

В. А. Каменецкий, канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр., vlakam@ipu.ru,
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

Линейные матричные неравенства в задачах устойчивости: ретроспектива и теоретические аспекты¹

Работа представляет собой расширенную и переработанную версию доклада, сделанного на конференции имени Е. С. Пятницкого в 2016 г.

Рассматриваются некоторые аспекты развития теории линейных матричных неравенств. Освещается ряд результатов, полученных на начальном этапе развития этой теории как при разработке численных методов, так и при получении аналитических условий их разрешимости. Основное внимание сосредоточено на системе линейных матричных неравенств, возникающей при решении задачи абсолютной устойчивости. Е. С. Пятницким и его учениками показано, что разрешимость этой системы является критерием существования квадратичной функции Ляпунова и достаточным условием абсолютной устойчивости. Рассматриваются предпосылки, приведшие к данному результату. Показывается использование рассматриваемой системы неравенств для исследования устойчивости гибридных систем, описываемых дифференциальными включениями и системами с переключениями. Приводится анализ цитирования некоторых работ школы Пятницкого по теории устойчивости и теории систем линейных матричных неравенств, из которого следует востребованность результатов этих работ в настоящее время.

При разработке численных методов Е. С. Пятницким впервые показано, что вопрос о разрешимости системы линейных матричных неравенств сводится к задаче выпуклого программирования. Приводится интересный градиентный алгоритм поиска решений такой системы.

При анализе аналитических условий разрешимости отмечается полученный автором совместно с Е. С. Пятницким критерий неразрешимости интересующей системы. В современных терминах этот результат можно рассматривать как описание допустимого множества в двойственной задаче полуопределенного программирования. Похожий результат приводится в известной книге С. Бойда с соавторами. В работе показывается, что результат Бойда и др. является простым следствием критерия неразрешимости. Здесь критерий неразрешимости обобщается и уточняется.

Ключевые слова: квадратичные функции Ляпунова, линейные матричные неравенства, абсолютная устойчивость, системы с переключениями

Введение

В настоящее время латинская аббревиатура LMI (Linear Matrix Inequality) и ее русский эквивалент ЛМН (линейное матричное неравенство) знакомы всем специалистам по теории управления и устойчивости. Роль ЛМН в теории устойчивости и управления в большинстве случаев обусловлена использованием квадратичных функций Ляпунова. Наличие эффективных методов численного решения

ЛМН делает метод функций Ляпунова полностью конструктивным, что ведет к чрезвычайно широкому использованию техники ЛМН. На русском языке использованию техники ЛМН посвящены монографии [1–3], вопросы применения ЛМН затрагиваются в книге [4], в учебнике [5] и огромном числе журнальных публикаций. Во введении книги [3] говорится, что роль линейных матричных неравенств "в теории управления стала ясна после появления книги С. Бойда с соавторами [6], а вычислительные средства для их решения появились после создания метода внутренних точек Нестерова и Немировского." К настоящему времени с момента выхода работы [6] прошло ровно 25 лет. Безусловно, работа [6] сыграла

¹Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 "Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники".

огромную роль в продвижении техники ЛМН в теорию управления. Говоря о роли книги [6], подчеркнем, что в библиографию включены 27 работ Е. С. Пятницкого и его учеников, из которых в 11 непосредственно рассматриваются вопросы теории ЛМН и методы их численного решения. В данной статье рассматривается развитие теории ЛМН до появления работы [6]. Истории развития теории ЛМН посвящены разделы в книгах [5, 6], докладе [7]. В этих публикациях высоко оценен вклад школы Пятницкого в теорию ЛМН. В настоящей работе, со своей точки зрения и опираясь на исторические очерки [5–7], освещается ряд результатов Е. С. Пятницкого и его соавторов, которые, в известной степени, создавали предпосылки к тому, чтобы теория ЛМН стала теперь столь популярной. Особое внимание будет уделено работе [8] и одному результату из этой работы, который стал широко известным после выхода работы [6].

Предлагаемый ниже материал представляет собой расширенную и переработанную версию доклада [9], сделанного на конференции имени Пятницкого в 2016 г.

Рассматриваемый класс линейных матричных неравенств

Отметим, что речь пойдет не об одном ЛМН ляпуновского типа, известного со времен А. М. Ляпунова, и не о ЛМН с ограничениями, которое было с блеском исследовано В. А. Якубовичем и его сотрудниками с помощью S -процедуры и частотной теоремы [10], а о следующей системе ЛМН относительно симметрической матрицы L ($L = L^T$)

$$A_s^T L + L A_s < 0, s = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Неравенство $W < 0$ (> 0) для матрицы $W = W^T$ означает, что квадратичная форма $x^T W x$ является отрицательно (положительно) определенной, т. е. $x^T W x < 0$ (> 0) при $x \neq 0$. В работе [11] говорится, что система (1) появилась в статье [12] и подразумевается в работе [13] как необходимое и достаточное условие существования квадратичной функции Ляпунова в задаче абсолютной устойчивости системы с несколькими нелинейностями. К оговоркам, касающимся заявленного приоритета и приведенным в начале этого раздела, ниже еще

будут добавлены разъяснения относительно результатов работы [14]. В свою очередь, в [12] система (1) приводится со ссылкой на работу [15] и, следовательно, своим появлением для задачи абсолютной устойчивости она обязана Е. С. Пятницкому, что логично вытекает из ранее проведенных им исследований.

Абсолютная устойчивость и линейные матричные неравенства

В своей докторской диссертации и работе [16] Е. С. Пятницкий использовал для решения задачи абсолютной устойчивости чрезвычайно популярную в то время теорию оптимального управления. Для этого им было показано, что задача абсолютной устойчивости в стандартной постановке эквивалентна устойчивости линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^m b_j u_j \langle c_j, x \rangle \quad (2)$$

при произвольных измеримых функциях $u(t) = \|u_j(t)\|_{j=1}^m$, удовлетворяющих ограничениям $0 \leq u_j(t) \leq k_j$, $j = \overline{1, m}$. Здесь A , b_j , c_j — числовые матрица и векторы объекта; $\langle \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов. Если в качестве функции Ляпунова используется квадратичная форма $v(x) = x^T L x$, то говорят, что $v(x)$ — квадратичная функция Ляпунова (КФЛ). Производная такой $v(x)$ в силу системы (2) имеет вид

$$\dot{v}(x, u) = x^T (A^T L + L A) x + \sum_{j=1}^m u_j \langle L b_j, x \rangle \langle c_j, x \rangle, \quad (3)$$

т. е. линейно зависит от u_j . Таким образом, неравенство $\dot{v}(x, u) < 0$, $x \neq 0$, достаточно проверить лишь в крайних точках области изменения функции $u(t)$, т. е. в вершинах m -мерного параллелепипеда. Вершинами этого параллелепипеда H будут служить точки $h_s = \|h_{sj}\|_{j=1}^m$, $s = \overline{1, N}$ ($N = 2^m$), где величина h_{sj} принимает одно из двух значений: 0 или k_j . Поэтому требование отрицательной определенности квадратичной формы (3) при всех допустимых u эквивалентно выполнению системы (1), в которой матрицы A_s имеют специальный вид: $A_s = A + \sum_{j=1}^m h_{js} b_j c_j^T$. Стоит отметить, что использование системы (2) для исследования задачи абсолютной устойчи-

