

С. В. Феофилов, д-р техн. наук, доц., svfeofilov@mail.ru, А. В. Козырь, аспирант, Kozyr_A_V@mail.ru, Тульский государственный университет, г. Тула

Оценка устойчивости периодических движений и особенности синтеза регуляторов в релейных системах с цифровым управлением¹

Рассматриваются вопросы проектирования следящих релейных систем с цифровым управлением (PCY). Предложены методы определения возможных автоколебательных режимов в релейных системах с цифровым управлением и линейными, кусочно-линейными объектами управления (ОУ). Предлагаемый подход к исследованию периодических движений основан на методе фазового годографа релейной системы. Показано, что в рассматриваемых системах дискретизация по времени приводит к дроблению предельных циклов и возникновению множества возможных периодических движений. Предлагаются методы исследования устойчивости данных процессов. Разработаны два подхода для оценки устойчивости автоколебаний. В первом случае рассматривается дискретное представление ОУ. Получены условия устойчивости предельных циклов в виде системы матричных неравенств, которые определяют области притяжения для каждого возможного симметричного периодического движения. Показано, что такие области являются несвязанными и имеют различные размеры для каждого предельного цикла. Второй подход предполагает замену релейной системы с дискретизацией по времени эквивалентной непрерывной системой с запаздыванием. Указанное запаздывание определяется с помощью метода фазового годографа. Далее предлагается оценивать асимптотическую орбитальную устойчивость автоколебаний в эквивалентной системе и на этой основе делать вывод об устойчивости движений в исходной PCY с цифровым регулятором. Также показано, что при линеаризации релейного элемента в цифровой PCY по полезному сигналу коэффициент передачи реле является переменным и принадлежит определенному диапазону значений. Рассматривается синтез корректирующих устройств PCY с учетом цифровой реализации. Предлагается методика синтеза цифровой PCY, учитывающая дискретную реализацию корректирующих устройств на этапе оптимизации параметров регулятора. В качестве модельного примера рассматривается синтез релейной цифровой системы управления следящим автоколебательным приводом. Показаны преимущества синтеза цифровых PCY с применением разработанного подхода. Основным достоинством является то, что при оптимизации параметров регулятора с учетом дискретизации по времени удастся обеспечить стабильность желаемой частоты автоколебаний, а это, в свою очередь, позволяет повысить точность режима слежения.

Ключевые слова: автоколебания, релейное управление, дискретные системы, предельный цикл, метод фазового годографа, релейно-импульсные системы

Введение

В настоящее время подавляющее большинство систем управления реализуется в цифровом виде. Широкое распространение получили также автоколебательные релейные системы управления (PCY) [1–8]. Релейные системы имеют простую техническую реализацию и обладают высокими динамическими характеристиками. Исследованию PCY, работающих в непрерывном времени, посвящено большое число работ [1–3]. В ранних работах рассматривались вопросы анализа периодических движений и оценка их устойчивости. Для анализа и синтеза PCY, работающих в режиме слежения, в работах [1–5] разработан метод фазового годографа (ФГ) релейной системы. Подход позволяет исследовать параметры возможных автоколебаний в PCY на этапе, когда еще не определена структура регулятора. В рамках такого подхода разработаны

методы, позволяющие выделить все возможные симметричные периодические движения и оценить их устойчивость в PCY с кусочно-линейными и нелинейными объектами управления (ОУ) [4]. Предложены методы линеаризации релейных систем [5] и анализа параметрической чувствительности. На основе указанных методов сформулирован алгоритм синтеза систем с релейным управлением. Однако в рассмотренных работах исследовались PCY, работающие только в непрерывном времени.

Традиционный подход к проектированию цифровых PCY основан на синтезе регулятора по непрерывной модели и последующем переходе к цифровой системе [6]. Синтез релейной системы без учета дискретизации управления может ухудшить точность режима слежения при цифровой реализации регулятора, либо привести к завышенным требованиям к цифровому вычислителю. Дискретизация по времени в таких системах может существенно изменить параметры периодического режима, в том числе привести к срыву автоколебательного процесса [7, 8].

¹Статья подготовлена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-08-01141).

Исследованию РСУ с цифровым управлением посвящены работы [6—11]. В них предложены точные методы анализа возможных движений в цифровых РСУ. Показано, что дискретизация РСУ может приводить к возникновению множества устойчивых периодических движений [7, 8]. В случае если ОУ является неустойчивым, в РСУ устанавливаются микрохаотические колебания [7, 14]. Однако в указанных работах недостаточное внимание уделено оценке устойчивости периодических движений. При этом традиционный подход к рассмотрению устойчивости в малом не может быть применен в релейных системах с дискретизацией по времени. Дело в том, что малое возмущение траектории в этом случае не приводит к изменению моментов переключения релейного элемента в периодическом движении. Это значит, что необходимо выделять области притяжения каждого предельного цикла в фазовом пространстве системы. Далее эта идея развивается применительно к РСУ с линейными и кусочно-линейными ОУ.

