Developments in Perspective Areas of Energetics, Mechanics and Robotics" of the Presidium of Russian Academy of Sciences.

For citation:

Nasibullayev I. Sh., Nasibullaeva E. Sh., Darintsev O. V. Simulation of Fluid Flow through a Elastic Microchannel Deformed by a Piezoelement in Microgrip Cooling Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 12, pp. 740—750.

DOI: 10.17587/mau.20.740-750

References

1. Bruus H. Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark, 2006, 247 p.
2. Stroock A., Stephan K. Chaotic Mixer for Microchannels, *Science*, 2002, vol. 295, iss. 5555, pp. 647—651.
3. Lambert P. Capillary forces in microassembly: modeling, simulation, experiments, and case study, *Microtechnology and MEMS*, Springer, New York, 2007, 263 p.
4. Van der Merwe A. F., Matope S. Manipulation of Van der-Waals forces by geometrical parameters in micro-material handling, *Journal for New Generation Sciences*, 2010, vol. 8, no. 3, pp. 152—166.
5. Reinhart G., Höppner J. The Use of Acoustic Levitation Technologies for Non-Contact Handling Purposes, *Annals of the German Academic Society for Production Engineering VIII*, 2001, pp. 77—82.
6. Van Brussel H., Peirs J., Reynaerts D., Delchambre A., Reinhart G. Assembly of Microsystems, *Annals of the CIRP*, 2000, vol. 49, no. 2, pp. 451—472.
7. Nasibullayev I. Sh., Nasibullaeva E. Sh. The effect of temperature on the fluid flow dynamics in technical systems with jets, *Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics*, 2016, vol. 11, no. 1, pp. 1—9 (in Russian).
8. Nasibullayev I. Sh., Nasibullaeva E. Sh. The fluid flow through the related element system of technical device such as pipe—hydraulic resistance—pipe, *Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics*, 2016, vol. 11, no. 2, pp. 141—149 (in Russian).
9. Nasibullayev I. Sh., Nasibullaeva E. Sh. Fluid flow through the hydraulic resistance with a dynamically variable geometry, *Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics*, 2017, vol. 12, no. 1, pp. 59—66 (in Russian).
10. Nasibullayev I. Sh., Nasibullaeva E. Sh., Darintsev O. V. Study of fluid flow through a channel deformed by piezoelement, *Multiphase Systems*, 2018, vol. 13, no. 3, pp. 1—10 (in Russian).
11. Darintsev O. V., Migranov A. B. Capillary micro-grip with feedback, *patent RF no. 2261795 RU*, 2005 (in Russian).
12. Landau L. D., Lifshitz E. M. Course of Theoretical Physics. Vol. 7. The theory of elasticity, Butterworth-Heinemann, 1986, 196 p.
13. Hecht F. New development in FreeFem++, *J. Numer. Math.*, 2012, vol. 20, no. 3—4, pp. 251—266.
14. Landau L. D., Lifshitz E. M. Course of Theoretical Physics. Vol. 6. Fluid Mechanics, Pergamon Press, 1987, 539 p.
15. Belousov K. I., Evstrapov A. A., Kukhtevich I. V., Posmitnaya Ya. S. Basics of nanotechnology. Part 1. Micro- and nanotechnologies for biological and medical research. Part 2. Drip microfluidics, St. Petersburg, University ITMO, 2015, 55 p. (in Russian).