ности делает получение системы максимально простым и наглядным, однако не является непременным условием для этого. В стандартной постановке задачи абсолютной устойчивости требуется, чтобы система

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^m b_j \varphi_j(t, \sigma_j), \quad \sigma_j = \langle c_j, x \rangle \quad (4)$$

была асимптотически устойчива в целом при любых нелинейностях $\varphi = \|\varphi_j\|_{j=1}^m$, удовлетворяющих секторным ограничениям $0 \leq \varphi_j \sigma_j \leq k_j \sigma_j^2$, $j = \overline{1, m}$. Производная КФЛ $v(x)$ в силу системы (4) имеет вид (аналог (3))

$$\dot{v}(x, \varphi) = x^T (A^T L + LA)x + 2 \sum_{j=1}^m \varphi_j \langle Lb_j, x \rangle, \quad (5)$$

т. е. снова линейно зависит теперь от φ_j . Секторные ограничения эквивалентны требованиям $\varphi_j \in [0, k_j \sigma_j]$ (или $\varphi_j \in [k_j \sigma_j, 0]$), $j = \overline{1, m}$, поэтому неравенство $\dot{v}(x, u) < 0$, $x \neq 0$, достаточно проверять лишь в крайних точках области изменения функций φ_j , т. е. при $\varphi_j = 0$ и $\varphi_j = k_j \sigma_j$, что приводит в точности к системе (1) с матрицами A_s указанного выше вида.

Численные методы решения линейных матричных неравенств

Работа [17] посвящена созданию численного метода построения КФЛ для задачи абсолютной устойчивости. В статье [8] аналогичная задача решается для специальных дифференциальных включений, которые будут описаны ниже. Поскольку в обоих случаях вопрос о существовании КФЛ сводится к вопросу о разрешимости системы ЛМН (1), то, по существу, и работа [8], и работа [17] посвящены созданию численных методов решения системы неравенств (1). Подчеркнем, что Е. С. Пятницкий был активным сторонником и в определенном смысле первопроходцем во внедрении численных методов в процесс нахождения функций Ляпунова. По мнению авторов работы [7], Е. С. Пятницкий и В. И. Скородинский были первыми [13, 15], кто сформулировал задачу поиска функции Ляпунова как задачу выпуклого программирования и затем применили алгоритм, гарантирующий решение этой задачи.

Кратко изложим численный метод решения системы (1) из работы [8]. Систему (1) можно заменить одним ЛМН, если матрицы, стоящие в левых частях неравенств в (1), разместить в качестве диагональных блоков большой матрицы и потребовать ее отрицательной определенности. Квадратичная форма, соответствующая этой большой матрице, имеет вид

$$F(L, X) = \sum_{s=1}^N (x_s)^T (A_s^T L + LA_s) x_s, \quad (6)$$

где вектор X является объединением N векторов $x_s \in R^n$. Теорема 2 из работы [8] устанавливает связь между множеством седловых точек функции $F(L, X)$ и множеством C всех решений системы (1): если $C \neq \emptyset$, то множество $D = \{(\tilde{L}; \tilde{X}) : \tilde{L} \in \bar{C}, \tilde{X} = 0\}$ является множеством всех седловых точек функции $F(L, X)$ из (6). Здесь и далее верхняя черта над множеством означает его замыкание.

Для поиска седловых точек функции (6) в работе [8] используется градиентный алгоритм вида

$$\dot{X} = \partial F(L, X) / \partial X, \quad \dot{L} = -\partial F(L, X) / \partial L, \quad (7)$$

для которого при $C \neq \emptyset$ устанавливается поточечная сходимость решений (7) при любых начальных условиях к точкам вида $(\tilde{L}; \tilde{X})$, $\tilde{X} = 0$. С этой целью метод функций Ляпунова используется уже для дифференциальных уравнений поискового алгоритма (7), причем в весьма интересной форме: используется набор функций Ляпунова, которые монотонно изменяются вдоль решений (7), но не являются положительно определенными.

В работе [11] теорема 2 [8] и результат о сходимости решений (7) цитируются весьма подробно (им посвящен отдельный раздел: "7.4. Kamenetskii-Pyatnitskii saddle point method") и даже эмоционально. В [11] говорится, что В. А. Каменецкий и Е. С. Пятницкий доказали "the remarkable fact" о сходимости решений системы (7) при любых начальных условиях к седловым точкам функции (6) в случае, если $C \neq \emptyset$, и несмотря на то что (6) не является вогнутой по X при всех L . На самом деле в работе [8] показано, что предельные точки $(\tilde{L}; \tilde{X}) \in D$, кроме случаев сходимости решений (7) к неустойчивым стационарным точкам.

Устойчивость гибридных систем и линейные матричные неравенства

Поскольку специфика матриц A_s при разработке численных методов не играет той роли, как при получении частотных критериев [12], то естественно перейти от задачи абсолютной устойчивости систем (2) и (4) к задаче устойчивости дифференциального включения [8]

$$\dot{x} \in F(x), F(x) = \{y: y = Ax, A \in \bar{A}\}, \quad (8)$$

где $\bar{A}$ — выпуклый многогранник в линейном пространстве $R^{n \times n}$ матриц порядка n . Считаем, что многогранник $\bar{A}$ задается своими вершинами A_s , $s = \overline{1, N}$, т. е. $\bar{A} = \text{conv}\{A_1, \dots, A_N\}$. Матрицы A_s теперь произвольного вида. Требования к производной функции Ляпунова $v(x)$ для анализа устойчивости включения (8) с компактным $F(x)$ сводятся к неравенству [18]

$$\max_{y \in F(x)} \langle \partial v / \partial x, y \rangle < 0, x \neq 0. \quad (9)$$

В случае КФЛ $v(x) = x^T Lx$ функция под знаком $\max$ в (9) имеет вид $\langle 2Lx, y \rangle$ и линейно зависит от y . Поскольку максимум линейной функции на многограннике достигается в крайних точках (вершинах), т. е. при $y = A_s x$, то существование КФЛ $v(x) = x^T Lx$, удовлетворяющей (9), эквивалентно разрешимости (1) при произвольных A_s , которые определяют (8).

В настоящее время весьма популярно изучение устойчивости гибридных систем, особенно систем с переключениями [19–21]. Наиболее простым классом таких систем являются си-

стемы с переключениями линейных автономных правых частей (линейные системы с переключениями). Множество решений линейных систем с переключениями является подмножеством решений соответствующего включения (8), если в нем ограничиться кусочно-постоянными и односторонне непрерывными в точках разрыва селекторами. Как отмечено в работе [20], замыкание множества решений линейной системы с переключениями совпадает с множеством решений включения (8), что вполне понятно, если принять во внимание некоторые свойства дифференциальных включений и то, как соотносятся кусочно-постоянные и измеримые функции. Таким образом, устойчивость линейных систем с переключениями при произвольных переключениях эквивалентна устойчивости дифференциального включения (8). Результаты А. П. Молчанова и Е. С. Пятницкого [22, 23], Е. С. Пятницкого и Л. Б. Рапопорта [24] по устойчивости включения (8) остаются основополагающими применительно к задаче устойчивости систем с переключениями и широко цитируются (см., например, [20, 21] и таблицу).