В настоящей работе на основе разработанных точных методов анализа периодических движений [7] в РСУ с цифровым управлением предлагаются подходы, позволяющие анализировать симметричные периодические процессы в случае, если ОУ является кусочно-линейным. Разрабатываются методы оценки устойчивости периодических движений в цифровых РСУ. Рассматривается влияние дискретизации на точность режима слежения РСУ. Предлагается алгоритм синтеза, учитывающий дискретную реализацию РСУ на этапе оптимизации параметров корректирующих устройств.

1. Математическое описание исследуемых систем

В работе рассматриваются системы управления с симметричным двухпозиционным реле и линейным (кусочно-линейным) ОУ. Динамика объекта представлена в пространстве состояний системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_i x + B_i U, \text{ если } x \in S_i(x); \\ y = C^T x, \end{cases} \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ — n -мерный вектор состояний (фазовый вектор системы); $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — постоянная матрица; $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ — вектор коэффициентов; U — выход двухпозиционного релейно-

го элемента (РЭ); $S_i(x)$ определяет область фазового пространства, которой соответствуют матрицы A_i, B_i .

В реальных технических системах, как правило, присутствуют различного рода ограничители. При наличии таких звеньев в ОУ движение системы определяется разрывной кусочно-линейной динамикой [4], определяемой двумя дифференциальными уравнениями с матрицами A_1 (движение в свободной области) и A_2 (движение на ограничителе). Состояние системы в момент достижения ограничителя задается следующим равенством:

$$x(t^* + 0) = E_m x(t^* - 0). \quad (2)$$

Матрица E_m размерностью $n \times n$ отличается от единичной матрицы m -й строкой, состоящей из нулей $E_m = eue(1_1, \dots, 0_m, \dots, 1_n)$. Момент времени t^* соответствует переключению уравнений движения.

Далее предполагается, что релейный закон управления реализован в дискретном виде. Структурная схема замкнутой системы управления приведена на рис. 1.

На вход РЭ (рис. 2) подается последовательность

$$e[kT_s] = f[kT_s] - y[kT_s], k = 0, 1, 2, \dots,$$

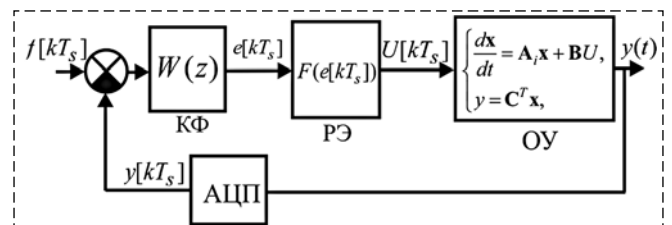


Рис. 1 Автоколебательная РСУ с цифровым управлением
Fig. 1. Block diagram of the relay servo system

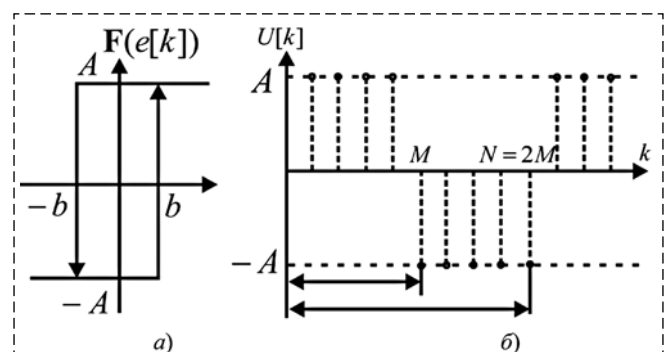


Рис. 2. Релейный элемент (а), управляющий сигнал (б)
Fig. 2. Hysteresis relay (a), periodic input sequence (b)

где $f[kT_s]$ — дискретный входной сигнал. Сигнал обратной связи формируется путем цифровой выборки непрерывного выходного сигнала $y(t)$ аналоговым цифровым преобразователем (АЦП) с постоянным шагом квантования T_s ; $W(z)$ — дискретный корректирующий фильтр. На ОУ в каждый интервал времени поступает сигнал (рис. 2)

$$U[kT_s] = \begin{cases} +A, & \text{если } e[kT_s] \geq b \forall e[kT_s] > -b, \\ U[(k-1)T_s] = +A; \\ -A, & \text{если } e[kT_s] \leq -b \forall e[kT_s] < -b, \\ U[(k-1)T_s] = -A. \end{cases} \quad (2)$$

Математическая модель замкнутой дискретной системы в случае линейного ОУ может быть представлена в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[(k+1)T_s] = \Phi_i \mathbf{x}[kT_s] + \Psi_i U[kT_s], i = 1, 2; \\ y[kT_s] = \mathbf{C}^T \mathbf{x}[kT_s]; \\ U[kT_s] = F(e[kT_s]); \\ e[kT_s] = f[kT_s] - y[kT_s], k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3)$$

