УДК 517.977 DOI: 10.17587/mau.20.589-599

Е. Е. Онегин, мл. науч. сотр., evgeny.onegin@phystech.edu
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

Оптимальная стабилизация квазилинейной стохастической системы с управляемыми параметрами

Работа посвящена задаче оптимальной стабилизации квазилинейной стохастической системы с управляемыми параметрами. Системы такого вида описываются линейными стохастическими дифференциальными уравнениями с мультипликативными возмущениями, матрицы которых, в общем случае нелинейно, зависят от управления. Критерий качества представляет собой модификацию классического квадратичного критерия качества управления. Задача состоит в минимизации критерия на множестве допустимых процессов управления. Данная постановка задачи интересна тем, что она позволяет изучать широкий спектр вопросов оптимизации линейных систем с мультипликативными возмущениями, в том числе: оптимизацию конструктивных параметров системы, задачи оптимальной стабилизации при наличии ограничений на коэффициенты линейного регулятора в виде неравенств, задачи оптимальной стабилизации линейных стохастических систем при наличии информационных ограничений. Основным результатом работы являются необходимые условия оптимальности вектора параметров в задаче оптимальной стабилизации квазилинейной стохастической системы с управляемыми параметрами. Предложена процедура градиентного типа синтеза оптимального стабилизирующего вектора параметров. Кроме того, на основе полученных условий оптимальности построен алгоритм синтеза субоптимального программного управления в рассматриваемой задаче. Результатом работы предложенного алгоритма является кусочно-постоянное управление, которое дает значение критерия гарантированно не хуже, чем оптимальный стабилизирующий вектор. Полученный алгоритм отличается простотой и позволяет проводить расчет в реальном времени. Полученные результаты применены к задаче оптимальной стабилизации с информационными ограничениями, в которой также получены необходимые условия оптимальности и предложена процедура синтеза управления градиентного типа. Использование полученных результатов продемонстрировано на модельном примере.

Ключевые слова: *непрерывные стохастические системы, системы с управляемыми параметрами, квадратичный критерий, оптимальная стабилизация, линейные системы с мультипликативными возмущениями, информационные ограничения*

Введение

Модели, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями, нашли широкое применение в экономике, физике, биологии, социологии, авиационной и ракетно-космической технике. При этом естественный интерес представляет собой проблема управления подобными системами, в частности проблема стабилизации движения. Одним из самых изученных классов систем теории стохастических дифференциальных уравнений являются линейные системы с аддитивными шумами. Данные системы характеризуются тем, что интенсивность воздействующих на них случайных возмущений является функцией времени и не зависит от состояния или управления. По этой причине система подвергается постоянному воздействию случайных возмущений, которые выводят систему из положения равновесия, вследствие чего невозможно обеспечить ее асимптотическую устойчивость. При этом не имеет содержательного смысла постановка вопроса об оптимальном управлении линейными системами на бесконечном интервале времени с классическим квадратичным критерием качества управления. Однако имеется широкий класс систем, которые называют линейными системами с мультипликативными шумами или квазилинейными, для которых можно обеспечить асимптотическую устойчивость в среднем квадратичном нулевого решения.

Задачи оптимальной стабилизации линейных систем с мультипликативными возмущениями рассматривались в работах [1—6] и др. В этом направлении можно выделить две группы работ: задачи при наличии полной обратной связи и с наличием информационных ограничений. К первой группе относятся работы [1—4], в которых при различных предположениях о системе получены условия оптимальности линейного стационарного регулятора. Ко второй группе можно отнести работы [5, 7], в которых рассматривается задача с усредненным по времени критерием качества управления, и работу [8], в которой получены достаточные условия оптимальности при управлении по выходу. В данной работе рассмотрена задача оптимального подавления случайных возмущений при наличии информационных ограничений более общего вида. Рассматриваемые информационные ограничения заключаются в том, что каждая компонента управления зависит от отдельного вектора измерений. Получены необходимые условия в классе линейных стационарных регуляторов для данной задачи.

Нередко при синтезе так называемого марковского управления удается получить лишь условия оптимальности для линейного стационарного регулятора. Если же сразу задаться целью найти линейный стационарный регулятор, то мы приходим к задаче оптимального подавления случайных возмущений в квазилинейной стохастической системе с управляемыми параметрами. Системы такого вида описываются линейными стохастическими дифференциальными уравнениями с мультипликативными возмущениями, матрицы которых, в общем случае нелинейно, зависят от управления. Детерминированные линейные системы с управляемыми параметрами рассматривались в работе [9], их обобщение на стохастические уравнения изучались в работах [6, 10]. Результатов для рассматриваемой в данной работе задачи оптимальной стабилизации в подобных системах не известно. В работе получены необходимые условия оптимальности для данных систем, предложены процедуры синтеза оптимального стабилизирующего вектора параметров, а также предложена процедура построения субоптимального программного управления.