Перечисленные в таблице работы Е. С. Пятницкого и его учеников приведены также в работах [25], [8], [23], [24] в томе I, [15] в томе II. Среди перечисленных работ, конечно, выделяется статья [23] как по масштабу приведенных в ней результатов, так и по значению этих результатов для теории устойчивости, в том числе и систем с переключениями. К сожалению, пик цитирований этой работы приходится на те годы, когда оба автора уже не могли порадоваться своему заслуженному успеху.

Число цитирований по годам работ школы Пятницкого (по данным Scopus)

The number of citations by the years of publications of school of Pyatnitskiy (according to Scopus)

Год	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	87-02
PS [15]	1	0	0	0	0	1	0	1	0	2	5	0	2	0	1	2	15
KP [8]	—	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3
MP [23]	—	—	—	—	—	—	—	1	0	2	3	4	4	10	7	9	40
PR [24]	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	0	0	0	1	1	1	4
Год	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	03-18
PS [15]	1	1	0	4	0	0	0	1	0	0	1	1	2	0	0	0	11
KP [8]	1	4	1	5	2	1	5	3	1	4	1	0	1	3	6	5	43
MP [23]	8	12	14	14	17	14	21	17	16	8	26	17	13	19	14	6	236
PR [24]	3	5	4	8	11	3	3	4	8	2	5	4	4	1	2	0	67

В работах по линейным системам с переключениями для КФЛ, доставляющих решение системе (1), используется термин — общая квадратичная функция Ляпунова (ОКФЛ, Common Lyapunov function). Термин удачный, действительно, из (1) видно, что $v(x) = x^T L x$ является КФЛ для каждой линейной стационарной системы $\dot{x} = A_s x$ (Linear Time-Invariant, LTI). Вместе с тем, в соответствии с (9) эта КФЛ является функцией Ляпунова для включения (8) (обратите внимание на год выхода работы [18]). Здесь уместно отметить, что термины "система с переключениями" и "общая функция Ляпунова" используются (по-видимому, впервые) в работе [26] для систем второго порядка с переключениями между однородными системами.

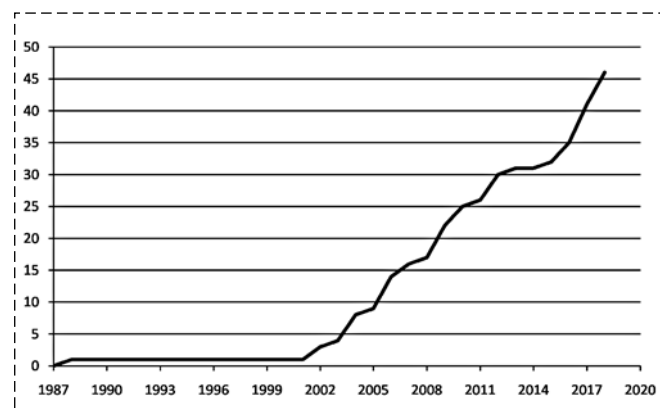
Критерий неразрешимости системы линейных матричных неравенств

Наконец, обратимся к следующему результату, приведенному в работе [8] в виде вспомогательного.

Лемма 1 [8]. Система матричных неравенств (1) не имеет решения если и только если существуют такие, не равные нулю одновременно, матрицы $N_s \geq 0$, что

$$\sum_{s=1}^N (A_s N_s + N_s A_s^T) = 0. \quad (10)$$

Решение каждого неравенства в системе (1) представляет собой открытый выпуклый конус, а наличие общего решения означает не пустое пересечение этих конусов. Из теории



Увеличение цитирований [8] по годам
Increasing of citations of [8] by the years

выпуклого анализа следует, что пустое пересечение таких конусов эквивалентно наличию в сопряженных конусах элементов, не равных одновременно нулю, чья сумма равна нулю. Именно это и отражает соотношение (10).

Непосредственно лемма 1 используется в работах [27, 28]. Во многом благодаря лемме 1 цитирование работы [8] за последние 10 лет увеличилось на порядок (см. таблицу, рисунок).

В работе [6, с. 9] приводится следующий результат, который для удобства сформулируем в виде утверждения.

Утверждение 1. У системы

$$L > 0, A_s^T L + L A_s < 0, s = 1, \dots, N, \quad (11)$$

отсутствует решение тогда и только тогда, когда существуют $N_s \geq 0$, не равные одновременно 0, такие что

$$\sum_{s=1}^N (A_s N_s + N_s A_s^T) = N_0. \quad (12)$$

В библиографических комментариях к разделу по поводу утверждения 1 в работе [6, с. 29] говорится, что в случае системы неравенств ляпуновского типа "эти" условия неразрешимости даются в работах [14] и [8, 17]. Отметим сразу, что в статье [17] результат, аналогичный лемме 1, отсутствует. В работе [14] рассматриваются линейные алгебраические неравенства, аргументами которых являются эрмитовы матрицы. Рассматривается чрезвычайно общая формулировка задачи о разрешимости таких неравенств. Одним из результатов является известная теорема о разрешимости Беллмана—Фаня. Попытки вывести в готовом виде лемму 1 (утверждение 1) из результатов [14] не привели к успеху. Кроме этого, в работе [14] соотношение рассматриваемой там задачи с вопросами устойчивости исчерпывается констатацией того факта, что в самом тривиальном случае эта задача мало отличается от матричного уравнения Ляпунова с $-E$ в правой части.

Другое дело — это используемая в работе [14] методика. Стоит выделить три момента. Во-первых, используется техника выпуклых конусов. Во-вторых, исследование разрешимости системы матричных неравенств сводится к применению теоремы отделимости (см., например, [29, с. 124]). Наконец, система матричных неравенств сводится к одному "большому"

матричному неравенству, матрица которого сформирована из диагональных блоков, которыми служат матрицы отдельных неравенств исходной системы.

В литературе в основном цитируется соотношение (12) со ссылкой на работу [6], что естественно, учитывая популярность монографии [6] (см., например, [19, с. 28]), тем приятнее находить работы более шепетильных авторов [20, 27, 30]. В [20] приводится (10) со ссылкой на [8] и (12) со ссылкой на [6] и отмечается, что второе легко следует из первого. В работе [27] приводится вариант леммы 1 для комплексных матриц (теорема 5 в [27]) и говорится, что задача нахождения ОКФЛ может быть переформулирована как задача полуопределенного программирования. Затем переход к двойственной задаче приводит к теореме 5 [27]. Там же отмечается, что трактовка этих идей дается в работе [31], а доказательство можно найти в статье [8].

Обсуждение результата леммы 1 было бы неполным, если не уделить внимание работе [31], которая в статье [27] названа "expository paper". В этой работе показывается, как широкий круг задач теории управления может быть решен с использованием тех моментов из методики [14], о которых говорилось выше. Применительно к интересующей нас системе (1) в работе [31] рассматривается ее комплексный вариант из двух неравенств, дополненный требованием $L > 0$, ссылка на [8] отсутствует.

Отметим, что несмотря на приведенную цитату и название работы [31] лемма 1 не имеет прямого отношения к задаче полуопределенного программирования [32], так как задача полуопределенного программирования — это в первую очередь экстремальная задача, а лемма 1 всего лишь дает двойственное описание множества, являющегося допустимым в этой задаче.