Матрицы дискретной системы определяются известными соотношениями

$$\Phi_i = e^{A_i T_s}; \Psi_i = \int_0^{T_s} e^{A_i t} dt. \quad (4)$$

2. Симметричные периодические движения в РСУ с цифровым управлением

Как было показано, дискретизация по времени в таких системах приводит к возникновению множества возможных симметричных периодических движений по сравнению с непрерывным случаем [11, 12], что значительно усложняет анализ. В автономной РСУ, работающей в дискретном времени, симметричный периодический процесс определяется числом тактов дискретизации на полупериод повторения M , причем $MT_s = (N - M)T_s$, где $N, M \in \mathbb{Z}^+$, причем $N > M \geq 1$. Периодическая последовательность с выхода РЭ показана на рис. 2, б. В случае линейного ОУ все возможные симметричные периодические движения можно определить, используя дискретный фазовый годограф (ФГ) [7]. Выходная компонента дискретного ФГ (R -характеристика) определяет значение с выхода ОУ $y[kT_s]$ в момент переключения

РЭ с $-A$ на $+A$ и задается в следующем виде:

$$y[M] = \frac{-1}{M} \sum_{n=1}^M \frac{(1 - (-1)^n)}{\sin\left(\frac{\pi n}{2M}\right)} \times \times \text{Im}(W_{Oy}(e^{\frac{j\pi n}{M}}) e^{-j\pi n(M-0,5)/M}). \quad (5)$$

Условие переключения РЭ в дискретной системе

$$\begin{cases} y[M-1] > -b; \\ y[M] \leq -b. \end{cases} \quad (6)$$

Для того чтобы найти все возможные симметричные периодические движения, такие что $y[kT_s] = -y[(k+M)T_s]$, необходимо задать значение полупериода $M = [1, 2, \dots]$ и вычислить компоненту $y[M]$ (5). Все значения M , для которых справедливо неравенство (6), соответствуют возможным значениям автоколебаний с периодом $N = 2M$.

Дискретизация по времени приводит к возникновению некоторого запаздывания переключения РЭ $\tau \in [0, T_s]$ относительно непрерывного случая.

Условие переключения РЭ в непрерывном и дискретном случаях показано на рис. 3. Из рис. 3 видно, что РЭ переключается в некоторой δ -окрестности плоскости переключения $S_{-b} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{C}\mathbf{x} = -b\}$. В работе [10] было показано, что, используя подход эквивалентного запаздывания, можно определить диапазон частот возможных периодических движений, используя модель непрерывной РСУ. Данное обстоятельство позволяет применить хорошо разработанный аппарат теории непрерывных РСУ. В случае кусочно-линейного ОУ определять периодические движения в цифровой

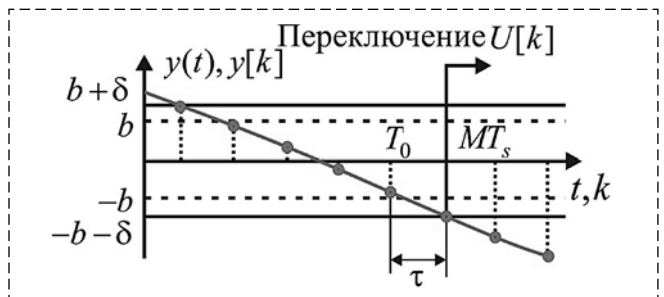


Рис. 3. Переключение РЭ в цифровой и непрерывной РСУ
Fig. 3. Conditions for a switch in the continuous-time configuration and in the sampled-data system

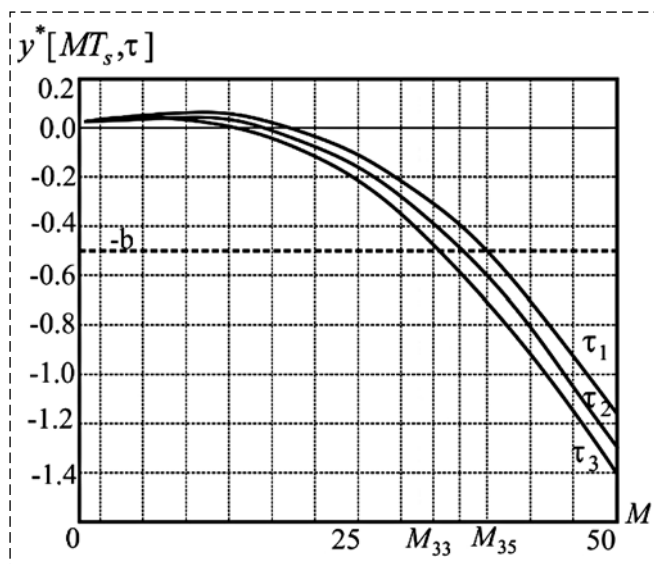


Рис. 4. Определение периодических движений в дискретной РСУ
Fig. 4. Definition of periodic movements in a sampled data relay feedback systems

РСУ возможно численно, решая уравнение ФГ с задержкой τ :

$$\mathbf{x}^*(MT_s) + \mathbf{F}(\mathbf{x}^*(MT_s), A, MT_s, \tau) = 0. \quad (7)$$

Для определения всех возможных периодических движений в РСУ необходимо построить семейство ФГ по зависимости (7), изменяя $\tau \in [0, T_s]$. Далее необходимо найти все точки пересечения с прямой $-b$, принадлежащие сетке дискретизации kT_s , как показано на рис. 4. Точки пересечения будут соответствовать возможным значениям полупериода M автоколебаний.