Результаты данной работы частично были доложены на Международных конференциях "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" в 2016 и 2018 гг. [11, 12], а также Всероссийском совещании по проблемам управления в 2019 г.

1. Постановка задачи

Рассматривается векторное стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$dX(t) = A_0(u(t))X(t)dt + \sum_{i=1}^{q} A_i(u(t))X(t)dW_i(t), \quad X(0) = X_0, \tag{1}$$

где $t \geqslant 0$ — время; X — случайный процесс со значениями в $\mathcal{R}^n$; W — стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathcal{R}^q$; $u:[0,+\infty) \to \to \mathcal{R}^m$ — управление; $v \mapsto A_i(v): \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^{n\times n}$, $i = \overline{0,q}$, — непрерывно-дифференцируемые по v матрично-значные функции; X_0 — случайный вектор, который не зависит от $W(t)$, $t \geqslant 0$, и удовлетворяет условию $\mathbb{E}\,\|X_0\|^2 < +\infty$, $\|x\| := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ — евклидова норма вектора $x \in \mathcal{R}^n$, $\mathbb{E}(\cdot)$ — оператор математического ожидания.

Обозначим $\mathcal{D}_{X_0}$ — множество допустимых процессов управления $z = (X, u)$, которые являются парами случайных процессов X и функций управления u, таких что

1) функция u является ограниченной кусочно-непрерывной на каждом конечном интервале времени;

2) при заданном u непрерывный случайный процесс X является решением уравнения (1) с заданным начальным условием;

3) выполнено условие

$$\mathbb{E}\int_0^{+\infty} \|X(s)\|^2 ds < +\infty. \tag{2}$$

Определение. Управление u, для которого существует допустимый процесс управления $z = (X, u) \in \mathcal{D}_{X_0}$, будем называть допустимым.

Определение. Управление u будем называть стабилизирующим, если оно является допустимым при любом начальном условии X_0, $\mathbb{E}\|X_0\|^2 < +\infty$.

Замечание 1. Управление u является стабилизирующим тогда и только тогда, когда замкнутая по u система асимптотически устойчива в среднем квадратичном.

На множестве $\mathcal{D}_{X_0}$ определим функционал $J: \mathcal{D}_{X_0} \to \mathcal{R}$:

$$J(z) = \mathbb{E}\int_0^{+\infty} X(s)^{\mathrm{T}} F(u(s)) X(s) ds, \tag{3}$$

где $F: \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^{n\times n}$ — дифференцируемая на $\mathcal{R}^m$ матричнозначная функция, которая принимает значения из множества неотрицательно определенных симметрических матриц: $F(v) \succcurlyeq 0$, $v \in \mathcal{R}^m$.

Задача состоит в поиске процесса управления $\bar{z} = (\bar{X}, \bar{u}) \in \mathcal{D}_{X_0}$, который будет минимизировать критерий (3) на $\mathcal{D}_{X_0}$:

$$J(\bar{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{X_0}} J(z). \tag{4}$$

2. Вспомогательный функционал качества управления

Аналогично тому, как это было сделано в работах [2, 6, 13], построим для данной задачи вспомогательный функционал качества управления. Для этого фиксируем некоторый процесс управления $z=(X,u)\in\mathcal{D}_{X_0}$. Известно [14, теорема 4.2.1], что для всякой функции $(t,x)\mapsto\varphi(t,x):[0,+\infty)\times\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}$, имеющей непрерывные производные $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}, i,j=\overline{1,n}$, верна формула Ито

$$\varphi(t,X(t))=\varphi(0,X_0)+$$
$$+\int_0^t\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,X(s))+\nabla_x\varphi(s,X(s))^{\mathrm T}A_0(u(s))X(s)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^q X(s)^{\mathrm T}A_i(u(s))^{\mathrm T}H_x^{\varphi}(s,X(s))A_i(u(s))X(s)\right)ds+ \tag{5}$$
$$+\sum_{i=1}^q\int_0^t\nabla_x\varphi(s,X(s))^{\mathrm T}A_i(u(s))X(s)dW_i(s),\ t\geqslant 0,$$

где $\nabla_x\varphi(t,\cdot)$ — градиент функции $\varphi(t,\cdot)$, $\nabla_x\varphi:=\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^{\mathrm T}$; $H_x^{\varphi}(t,\cdot)$ — матрица Гессе функции $\varphi(t,\cdot)$, $(H_x^{\varphi})_{ij}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}$, $i,j=\overline{1,n}$.