Сопоставления, обоснования, пояснения

Покажем, что приведенное утверждение 1 [6] является тривиальным следствием леммы 1 [8]. Система (11) отличается от системы (1) наличием дополнительного неравенства $L > 0$. Представим это неравенство в виде $A_0^T L + L A_0 < 0$ при $A_0 = -(1/2)E_n$, где E_n — единичная матрица порядка n . Следовательно, система (11) представлена в виде (1), и по лемме 1 [8] у этой системы отсутствует решение тогда и только тог-

да, когда существуют $N_s \geq 0$, не равные одновременно 0, такие что

$$\begin{aligned} A_0 N_0 + N_0 A_0^T + \sum_{s=1}^N (A_s N_s + N_s A_s^T) = \\ = -N_0 + \sum_{s=1}^N (A_s N_s + N_s A_s^T) = 0. \end{aligned}$$

Последнее соотношение в точности совпадает с (12).

Обоснование утверждения 1, которое дано в работе [6], фактически используется в статье [31] в качестве теоретического фундамента (теорема 1 [31]). Остановимся на этом поподробнее. Пусть S^n — пространство симметрических $n \times n$ матриц ($S^n \subset R^{n \times n}$). В работах [6, 31] ЛМН рассматривается в канонической форме

$$R[x] = \sum_{i=1}^m x_i A_i < 0, \quad (14)$$

где $x_i \in R^m$, $A_i \in S^n$. В [6, 31] в выражении для $R[x]$ еще присутствовал свободный член A_0 , который в (14) отброшен, чтобы неравенство было действительно линейным по x , а не аффинным.

Пусть сначала система (1) состоит из одного неравенства

$$A^T L + L A < 0. \quad (15)$$

О том, как неравенство (15) представить в канонической форме (14), можно посмотреть, например, в работе [3, с. 124]. В этом случае размерность вектора x совпадает с размерностью пространства S^n , т. е. $m = n(n+1)/2$. Вектор x этом случае отождествляется с симметрической матрицей $X \in S^n$. Неравенство (14) можно еще представить как уравнение на конусе $R[X] = Y$, $Y \in -K^+$, как это делается в работе [33]. Здесь K^+ — конус положительно определенных матриц. Конус K^+ , как известно [33, 34], является открытым конусом, причем его замыкание K^+ (конус неотрицательных матриц) есть самосопряженный конус, т. е. $(K^+)^* = K^+$. Напомним, что конус K^* , сопряженный конусу K по отношению к стандартному скалярному произведению $\langle W, V \rangle = \text{tr}(WV)$ в пространстве S^n , определяется соотношением $K^* = \{W : \langle W, V \rangle \geq 0, V \in K\}$.

Отсутствие решений у ЛМН (14) означает, что $R[S^n] \cap K^- = \emptyset$ ($K^- = -K^+$). Тогда по тео-

реме отделимости [29, с. 124] существует $N \in S^n$, $N \neq 0$, такой что $\langle N, Y \rangle \geq \langle N, W \rangle$ для любых $Y \in R[S^n]$ и $W \in K^-$, или $\langle N, R[X] \rangle \geq \langle N, W \rangle$ для любых $X \in S^n$ и $W \in K^-$. Последнее соотношение можно переписать следующим образом:

$$\langle R^*[N], X \rangle \geq \langle N, W \rangle, X \in S^n, W \in K^-, \quad (16)$$

где оператор $R^*[\cdot]$, сопряженный оператору $R[\cdot]$ по отношению к стандартному скалярному произведению в пространстве S^n , определяется соотношением $\langle W, R[V] \rangle = \langle R^*[W], V \rangle$, которое должно выполняться для любых $W, V \in S^n$. Выполнение условия (16) при некотором $\tilde{W}$ и любых $X \in S^n$ возможно, если и только если $R^*[N] = 0$. Таким образом, (16) приобретает вид: $\langle N, W \rangle \geq 0$ для любых $W \in K^+$, откуда следует, что $N \in (K^+)^* = K^+$ или $N \geq 0$.

Оператор $R^*[\cdot]$, сопряженный оператору из (15), определяется соотношением

$$\begin{aligned} \langle R[L], W \rangle &= \langle A^T L + LA, W \rangle = \\ &= \text{tr}(A^T L W + LA W) = \text{tr}(L(WA^T + AW)) = \\ &= \langle L, WA^T + AW \rangle = \langle L, R^*[W] \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, $R^*[W] = WA^T + AW$. В результате пришли к выводу, что у неравенства (16) отсутствует решение тогда и только тогда, когда существует матрица $N \geq 0$, $N \neq 0$, такая что $NA^T + AN = 0$.

Исходя из этого результата в работе [31] доказывается известный результат [27, 35]: неравенство (15) разрешимо, если и только если матрица A обладает регулярной инерцией (доказательство приводится для комплексного случая, но результат верен и для действительного). Напомним, что инерцией матрицы A называется [27, 35] упорядоченная тройка чисел:

$$\text{In}(A) = (i_+(A), i_-(A), i_0(A)),$$

где $i_+(A)$, $i_-(A)$, $i_0(A)$ — число собственных чисел матрицы A с положительной, отрицательной и нулевой действительными частями соответственно. Если $i_0(A) = 0$, то матрица A обладает регулярной инерцией.

От одного неравенства вернемся к системе (1). В доказательстве леммы 1 [8] говорится, что из гурвицевости матриц A_s следует невырожденность (обратимость) линейных опера-

торов $R_s[L] = A_s^T L + LA_s$. Ключевые слова здесь не гурвицевость матриц, а невырожденность линейных операторов. Гурвицевость матриц A_s , очевидно, предполагается в утверждении из работы [6], так как это является необходимым условием совместности системы (11). На самом деле лемма 1 [8] справедлива при условии невырожденности операторов Ляпунова $R_s[L] = A_s^T L + LA_s$, т. е. при $\lambda_i(A_s) + \lambda_j(A_s) \neq 0$, $i, j = 1, n$, $s = 1, N$ (при таких условиях лемма 1 приведена в кандидатской диссертации автора, 1984 г.). Таким образом, лемма 1 применима для исследования разрешимости (1) в задачах абсолютной неустойчивости систем (2) и (4) и неустойчивости включения (8). В работе [8] рассматриваются как задача устойчивости, так и задача неустойчивости, поэтому отсутствие соответствующих разъяснений в доказательстве леммы 1 [8] теперь можно объяснить только стремлением к краткости изложения.

В работах [8, 17, 36] все результаты обобщаются на системы матричных неравенств общего вида

$$R_s[L] < 0, s = 1, \dots, N, \quad (18)$$

где $R_s[\cdot]$ — линейные операторы в пространстве S^n . В случае $R_s[L] = A_s^T L + LA_s$ система (18) совпадает с (1). Приведем полную версию леммы 1 для системы (18) из упомянутой диссертации.

Лемма 2. Пусть в (18) $R_s[\cdot]$ являются невырожденными и имеют обратные операторы $R_s^{-1}[\cdot]$. Тогда система матричных неравенств (18) не имеет решения в том и только в том случае, если существуют такие не равные нулю одновременно матрицы $N_s \geq 0$, что

$$\sum_{s=1}^N R_s^*[N_s] = 0, \quad (19)$$

где $R_s^*[\cdot]$ — оператор, сопряженный оператору $R_s[\cdot]$.