В случае кусочно-линейного ОУ в фазовом годографе возможны области неоднозначности, когда одному значению полупериода MT_s соответствуют несколько возможных периодических движений с различной формой. Предлагается выделять такие области, используя сферический метод решения нелинейных уравнений [13]. При таком подходе решение ФГ ищется на некоторой сфере радиусом r , каждое последующее решение является центром новой сферы. При этом ФГ определяется решением системы уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{x}(MT_s) + \mathbf{F}(\mathbf{x}(MT_s), A, MT_s) = 0; \\ (x_1 - C_1)^2 + (x_2 - C_2)^2 + \dots \\ \dots + (x_n - C_1)^2 + (MT_s - C_{n+1})^2 - r = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Такой подход позволяет выделить области неоднозначности.

3. Устойчивость периодических движений в дискретной РСУ

Дискретизация по времени в РСУ приводит к возникновению множества возможных симметричных периодических движений, причем период соседних автоколебаний отличается на $2T_s k$, $k = 1, 2, \dots$. Рассмотрим устойчивость каждого предельного цикла для случая системы с дискретизацией и линейным ОУ. Очевидно, если матрица ОУ A является матрицей Гурвица, т. е. все собственные числа $\text{eig}(A) \leq 0$, то каждый предельный цикл в цифровой РСУ является устойчивым в малом. Таким образом, каждой точке с предельного цикла в цифровой РСУ соответствует некоторая область возмущений Δ . Начальные условия, принадлежащие этой области, не приводят к изменению момента переключения РЭ, а траектория $\mathbf{x}_N^* = \mathbf{x}_N + \Delta$ будет стремиться к предельному циклу с периодом N . Локальную область устойчивости каждого предельного цикла $\Delta \in D$ можно определить численно, решив систему матричных неравенств, полученных из условий переключения РЭ (6):

$$D = \begin{cases} (-1)^i \mathbf{C}^T \Phi^M \Phi_M^i \Delta + b - \mathbf{C}^T \mathbf{x}_N^* \leq 0; \\ \mathbf{C}^T (\mathbf{x}_N^* + \Delta) \geq b, \text{ если } U = A; \\ (-1)^{i+1} \mathbf{C}^T \Phi^{(M+1)} \Phi_M^i \Delta - \Phi^{-1} (\mathbf{x}_M^* - \Psi \mathbf{C}) < 0; \\ \mathbf{C}^T (\mathbf{x}_N^* + \Delta) > -b, \text{ если } U = -A. \end{cases}$$

На рис. 5 (см. вторую сторону обложки) для примера приведен фазовый портрет цифровой РСУ с линейным ОУ, показано, что в системе возможны три предельных цикла с периодом повторения N_i ; $\mathbf{x}_1(N_1 = 6)$, $\mathbf{x}_2(N_2 = 8)$, $\mathbf{x}_3(N_3 = 10)$.

Для каждого предельного цикла существует область притяжения D . Фазовые траектории с началом в этой области будут сходиться к определенному периодическому движению. Как видно из рис. 5, такие области являются несвязанными и для каждого цикла имеют различные размеры.

Дискретизация в РСУ приводит к возникновению различных симметричных периодических движений, причем, какое именно периодическое движение установится в системе, определяется начальными условиями. Дискретную РСУ можно представить в виде непрерывной РСУ с запаздыванием τ , причем задержка принадлежит некоторому диапазону $\tau \in [\tau_1, \tau_N]$, где N определяется числом предель-

ных циклов в цифровой РСУ. Значение задержки, соответствующее каждому предельному циклу, можно определить, используя дискретный ФГ (5), (7). С практической точки зрения удобно оценивать устойчивость периодических движений в цифровой РСУ по непрерывной модели с эквивалентным фазовым запаздыванием τ^* , соответствующим максимальному предельному циклу в дискретной системе. Это позволит гарантировать схождение фазовой траектории к локальной совокупности предельных циклов. Оценим устойчивость симметричных периодических движений в непрерывной РСУ с запаздыванием и кусочно-линейным ОУ. Структурная схема приведена на рис. 6.

Положим для определенности, что в периодическом движении выходной сигнал с ОУ, который содержит звено с ограничителем, имеет вид, представленный на рис. 7.