Применяя данную формулу к функции $\varphi(t,x)=x^{\mathrm T}Mx$, где $M\in\mathcal{R}^{n\times n}$ — симметрическая матрица, получим равенство

$$X(t)^T MX(t)=X_0^{\mathrm T}MX_0+\int_0^t X(s)^{\mathrm T}\left(MA_0(u(s))+\right.$$
$$\left.+A_0(u(s))^{\mathrm T}M+\sum_{i=1}^q A_i(u(s))^{\mathrm T}MA_i(u(s))\right)X(s)ds+$$
$$+2\sum_{i=1}^q\int_0^t X(s)^{\mathrm T}MA_i(u(s))X(s)dW_i(s),\ t\geqslant 0.$$

Возьмем математическое ожидание от левой и правой частей этого равенства. Тогда с учетом свойств стохастического интеграла Ито [14, теорема 3.2.1] получим

$$\mathbb{E}(X(t)^{\mathrm T}MX(t))=\mathbb{E}(X_0^{\mathrm T}MX_0)+$$
$$+\mathbb{E}\int_0^t X(s)^{\mathrm T}\left(MA_0(u(s))+A_0(u(s))^{\mathrm T}M+\right. \tag{6}$$
$$\left.+\sum_{i=1}^q A_i(u(s))^{\mathrm T}MA_i(u(s))\right)X(s)ds,\ t\geqslant 0.$$

Устремляя t к бесконечности, учитывая (2), получим

$$\mathbb{E}(X_0^{\mathrm T}MX_0)+$$
$$+\mathbb{E}\int_0^{+\infty}X(s)^{\mathrm T}\left(MA_0(u(s))+A_0(u(s))^{\mathrm T}M+\right. \tag{7}$$
$$\left.+\sum_{i=1}^q A_i(u(s))^{\mathrm T}MA_i(u(s))\right)X(s)ds=0.$$

Теперь рассмотрим вспомогательный функционал качества управления $\Gamma:\mathcal{D}_{X_0}\to\mathcal{R}$

$$\Gamma(z):=\mathbb{E}(X_0^{\mathrm T}MX_0)+\mathbb{E}\int_0^{+\infty}X(s)^{\mathrm T}\left(MA_0(u(s))+\right.$$
$$\left.+A_0(u(s))^{\mathrm T}M+\sum_{i=1}^q A_i(u(s))^{\mathrm T}MA_i(u(s))+F(u(s))\right)X(s)ds.$$

Нетрудно видеть, что в силу равенства (7) и произвольности выбора процесса управления z выполнено следующее важное свойство:

$$\Gamma(z)\equiv J(z),\ z\in\mathcal{D}_{X_0}, \tag{8}$$

которое не зависит от выбора симметрической матрицы $M\in\mathcal{R}^{n\times n}$.

Введем в рассмотрение отображение $H:\mathcal{R}^m\times\mathcal{R}^{n\times n}\to\mathcal{R}^{n\times n}$:

$$H(v,M):=MA_0(v)+A_0(v)^{\mathrm T}M+$$
$$+\sum_{i=1}^q A_i(v)^{\mathrm T}MA_i(v)+F(v). \tag{9}$$

С помощью отображения H можно переписать функционал Γ в более компактном виде:

$$\Gamma(z)=\mathrm{tr}[MP_0]+\mathbb{E}\int_0^{+\infty}X(s)^{\mathrm T}H(u(s),M)X(s)\,ds, \tag{10}$$

где $P_0\in\mathcal{R}^{n\times n}$ — матрица вторых начальных моментов вектора X_0, $\mathrm{tr}[\cdot]$ — оператор следа матрицы.

3. Стабилизирующий вектор параметров

В данном и следующем разделах будут рассмотрены постоянные по времени стратегии управления $u(t)\equiv v\in\mathcal{R}^m$. При этом будем отождествлять вектор параметров v и соответствующую этому вектору стратегию управления $u(t)\equiv v$ и писать $z=(X,v)\in\mathcal{D}_{X_0}$. Если соответствующая вектору стратегия управления является допустимой или стабилизирующей, то вектор будем также называть допустимым или стабилизирующим соответственно. Множество всех стабилизирующих векторов обозначим $\mathcal{V}\subset\mathcal{R}^m$, а множество соответствующих процессов управления — $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{V}}$:

$$\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{V}}:=\{(X,v):(X,v)\in\mathcal{D}_{X_0},\ v\in\mathcal{V}\}.$$

Позже нам потребуется следующий результат, касающийся стабилизирующих векторов.