Доказательство леммы 2. Пусть множество C_s представляет собой совокупность всех решений s -го неравенства $R_s[L] < 0$ из системы (18). Следовательно, множество C всех решений системы (18) является пересечением конусов C_s , т. е. $C = \bigcap_{s=1}^N C_s$. В соответствии с теоремой Дубовицкого—Милютина [37] пересечение выпуклых открытых конусов C_s пусто в том и только в том случае, если существуют такие не равные одновременно нулю матрицы M_s , что

$$\sum_{s=1}^N M_s = 0, M_s \in C_s^*, s = 1, \dots, N, \quad (20)$$

где C_s^* — конус, сопряженный конусу C_s . Очевидно, что C_s является образом конуса K^- при линейном отображении $R_s^{-1}[\cdot]$, т.е. $C_s = R_s^{-1}[K^-]$. Матрицы N_s определим через матрицы M_s с помощью соотношений

$$N_s = -(R_s^{-1})^*[M_s], s = 1, \dots, N, \quad (21)$$

где $(R_s^{-1})^*[\cdot]$ — оператор, сопряженный оператору $R_s^{-1}[\cdot]$. Из невырожденности операторов получим

$$M_s = ((R_s^{-1})^*)^{-1}[-N_s] = -R_s^*[N_s], s = 1, \dots, N. \quad (22)$$

Последнее соотношение вместе с (20) дает (19).

Осталось показать, что для матриц N_s из (21) справедливы соотношения $N_s \geq 0$. Для скалярного произведения матрицы N_s и произвольной матрицы $W \in K^+$ имеем соотношение

$$\begin{aligned} \langle N_s, W \rangle &= \langle -(R_s^{-1})^*[M_s], W \rangle = \\ &= \langle M_s, R_s^{-1}[-W] \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Поясним последнее неравенство. $M_s \in C_s^*$ означает, что $\langle M_s, L \rangle \geq 0$ при всех $L \in C_s$, а $R_s^{-1}[-W] \in C_s$. Таким образом, из соотношения (23) следует, что $N_s \in (K^+)^* = K^+$, $s = 1, \dots, N$. Лемма 2 доказана.

Разумеется, в случае одного неравенства подход, основанный на теореме Дубовицкого—Милютина, требует изменений. Как сказано выше, отсутствие решений у ЛМН (14) означает, что $R[S^n] \cap K^- = \emptyset$. Множества $R[S^n]$ и K^- — выпуклые конусы, причем K^- — открытый. Поэтому по теореме Дубовицкого—Милютина [37] пересечение этих конусов пусто тогда и только тогда, когда существуют такие не равные одновременно нулю матрицы $N_1 \in (R[S^n])^*$ и $N_2 \in (K^-)^*$, что $N_1 + N_2 = 0$. $N_1 \in (R[S^n])^*$ означает, что $\langle N_1, P \rangle \geq 0$ при всех $P \in R[S^n]$ или

$$\langle N_1, A^T X + XA \rangle = \langle N_1 A^T + A N_1, X \rangle \geq 0 \quad (24)$$

при всех $X_1 \in S^n$, что возможно только если $N_1 A^T + A N_1 = 0$. Вместе с тем $N_2 \in (K^-)^*$ означает, что $\langle N_2, W \rangle \geq 0$ при всех $W \in K^-$ или $N_1 = -N_2 \in K^+$ — искомые соотношения получены.

В теореме 5 [27] и преамбуле к ней гурвицевость матриц A_s (равно как и невырожден-

ность соответствующих операторов) не оговаривается. Тем не менее лемма 1 в работе [27] используется для исследования системы (1), в которой матрицы A_s всего лишь обладают регулярной инерцией. В связи с этим возникает вопрос о справедливости леммы 1 для таких матриц. Требование регулярной инерции матриц A_s в (1) применительно к системе (18) эквивалентно требованию разрешимости каждого из неравенств этой системы по отдельности. Требование это ограничительным не является. Если в системе (18) i -е неравенство неразрешимо, то, принимая во внимание приведенное выше условие неразрешимости одного неравенства, для выполнения соотношения (19) в нем достаточно положить все $N_s = 0$ при $s \neq i$. Исходя из этого сделаем необходимые поправки в лемме 2.

В доказательстве леммы 2 до формулы (20) все остается по-прежнему, а дальше появляются обратные операторы, которых теперь нет. Поэтому рассмотрим множества $D_s = R_s^*[\overline{K^+}]$ — образы K^+ при действии операторов $R_s^*[\cdot]$. Каждое D_s — конус, сопряженный к нему множество D_s^* определяется соотношением

$$\begin{aligned} D_s^* &= \{M : \langle M, P \rangle \geq 0, P \in D_s\} = \\ &= \{M : \langle M, W A_s^T + A_s W \rangle \geq 0, W \in \overline{K^+}\} = \\ &= \{M : \langle A_s^T M + M A_s, W \rangle \geq 0, W \in \overline{K^+}\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, $(-D_s^*) = \overline{C_s}$. Так как $(\overline{K})^* = (K)^*$ (см., например, [38, с. 25]), то $(-D_s^*)^* = (\overline{C_s})^* = (C_s)^*$. Так как $D_s = \overline{D_s}$, то $(-D_s^*)^* = -D_s = (C_s)^*$ (см. там же, с. 26). Теперь понятно, что матрицы $M_s \in C_s^*$ из (20) можно определить соотношением $-M_s = R_s^*[N_s]$, $N_s \in \overline{K^+}$, $s = 1, \dots, N$. В результате получена следующая модификация (расширение) леммы 2.

Лемма 2*. Система матричных неравенств (18) не имеет решения в том и только в том случае, если существуют такие не равные нулю одновременно матрицы $N_s \geq 0$, что выполнено соотношение (19).

Для полноты картины приведем доказательство леммы 2*, используя методику работ [6, 14, 31]. В соответствии с этой методикой система матричных неравенств (18) сводится к одному "большому" матричному неравенству, матрица $R[L]$ которого сформирована из N диагональных блоков, которыми служат матрицы $R_s[L]$ отдельных неравенств исходной систе-

мы, т. е. $R[L] = \text{diag}(R_1[L], \dots, R_N[L])$. Таким образом, определен оператор $R[L]: S^n \rightarrow S$, где $S = S^n \times \dots \times S^n \subset S^{nN}$. Скалярное произведение в пространстве S определяется соотношением $\langle W, V \rangle_S = \sum_{s=1}^N \langle W_s, V_s \rangle = \sum_{s=1}^N \text{tr}(W_s V_s)$, $W = \text{diag}(W_1, \dots, W_N)$, $V = \text{diag}(V_1, \dots, V_N)$, $W_s, V_s \in S^n$. Аналогом конуса K^+ в пространстве S служит множество (конус) $K^+ = K^+ \times \dots \times K^+$.