Движение системы на интервале времени $t \in [0, t_1]$ определяется линейным уравнением (1) с матрицей A_1 (движение системы в свободной области). Движение на ограничителе $t \in [t_1, t_2]$ задается матрицей $A_2 = A_1 E_m$. По аналогии с работами [2–5] в случае симметричных периодических автоколебаний матрица устойчивости будет определяться в виде произведения

$$W = Q_\tau Q_1 Q_2 Q_3, \quad (9)$$

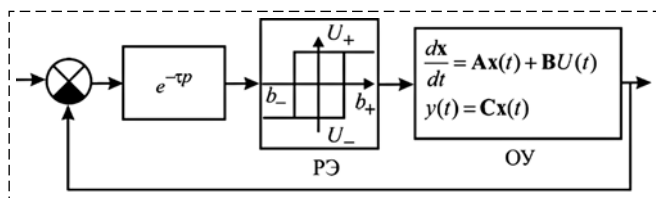


Рис. 6. РСУ с эквивалентным запаздыванием и кусочно-линейным ОУ по времени

Fig. 6. Time delay relay feedback systems with piecewise linear plant

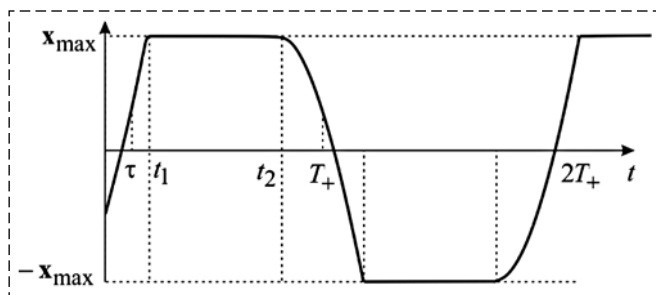


Рис. 7. Периодические движения в РСУ с запаздыванием и ограничителем

Fig. 7. Periodic motions in a time delay relay feedback system

где

$$Q_\tau = \left(I - \frac{A(Ax(MT_s) + BU_+)C}{CA(Ax(MT_s) + BU_+)} \right) e^{A\tau}; \quad (10)$$

$$Q_1 = \left(E - \frac{E(\dot{x}^-(T_+) - \dot{x}^+(T_+))L^T}{\dot{x}^-(T_+)} \right) e^{A_1(T_+ - t_2)}; \quad (11)$$

$$Q_2 = \left(I - \frac{E(\dot{x}^-(t_2) - \dot{x}^+(t_2))L^T}{\dot{x}^-(t_2)} \right) e^{A_2(t_2 - t_1)} = e^{A_2(t_2 - t_1)}; \quad (12)$$

$$Q_3 = \left(I - \frac{E(\dot{x}^-(t_1) - \dot{x}^+(t_1))C}{\dot{x}^-(t_1)} \right) e^{A_1(t_1 - \tau)}. \quad (13)$$

Здесь $L^T = [0, 0, 1, 0, \dots]^T$ — вектор, выделяющий координату звена с ограничителем, $\dot{x}^-$ и $\dot{x}^+$ — пределы слева и справа в момент изменения структуры кусочно-линейного объекта.

Тогда можно сформулировать критерий устойчивости. *Периодическое движение $\dot{x}^*(t)$ в замкнутой релейной системе с запаздыванием будет асимптотически орбитально устойчивым, если все собственные числа матрицы W находятся внутри окружности единичного радиуса*

$$|\text{eig}(W)| \leq 1.$$

Таким образом, устойчивость периодических движений в цифровой РСУ с дискретизацией T_s определяется устойчивостью РСУ с эквивалентным запаздыванием τ . При этом периодическая траектория будет сходиться к какому-либо из возможных предельных циклов с периодами повторения N_i .

4. Синтез релейной автоколебательной следящей системы с цифровым управлением

Предлагаемый алгоритм синтеза цифровой автоколебательной РСУ состоит из нескольких основных этапов. Сначала задаются параметры цифрового контроллера, частота дискретизации $f_s = 1/T_s$, разрядность Δ_s . На следующем этапе исходя из анализа дискретного ФГ выбирается структура корректирующих устройств. Желаемая частота автоколебаний $f_{авт} = 1/MT_s$ в РСУ контролируется с помощью линейного корректирующего элемента, в обратной связи, охватывающей РЭ (рис. 8).

Коррекцию фазовой частотной характеристики предлагается обеспечивать последова-

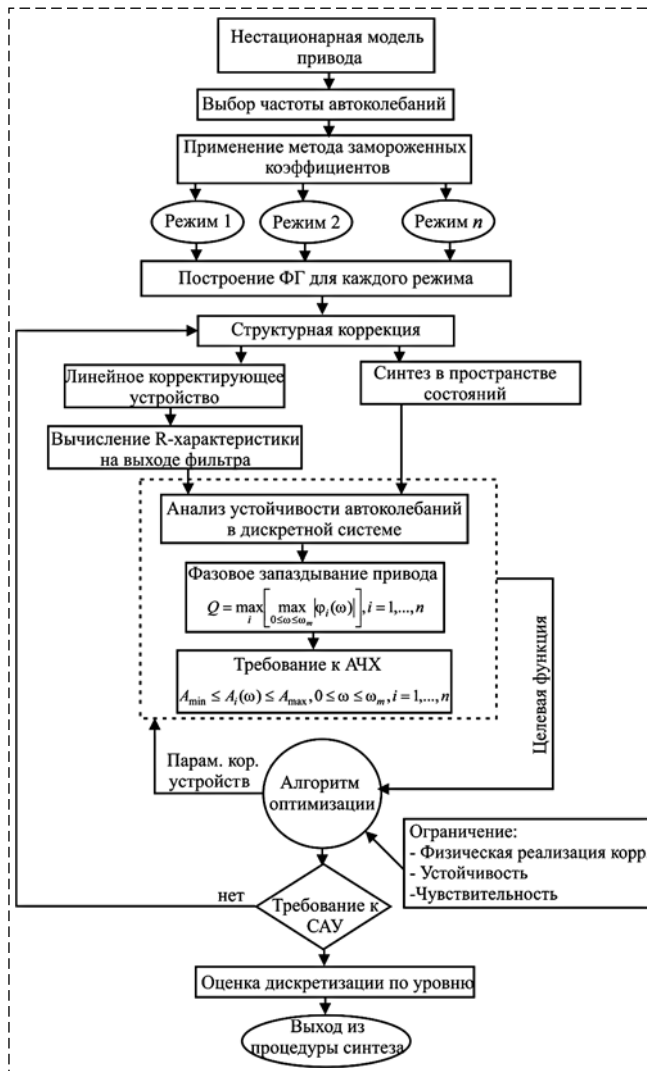


Рис. 8. Блок-схема алгоритма синтеза РСУ
Fig. 8. Flowchart synthesis algorithm

тельным линейным интегро-дифференцирующим фильтром.

Основным показателем качества для многих следящих РСУ является фазовое запаздывание, поэтому в качестве критерия оптимизации

далее будем использовать значение максимального фазового сдвига, вычисляемого на диапазоне частот входного сигнала

$$Q = \max_{0 \leq \omega \leq \omega_{\max}} |\arg \varphi(j\omega)|. \quad (14)$$

В общем случае критерий оптимизации может быть любым.

Вычисление критерия удобно проводить по линеаризованной модели. Известно несколько подходов к линеаризации РСУ, работающих в непрерывном времени [5]. В случае цифровой реализации РСУ необходимо учитывать, что коэффициент линеаризации РЭ принадлежит некоторому диапазону значений. При этом исследование РСУ с цифровым управлением сводится к линейной системе с переменным коэффициентом усиления, зависящим от запаздывания

$$K_{РЭ}(\tau) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{Re} \left(W_{ОУ} \left(\frac{j\pi}{MT_s} k, \tau \right) \right). \quad (15)$$

Следующий этап синтеза состоит в параметрической оптимизации корректирующих устройств. На значения параметров наложены ограничения, такие как устойчивость периодических движений в цифровой РСУ, которая может быть оценена с помощью условия (9), физическая реализуемость фильтра, частота автоколебаний, параметрическая чувствительность. Тогда общий алгоритм синтеза может быть представлен в виде блок-схемы рис. 8.

На примере проведено сравнение синтеза РСУ по непрерывной модели без учета дискретной реализации корректирующих устройств на этапе параметрической оптимизации и с учетом дискретизации по времени. Структурная схема рассматриваемой системы показана на рис. 9.

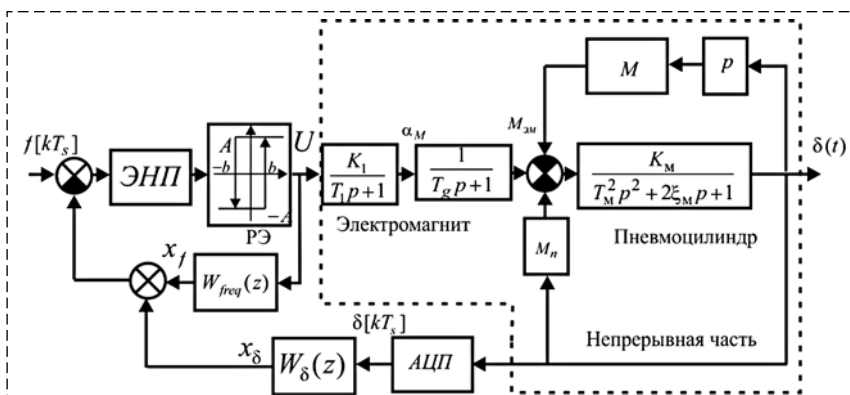


Рис. 9. Структурная схема релейного пневмопривода
Fig. 9. Block diagram of the Electro-pneumatic servomechanism

На рис. 9 $W_\delta(z)$ — дискретный корректирующий фильтр, обеспечивающий коррекцию фазово-частотной характеристики системы. Фильтр $W_{freq}(z)$ обеспечивает желаемую частоту автоколебаний. Параметры РЭ: $A = 27$, $b = 0,01$. Период дискретизации $T_s = 0,01(c)$; параметры ОУ: $K_1 = 7$; $T_1 = 0,001$; $K_M = 1,0$; $T_M = 0,001$; $\xi_M = 0,001$; $T_g = 0,025$.