Отсутствие решений у системы (18) означает, что $R[S^n] \cap K^- = \emptyset$ ($K^- = -K^+$). Тогда по теореме отделимости [29, с. 124] существует $N = \text{diag}(N_1, \dots, N_N) \in S$, $N \neq 0$, такой что $\langle N, Y \rangle_S \geq \langle N, W \rangle_S$ для любых $Y \in R[S^n]$ и $W \in K^-$, или $\langle N, R[X] \rangle_S \geq \langle N, W \rangle_S$ для любых $X \in S^n$ и $W \in K^-$. Последнее неравенство можно переписать следующим образом:

$$\langle R^*[N], X \rangle \geq \langle N, W \rangle_S, X \in S^n, W \in K^-, \quad (26)$$

где оператор $R^*[\cdot]$, сопряженный оператору $R[\cdot]$ по отношению к скалярному произведению в пространстве S , определяется соотношением

$$\begin{aligned} \langle W, R[V] \rangle_S &= \sum_{s=1}^N \langle W_s, R_s[V] \rangle = \sum_{s=1}^N \langle R_s^*[W_s], V \rangle = \\ &= \left\langle \sum_{s=1}^N R_s^*[W_s], V \right\rangle = \langle R^*[W], V \rangle, \end{aligned}$$

которое должно выполняться для любых $W \in S$ и $V \in S^n$, т. е. $R^*[W] = \sum_{s=1}^N R_s^*[W_s]$. Выполнение (26) при некотором $\tilde{W}$ и любых $X \in S^n$ возможно если и только если $R^*[N] = \sum_{s=1}^N R_s^*[N_s] = 0$. Таким образом, (26) приобретает вид: $\langle N, W \rangle_S \geq 0$ для любых $W \in K^+$, откуда следует, что $N \in (K^+)^*$. Действительно,

$$(K^+)^* = \left\{ N : \langle N, W \rangle_S = \sum_{s=1}^N \langle N_s, W_s \rangle \geq 0, W_s \in K^+ \right\}.$$

Другими словами, $(K^+)^* = \overline{K^+} \times \dots \times \overline{K^+} = \overline{K^+}$ и $N = \text{diag}(N_1, \dots, N_N) \in (K^+)^*$ означает, что $N_s \in K^+$ и $N_s \geq 0$. "Другое" доказательство леммы 2* завершено.

Вопрос о наличии ОКФЛ для дискретной системы с переключениями (дискретного включения) сводится [8] к вопросу о разрешимости системы

$$A_s^T L A_s - L < 0, s = 1, \dots, N. \quad (27)$$

В работе [31] для исследования системы (27) предлагается с помощью дробно-линейного преобразования перейти к исследованию эквивалентной системы (1). Этого можно не делать. Оператор $R^*[\cdot]$, сопряженный дискретному оператору Ляпунова $R[L] = A^T L A - L$, определяется соотношением

$$\begin{aligned} \langle R[L], W \rangle &= \langle A^T L A - L, W \rangle = \\ &= \text{tr}(A^T L A W - L W) = \text{tr}(L(A W A^T - W)) = \\ &= \langle L, A W A^T - W \rangle = \langle L, R^*[W] \rangle. \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, $R^*[W] = A W A^T - W$. Система (27) совпадает с системой (18) при $R_s[L] = A_s^T L A_s - L$, ее разрешимость определяется леммой 2*, в которой сопряженные операторы имеют вид $R_s^*[W] = A_s W A_s^T - W$.

Приведенный в следующем разделе пример является, с одной стороны, искусственным и экзотическим, с другой стороны, показывает, как можно использовать лемму 2* для получения условий локализации собственных чисел матриц.

Пример

Приведем пример следующей системы из двух матричных неравенств:

$$\begin{aligned} R_1[L] &= A^T L + L A < 0; \\ R_2[L] &= A^T L A - L < 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Операторы $R_s^*[W]$, сопряженные операторам из (29), определяются соотношениями (17) и (28), т. е. имеют вид

$$R_1^*[W] = W A^T + A W, R_2^*[W] = A W A^T - W.$$

В соответствии с леммой 2* соотношение, определяющее совместность системы (29), имеет вид

$$N_1 A^T + A N_1 + A N_2 A^T - N_2 = 0. \quad (30)$$

Если из соотношения (30) и $N_s \geq 0$ следует $N_1 = N_2 = 0$, то система (29) разрешима. Однако из этого не следует, что решения положительно определены ($L > 0$), или матрица A гурвицева ($\max_i \text{Re } \lambda_i(A) < 0$) или шурова ($\max_i |\lambda_i(A)| < 1$) ($L \neq 0$ — случай неустойчивости). Если в системе (29) дополнительно потребовать гурви-

цевость матрицы A , то из ее совместности будет автоматически следовать $L > 0$ и шуровость матрицы A , если потребовать шуровость матрицы A , то автоматически получим $L > 0$ и гурвицевость A ($L > 0$ — случай устойчивости). Если в системе (29) дополнительно потребовать $L > 0$, то к системе (29) добавится третье неравенство $R_0[L] = -L < 0$, $R_0^*[W] = -W$. В соответствии с леммой 2* совместность расширенной системы из трех неравенств определяется соотношением

$$-N_0 + N_1 A^T + A N_1 + A N_2 A^T - N_2 = 0. \quad (31)$$

Если из соотношения (31) и $N_s \geq 0$ следует $N_s = 0$, то расширенная система совместна (аналог утверждения 1), а из ее совместности автоматически следует и гурвицевость, и шуровость матрицы A . В этом случае все собственные числа матрицы A расположены в левом открытом единичном полукруге комплексной плоскости.

Заключение

В работе дается краткий обзор результатов, полученных на начальном этапе развития теории ЛМН. В работе [11] говорится, что система (1) впервые рассмотрена в работах школы Е. С. Пятницкого. Вместе с тем в работе [14] рассматривается система матричных неравенств гораздо более общего вида, чем система (1). Выбирая индексы в системе из работы [14], можно получить систему (1). В [14] практически отсутствует соотнесение рассматриваемой там задачи с вопросами устойчивости. В работах Е. С. Пятницкого и его учеников система (1) появляется как необходимое и достаточное условие, говоря современным языком, существования ОКФЛ. Таким образом, приходим к выводу: в работе [14] система (1) присутствует в качестве алгебраического объекта, а в работах [12, 15] — как критерий существования ОКФЛ в задаче устойчивости.

В работе показано, что утверждение 1 [6] является простым следствием леммы 1, но дело не только в этом. Дополнительное условие $L > 0$ в утверждении 1 с необходимостью влечет требование гурвицевости матриц A_s , что означает невырожденность соответствующих операторов. Требование невырожденности снимается в полученной здесь лемме 2*, которая обобщает и уточняет лемму 1. Доказательство леммы 2*

дается как с помощью теоремы Дубовицкого — Милютина (методика [8]), так и с помощью методики из работы [14]. Востребованность и цитируемость (что, к сожалению, не всегда одно и то же) работы [8] (см. таблицу) имеет огромную задержку по времени, которая скорее означает не тот факт, что работа слабая, а то, что работа опередила свое время.