Желаемая частота автоколебаний составляет $f_{авт} = 110$ Гц. Данную частоту будем поддерживать с помощью колебательного звена

в обратной связи РЭ. Коэффициент усиления указанного звена будем рассчитывать исходя из частоты $f_{авт}$:

$$K_{кр}(f_{авт}) = \frac{(-b - x_{\delta})T_{кр}^2}{P(1, 2)}, \tag{14}$$

где $P(1, 2) = (e^{A_{\phi}MT_s} + I)^{-1}(e^{A_{\phi}MT_s} - I)A_{\phi}^{-1}B_{\phi}A$;

$$A_{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_{кр}^2} & -\frac{2\xi}{T_{кр}} \end{pmatrix}; \quad B_{\phi} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{K_{кр}}{T_{кр}^2} \end{pmatrix}.$$

При расчете такого параметра необходимо учитывать дискретную реализацию РСУ, приняв остальные параметры такими, чтобы в системе установились устойчивые автоколебания.

Для сравнения в таблице приведены результаты работы алгоритма синтеза без учета дискретизации и предлагаемого алгоритма.

Цифровая реализация системы, синтезированной без учета дискретизации, приводит к уменьшению частоты автоколебаний. Она составила 62,5 Гц при желаемой 110 Гц. Соответственно увеличились амплитуда автоколебаний и фазовое запаздывание привода. Для иллюстрации на рис. 10 приведены ФЧХ привода, синтезированные предлагаемым алгоритмом и методом ФГ без учета дискретизации.

Из рис. 10 видно, что учет дискретизации в алгоритме синтеза позволяет уменьшить максимальное фазовое запаздывание на 18,5 %.

Параметры корректирующих устройств
Parameters of corrective devices

Синтез по непрерывной модели	Синтез по дискретной модели
$W_{\delta} = \frac{11,63z - 11,63}{z - 0,9997}$	$W_{\delta} = \frac{10,15z - 10,15}{z - 0,9996}$
$W_{freq} = \frac{7,685 \cdot 10^{-5}z + 7,685 \cdot 10^{-5}}{z^2 - 1,994z + 0,994}$	$W_{freq} = \frac{22,38z - 22,37}{z^2 - 0,9996}$



Рис. 10. ФЧХ привода с цифровым управлением
Fig. 10. Phase frequency response of a sampled relay control system

Заключение

В работе предложено несколько подходов к анализу периодических движений в РСУ, работающих в дискретном времени. Представлены два метода оценки устойчивости симметричных периодических движений в таких системах. Первый позволяет исследовать устойчивость каждого предельного цикла и определять области их притяжения. Показано, что такие области являются несвязанными и имеют различный размер для каждого предельного цикла. Другой метод анализа позволяет оценивать устойчивость периодических движений в дискретных релейных системах по эквивалентной непрерывной РСУ с запаздыванием. Данный подход обобщен на класс РСУ с кусочно-линейными ОУ. Показано, что при линеаризации цифровой РСУ коэффициент передачи РЭ по полезному сигналу будет переменным. Разработан алгоритм синтеза цифрового регулятора для РСУ. В отличие от известных он позволяет учитывать дискретизацию на этапе оптимизации параметров регулятора. На модельном примере продемонстрирована эффективность предложенных методов.

Список литературы

1. Цыпкин Я. З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974. 576 с.
2. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учеб. в 3 т. Т. 1: Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления / Под ред. Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. С. 748.
3. Цыпкин Я. З., Попков Ю. С. Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973. 416 с.
4. Фалдин Н. В., Феофилов С. В. Исследование периодических движений в релейных системах, содержащих звенья с ограничителями // Известия РАН. Теория и системы управления, 2007. № 2. С. 15–27.
5. Моржов А. В., Фалдин Н. В. Линеаризация по полезному сигналу релейных систем управления, содержащих звенья с ограничителями // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2007. № 3. С. 5–15.
6. Феофилов С. В. Синтез цифровой системы управления релейных пневмоприводов // Известия ТулГУ. Серия Вычислительная техника. Информационные технологии. Системы управления. Вып. 3. Системы управления. Т. 2. Тула: ТулГУ, 2006. С. 269–276.
7. Козырь А. В., Феофилов С. В. Анализ периодических движений в цифровых автоколебательных системах управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 9. С. 587–594. DOI: 10.17587/mau.19.587-594
8. Феофилов С. В. Периодические движения в релейных системах с цифровым управлением // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 5. С. 11–17.
9. Bazanella A. S., Parraga A. Limit cycles in sampled-data relay feedback systems // IEEE Transactions on Automatic Control. Springer. 2016.

10. **Феофилов С. В., Козыр А. В.** Периодические колебания в дискретных релейных системах управления // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 12. Ч. 3. 2017. С. 61—71.
11. **Koch S., Horn M.** Frequency domain analysis of sampled variable structure systems // IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control December 12–15. 2017. P. 6664—6670.
12. **Galias Z., Yu X.** Euler's discretization of single input sliding-mode control systems // IEEE Transactions on Automatic Control. Sept 2007. Vol. 52, N. 9. P. 1726—1730.

13. **Oliveros-Munoz J. M., Jimenez-Islas H.** Hyperspherical path tracking methodology as correction step in homotopic continuation methods // Chemical Engineering Science. 2013. Vol. 97. P. 413—429.
14. **Galias Z., Yu X.** Analysis of delayed sliding mode control systems under zero-order holder discretization // IEEE Transactions on Automatic Control. Sept 2016. Vol. 61, N. 9. P. 2739—2744.
15. **Kowalczyk P., Glendinning A.** Micro-chaos in relay feedback systems with bang-bang control and digital sampling // IFAC. Italy, 2011.