Список литературы

1. Чайковский М. М., Курдюков А. П. Алгебраические уравнения Риккати и линейные матричные неравенства для систем дискретного времени. М.: ИПУ РАН, 2005.
2. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
3. Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Щербаков П. С. Управление линейными системами: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
4. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
5. Емельянова Ю. П., Пакшин П. В., Пакшина Н. А. Матричные уравнения и неравенства второго порядка: учеб. пособие. Нижний Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т им. П. Е. Алексеева, 2013.
6. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM. Philadelphia. 1994.
7. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. History of Linear Matrix Inequalities in Control Theory // Proceeding of the American Control Conference, Baltimore, Maryland, 1994. P. 31—34.
8. Kamenetskiy V. A., Pyatnitskiy Ye. S. An iterative method of Lyapunov function construction for differential inclusions // Systems and Control Letters. 1987. Vol. 8. P. 445—451.
9. Горбунов А. В., Каменецкий В. А. LMI, абсолютная устойчивость и гибридные системы // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Матер. XIII Международной конференции (1—3 июня 2016 г., Москва). М.: ИПУ РАН, 2016. С. 86—87.
10. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
11. Boyd S., Yang Q. Structured and simultaneous Lyapunov functions for system stability problems // Internat. J. Control 1989. Vol. 49, N. 6. P. 2215—2240.
12. Каменецкий В. А. Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с несколькими нелинейными нестационарными элементами // Автоматика и телемеханика. 1983. № 12. С. 20—30.
13. Пятницкий Е. С., Скорodinский В. И. Численные методы построения функций Ляпунова и критерии абсолютной устойчивости в форме численных процедур // Автоматика и телемеханика. 1983. № 11. С. 52—63.
14. Bellman R., Fan K. On systems of linear inequalities in Hermitian matrix variables // Proc. of Symposia in Pure Mathematics. American Math. Society. 1963. Vol. 7. P. 1—11.
15. Pyatnitskiy Ye. S., Skorodinский V. I. Numerical methods of Liapunov function construction and their application to the absolute stability problem // Systems and Control Letters. 1982. Vol. 2. P. 130—135.
16. Пятницкий Е. С. Абсолютная устойчивость нестационарных нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. 1970. № 1. С. 5—15.
17. Каменецкий В. А., Пятницкий Е. С. Градиентный метод построения функций Ляпунова в задачах абсолют-

ной устойчивости // Автоматика и телемеханика. 1987. № 1. С. 3—12.

18. **Алимов Ю. И.** О применении прямого метода Ляпунова к дифференциальным уравнениям с неоднозначными правыми частями // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. XXII. № 7. С. 817—830.

19. **Liberzon D.** Switching in Systems and Control. Boston, MA: Birkhäuser, 2003.

20. **Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C.** Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems // SIAM Rev. 2007. N. 4. P. 545—592.

21. **Lin H., Antsaklis P. J.** Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: a Survey of Recent Results // IEEE Trans. Automat. Contr. 2009. N. 2. P. 308—322.

22. **Молчанов А. П., Пятницкий Е. С.** Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления. I, II, III // Автоматика и телемеханика. 1986, № 3. С. 63—73; № 4. С. 5—15; № 5. С. 38—49.

23. **Molchanov A. P., Pyatnitskiy E. S.** Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory // Systems Control Lett. 1989. Vol. 13. P. 59—64.

24. **Pyatnitskiy E. S., Rapoport L. B.** Criteria of asymptotic stability of differential inclusions and periodic motions of time-varying nonlinear control systems // IEEE Trans. Circuits Syst. I. 1996. Vol. 43, N. 3. P. 219—229.

25. **Пятницкий Е. С.** Избранные труды: в 3 т. М.: Физматлит, 2005.

26. **Филиппов А. Ф.** Условия устойчивости однородных систем с произвольными переключениями режимов // Автоматика и телемеханика. 1980. № 8. С. 48—55.

27. **Laffey T. J., Smigoc H.** Common Lyapunov solutions for two matrices whose difference has rank one // Linear Algebra and its Applications. 2009. Vol. 431. P. 228—240.

28. **Поздьяев В. В.** Об аналитическом решении систем матричных неравенств, двойственных к системам неравенств Ляпунова // Управление большими системами. Вып. 28. М.: ИПУ РАН, 2010. С. 58—74.

29. **Алексеев В. М., Тихомиров И. М., Фомин С. И.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

30. **Griggs W. M., King C. K., Shorten R. N., Mason O., Wulff K.** Quadratic Lyapunov functions for systems with state-dependent switching // Linear Algebra and its Applications. 2010. Vol. 433. P. 52—63.

31. **Balakrishnan V., Vandenberghe L.** Semidefinite programming duality and linear time-invariant systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2003. Vol. 48, N. 1. P. 30—41.

32. **Vandenberghe L., Boyd S.** Semidefinite programming // SIAM Rev. 1996. Vol. 38, N. 1. P. 49—95.

33. **Berman A., Ben-Israel A.** More on linear inequalities with applications to matrix theory // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1971. Vol. 33. P. 482—496.

34. **Фрадков А. Л.** Теоремы двойственности в некоторых невыпуклых экстремальных задачах // Сибирский математический журнал. 1973. Т. 14, № 2. С. 357—383.

35. **Ostrowski A., Schneider M.** Some theorems on the inertia of general matrices // J. Math. Anal. Appl. 1962. Vol. 4. P. 72—84.

36. **Каменецкий В. А.** Градиентный метод построения функций Ляпунова для нелинейных динамических систем / Оптимизация в сложных системах. Сер. "Вопросы кибернетики" / Под ред. П. П. Пархоменко. М.: Академия наук СССР, 1988. С. 55—72.

37. **Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.** Задача на экстремум при наличии ограничений // ЖВМиМФ. 1965. Т. 5, № 3. С. 395—453.

38. **Пшеничный Б. Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

Linear Matrix Inequalities in Stability Problems: Retrospective and Theoretical Aspects

V. A. Kamenetskiy, vlakam@ipu.ru,

Trapeznikov Institute of Control Sciences Russian Academy of Sciences, Moscow, 347900, Russian Federation

Corresponding author: **Kamenetskiy Vladimir A.**, PhD, Leading Researcher, Trapeznikov Institute of Control Sciences Russian Academy of Sciences, Moscow, 347900, Russian Federation, e-mail: vlakam@ipu.ru

Accepted on August 15, 2019

Abstract

Some aspects of the development of the theory of linear matrix inequalities are considered. A number of results obtained at the initial stage of the development of this theory, both in the development of numerical methods and in obtaining analytical conditions for their solvability, are highlighted. The main attention is focused on the system of linear matrix inequalities arising in solving the absolute stability problem. E. S. Pyatnitskiy and his followers showed that the solvability of this system is a criterion for the existence of a quadratic Lyapunov function and a sufficient condition for absolute stability. The prerequisites leading to this result are considered here. The use of the considered system of inequalities for studying the stability of hybrid systems described by differential inclusions and switching systems is shown. An analysis is given of citing some works of Pyatnitskiy's school on the theory of stability and the theory of systems of linear matrix inequalities, from which the relevance of the results of these works at the present time follows.

In developing numerical methods, it was first shown in the work of Pyatnitskiy and Skorodinskiy that the solvability problem for a system of linear matrix inequalities reduces to a convex programming problem. An interesting gradient algorithm for finding solutions to such a system is also presented. In analyzing analytical conditions of solvability, an unsolvability criterion for the system of our interest obtained by Kamenetskiy and Pyatnitskiy is noted. In modern terms, this result can be considered as a description of an admissible set in the dual semidefinite programming problem. A similar result is given in the famous book by S. Boyd et al. The paper shows that the result of Boyd et al. is a simple corollary of the unsolvability criterion. Here the unsolvability criterion is generalized and refined.

Keywords: quadratic Lyapunov functions, linear matrix inequalities, absolute stability, switched systems

Acknowledgements: This work was supported by the Program of the Presidium of the Russian Academy of Sciences, project no. I. 29.

For citation:

Kamenetskiy V. A. Linear Matrix Inequalities in Stability Problems: Retrospective and Theoretical Aspects, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol.20, no.11, pp. 643–654.