Stability of Periodic Motions and Synthesis of Relay Sampled Data Control Systems

S. V. Feofilov, svfeofilov@mail.ru, **A. V. Kozyr**, Kozyr_A_V@mail.ru,
Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation

Corresponding author: **Feofilov Sergey V.**, Ph. D., Associate Professor, Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation, e-mail: svfeofilov@mail.ru

Accepted June 14, 2019

Abstract

This article is devoted to research and design of relay systems with control of data sampling. It is shown that the time sample has a significant effect on the parameters of periodic oscillations. We propose an exact method for analyzing periodic modes in digital self-oscillatory control systems with a two-position relay element and a linear piecewise-linear part is proposed. The proposed approach extends the phase hodograph method to the class of systems operating in discrete time. Two approaches have been developed to assess the stability of periodic motions in such systems. In the first approach, a discrete representation of a plant is considered and areas of stability are defined for each possible limit cycle. The sampling of the control system causes a delay in the switching of the relay in a batch mode in comparison with the continuous case. The second approach assumes the replacement of a discrete system by an equivalent continuous system with a time delay. Further, the asymptotic orbital stability of self-oscillations in a relay control system (RCS) with a delay is estimated. We consider the linearization of relay systems with digital control of the input signal. It is also shown that when linearizing a relay element in a digital RCS using a useful signal, the relay transfer ratio will belong to a certain range of values. Synthesis of corrective devices for relay control systems with regard to digital implementation has been reviewed. At the stage of optimization of parameters of the relay control system, the sample is taken into account. The model example demonstrates an advantage in the synthesis of digital technologies. It is shown that when optimizing the controller parameters with regard to time discretization, it was possible to provide the desired frequency of self-oscillations, which ensures the best accuracy of the tracking mode.

Keywords: self-oscillations, relay control, discrete systems, limit cycle, phase locus method, relay-pulse systems

Acknowledgements: This article was prepared with the financial support of Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-08-01141).

For citation:

Feofilov S. V., Kozyr A. V. Stability of Periodic Motions and Synthesis of Relay Sampled Data Control Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 11, pp. 655—662.

DOI: 10.17587/mau.20.655-662

References

1. **Tsyarkin Ya. Z.** Relay automatic systems, Moscow, Nauka, 1974, 576 p. (in Russian).
2. **Yegupov N. D.** ed. Methods of the classical and modern theory of automatic control: Textbook. Vol. 1: Analysis and statistical dynamics of automatic control systems, Moscow, Publishing house of MGTU im. N. E. Bauman, 2000, 748 p. (in Russian).
3. **Tsyarkin Ya. Z., Popkov Yu. S.** Theory of Nonlinear Pulse Systems, Moscow, Nauka, 1973, 416 p. (in Russian).
4. **Faldin N. V., Feofilov S. V.** On Periodic Motions in Relay Systems Contain ing Blocks with Limiters, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2007, vol. 46, no. 2, pp. 177—188 (in Russian).
5. **Morzhov A. V., Faldin N. V.** *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2007, no. 3, pp. 5—15 (in Russian).
6. **Feofilov S. V.** *Izvestiya TulGU. Seriya Vychislitel'naya tekhnika. Informatsionnye tekhnologii. Sistemy upravleniya. Vyp. 3. Sistemy upravleniya*. Vol. 2, Tula, Publishing house of TulGU, 2006, pp. 269—276 (in Russian).
7. **Kozyr A. V., Feofilov S. V.** *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye*, 2018, vol. 19, no. 9, pp. 587—594, DOI: 10.17587/mau.19.587-594 (in Russian).
8. **Feofilov S. V.** *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye*, 2006, no. 5, pp. 11—17 (in Russian).
9. **Bazanella A. S., Parraga A.** Limit cycles in sampled-data relay feedback systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Springer, 2016.
10. **Feofilov S. V., Kozyr' A. V.** *Izvestiya TulGU. Tekhnicheskiye nauki*, iss. 12, part 3, Tula, Publishing house of TulGU, 2017, pp. 61—71 (in Russian).
11. **Koch S., Horn M.** Frequency domain analysis of sampled variable structure systems, *IEEE 56th Annual Conference on Decision and control*, December 12—15, 2017, pp. 6664—6670.
12. **Galias Z., Yu X.** Euler's discretization of single input sliding-mode control systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Sept 2007, vol. 52, no. 9, pp. 1726—1730.
13. **Oliveros-Munoz J. M., Jimenez-Islas H.** Hyperspherical path tracking methodology as correction step in homotopic continuation methods, *Chemical Engineering Science*, 2013, vol. 97, pp. 413—429.
14. **Galias Z., Yu X.** Analysis of delayed sliding mode control systems under zero-order holder discretization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Sept 2016, vol. 61, no. 9, pp. 2739—2744.
15. **Kowalczyk P., Glendinning A.** Micro-chaos in relay feedback systems with bang-bang control and digital sampling, *IFAC*, Italy, 2011.