DOI: 10.17587/mau.20.643-654

References

1. **Chaikovskii M. M., Kurdyukov A. P.** Algebraic Riccati Equations and Linear Matrix Inequalities for Discrete-Time Systems, Moscow, Inst. Probl. Upravlen. RAN, 2005 (in Russian).
2. **Balandin D. V., Kogan M. M.** Synthesis of Control Laws Based on Linear Matrix Inequalities, Moscow, Fizmatlit, 2007 (in Russian).
3. **Polyak B. T., Shcherbakov P. S.** Robust Stability and Control, Moscow, Nauka, 2002 (in Russian).
4. **Polyak B. T., Khlebnikov M. V., Shcherbakov P. S.** Control of Linear Systems: Technique of linear matrix inequalities, Moscow, LENAND, 2014 (in Russian).
5. **Emel'janova Ju. P., Pakshin P. V., Pakshina N. A.** Matrix Equations and Inequalities of Second Order: Study Guide, Nizhny Novgorod, Publishing house of Nizhny Novgorod State Techn. Univ., 2013.
6. **Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.** Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM. Philadelphia, 1994.
7. **Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.** History of Linear Matrix Inequalities in Control Theory, *Proceeding of the American Control Conference*, Baltimore, Maryland, 1994, pp. 31–34.
8. **Kamenetskiy V. A., Pyatnitskiy Ye. S.** An Iterative Method of Lyapunov Function Construction for Differential Inclusions, *Systems and Control Letters*, 1987, vol. 8, pp. 445–451.
9. **Gorbunov A. V., Kamenetskiy V. A.** LMI, Absolute Stability and Hybrid Systems, *Stability and oscillations of nonlinear control systems: Proceedings of the XIII International Conference*, Moscow, Publishing house of IPU RAS, 2016, pp. 86–87 (in Russian).
10. **Gelig A. Kh., Leonov G. A., Yakubovich V. A.** Stability of Nonlinear Systems with a Nonunique Equilibrium State, Moscow, Nauka, 1978 (in Russian).
11. **Boyd S., Yang Q.** Structured and Simultaneous Lyapunov Functions for System Stability Problems, *Internat. J. Control*, 1989, vol. 49, no. 6, pp. 2215–2240.
12. **Kamenetskiy V. A.** Absolute Stability and Absolute Instability of Control Systems with Several Nonlinear Nonstationary Elements, *Autom. Remote Control*, 1983, vol. 44, no. 12, pp. 1543–1552 (in Russian).
13. **Pyatnitskii E. S., Skorodinskii V. I.** Numerical Method of Construction of Lyapunov Functions and Absolute Stability Criteria in the Form of Numerical Procedures, *Autom. Remote Control*, 1983, vol. 44, no. 11, pp. 1427–1437 (in Russian).
14. **Bellman R., Fan K.** On Systems of Linear Inequalities in Hermitian Matrix Variables, In V. L. Klee, editor, *Convexity, volume 7 of Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pp. 1–11, American Math. Society, 1963.
15. **Pyatnitskiy Ye. S., Skorodinskii V. I.** Numerical methods of Liapunov function construction and their application to the absolute stability problem, *Systems and Control Letters*, 1982, vol. 2, pp. 130–135.
16. **Pyatnitskii E. S.** Absolute Stability of Nonstationary Nonlinear Systems, *Autom. and Remote Control*, 1970, vol. 31, no. 1, pp. 1–9 (in Russian).
17. **Kamenetskiy V. A., Pyatnitskii E. S.** Gradient Method of Constructing Lyapunov Functions in Problems of Absolute Stability, *Autom. Remote Control*, 1987, vol. 48, no. 1, pp. 1–9 (in Russian).
18. **Alimov Yu. I.** On the Application of Lyapunov's Direct Method to Differential Equations with Ambiguous Right Sides, *Autom. Remote Control*, 1961, vol. 22, no. 7, pp. 713–725 (in Russian).
19. **Liberzon D.** Switching in Systems and Control, Birkhäuser, Boston, MA, 2003.
20. **Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C.** Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems, *SIAM Rev.*, 2007, no. 4, pp. 545–592.
21. **Lin H., Antsaklis P. J.** Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: a Survey of Recent Results, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2009, no. 2, pp. 308–322.
22. **Molchanov A. P., Pyatnitskii E. S.** Lyapunov Functions that Specify Necessary and Sufficient Conditions of Absolute Stability of Nonlinear Nonstationary Control Systems. I, II, III, *Autom. Remote Control*, 1986, vol. 47, no. 3, pp. 344–354; no. 4, pp. 443–451; no. 5, pp. 620–630 (in Russian).
23. **Molchanov A. P., Pyatnitskiy E. S.** Criteria of Asymptotic Stability of Differential and Difference Inclusions Encountered in Control Theory, *Systems and Control Letters*, 1989, vol. 13, pp. 59–64.
24. **Pyatnitskiy E. S., Rapoport L. B.** Criteria of Asymptotic Stability of Differential Inclusions and Periodic Motions of Time-varying Nonlinear Control Systems, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, I, 1996, vol. 43, no. 3, pp. 219–229.
25. **Pyatnitskii E. S.** Selected Works: in 3 vol., Moscow, Fizmatlit, 2005 (in Russian).
26. **Filippov A. F.** Stability Conditions in Homogeneous Systems with Arbitrary Regime Switching, *Autom. Remote Control*, 1980, vol. 41, no. 8, pp. 1078–1085.
27. **Laffey T. J., Smigoc H.** Common Lyapunov Solutions for Two Matrices whose Difference has Rank One, *Linear Algebra and its Applications*, 2009, vol. 431, pp. 228–240.
28. **Pozdyaev V. V.** On an Analytical Solution of Systems of Matrix Inequalities Dual to Lyapunov Inequality Systems, *UBS*, 2010, vol.28, pp. 58–74 (in Russian).
29. **Alekseev V. M., Tikhomirov I. M., Fomin S. I.** Optimal Control, Moscow, Nauka, 1979 (in Russian).
30. **Griggs W. M., King C. K., Shorten R. N., Mason O., Wulf K.** Quadratic Lyapunov Functions for Systems with State-dependent Switching, *Linear Algebra and its Applications*, 2010, vol. 433, pp. 52–63.
31. **Balakrishnan V., Vandenberghe L.** Semidefinite Programming Duality and Linear time-invariant systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 2003, vol. 48, no. 1, pp. 30–41.
32. **Vandenberghe L., Boyd S.** Semidefinite programming, *SIAM Rev.*, 1996, vol. 38, no. 1, pp. 49–95.
33. **Berman A., Ben-Israel A.** More on Linear Inequalities with Applications to Matrix Theory, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1971, vol. 33, pp. 482–496.
34. **Fradkov A. L.** Duality Theorems in Some Nonconvex Extremal Problems, *Siberian Math. J.*, 1973, vol. 14, no. 2, pp. 357–383 (in Russian).
35. **Ostrowski A., Schneider M.** Some Theorems on the Inertia of General Matrices, *J. Math. Anal. Appl.*, 1962, vol. 4, pp. 72–84.
36. **Kamenetskiy V. A.** Gradient Method for Constructing Lyapunov Functions for Nonlinear Dynamical Systems / *Optimization in complex systems. Ser. "Questions of Cybernetics"*. Ed. by P. P. Parkhomenko, Moscow, Academy of Sciences of the USSR, 1988, pp. 55–72 (in Russian).
37. **Dubovitskii A. Ya., Milyutin A. A.** Extremum Problems in the Presence of Restrictions, *U. S. S. R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1965, vol. 5, no. 3, pp. 1–80 (in Russian).
38. **Pshenichny B. N.** Convex Analysis and Extremal Problems, Moscow, Nauka, 1980 (in Russian).