Лемма 1. Если вектор v является стабилизирующим, то существует неотрицательно определенная симметрическая матрица $M \in \mathcal{R}^{n\times n}$, которая является единственным решением уравнения

$$MA_0(v) + A_0(v)^{\mathrm{T}} M + \sum_{i=1}^{q} A_i(v)^{\mathrm{T}} MA_i(v) = -F(v). \quad (11)$$

Линейное матричное уравнение (11) называют обобщенным уравнением Ляпунова, и оно играет ключевую роль при анализе устойчивости уравнения (1). Подробное изучение свойств данного уравнения имеется в монографии [2]. Доказательство леммы 1 приведено в работе [6, стр. 68]. Прямым следствием данной леммы и равенств (8), (9), (10) является следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть имеется процесс управления $z = (X, v) \in \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{V}}$. Значение критерия $J(z)$ можно вычислить по формуле

$$J(z) = \mathrm{tr}[MP_0], \quad (12)$$

где неотрицательно определенная симметрическая матрица $M \in \mathcal{R}^{n\times n}$ — единственное решение уравнения (11).

Теперь покажем, что на множестве $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{V}}$ функционал Γ можно представить в виде функции $\hat{\Gamma}$ от переменной v, дифференцируемой на $\mathcal{V}$. Пусть имеется процесс управления $z = (X, u) \in \mathcal{D}_{X_0}$. Известно (см., например, [2, стр. 9]), что матрица вторых начальных моментов $P(t)$ случайной величины $X(t)$ описывается линейным обыкновенным матричным дифференциальным уравнением

$$\begin{gathered}\dot{P}(t) = A_0(u(t))P(t) + P(t)A_0(u(t))^{\mathrm{T}} + \\ + \sum_{i=1}^{q} A_i(u(t))P(t)A_i(u(t))^{\mathrm{T}},\ t \geqslant 0,\ P(0) = P_0.\end{gathered} \quad (13)$$

Предположим, что $u(t) \equiv v \in \mathcal{R}^m$. Проинтегрируем уравнение (13) на интервале $[0, +\infty)$. При этом будем учитывать, что, как следует из условия (2), предел $\|P(t)\| := \left(\sum_{i,j=1}^{n} P_{ij}^2(t)\right)^{1/2}$ при $t \to +\infty$ равен нулю. Получим линейное матричное уравнение

$$-P_0 = \tilde{P}A_0(v)^{\mathrm{T}} + A_0(v)\tilde{P} + \sum_{i=1}^{q} A_i(v)\tilde{P}A_i(v)^{\mathrm{T}}, \quad (14)$$

где $\tilde{P} := \int_0^{+\infty} P(s)ds.$

Далее нам потребуется оператор симметрической векторизации $\mathrm{svec}[\cdot]$, который устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами в $\mathcal{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ и симметрическими матрицами в $\mathcal{R}^{n\times n}$:

$$\begin{gathered}\mathrm{svec}[P] := (P_{11}, \sqrt{2}P_{21}, \sqrt{2}P_{31}, \ldots, \\ \ldots, \sqrt{2}P_{n1}, P_{22}, \sqrt{2}P_{32}, \ldots, \sqrt{2}P_{n2}, \ldots, P_{nn})^{\mathrm{T}}.\end{gathered}$$

С помощью оператора симметрической векторизации можно следующим образом определить симметрическое произведение Кронекера матриц. Пусть заданы $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $B \in \mathcal{R}^{n\times n}$, тогда симметрическое произведение Кронекера $A \otimes_s B$ — это матрица из $\mathcal{R}^{\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}}$, которая для каждой симметрической матрицы $P \in \mathcal{R}^{n\times n}$ удовлетворяет условию

$$(A \otimes_s B)\mathrm{svec}[P] = \frac{1}{2}\mathrm{svec}[APB^{\mathrm{T}} + BPA^{\mathrm{T}}].$$

Можно показать, что такая матрица существует и единственна. Подробная информация о симметрическом произведении Кронекера содержится в работе [15, стр. 249—255].

Используя симметрическое произведение Кронекера и оператор симметрической векторизации, уравнения (13) и (14) можно переписать в виде линейных векторных уравнений относительно $\mathrm{svec}[P(t)]$ и $\mathrm{svec}[\tilde{P}]$:

$$\begin{gathered}\mathrm{svec}[\dot{P}(t)] = \Lambda(v)\mathrm{svec}[P(t)],\ t \geqslant 0; \\ \mathrm{svec}[P(0)] = \mathrm{svec}[P_0];\end{gathered} \quad (15)$$

$$\begin{gathered}\Lambda(v)\mathrm{svec}[\tilde{P}] = -\mathrm{svec}[P_0]; \\ \Lambda(v) := 2A_0(v) \otimes_s I + \sum_{i=1}^{q} A_i(v) \otimes_s A_i(v),\end{gathered} \quad (16)$$

где $I \in \mathcal{R}^{n\times n}$ — единичная матрица. Верны следующие утверждения.

Утверждение 2. Вектор v является стабилизирующим тогда и только тогда, когда вещественные части собственных чисел матрицы $\Lambda(v)$ строго меньше нуля.

Доказательство. Как было отмечено в замечании 1, вектор v является стабилизирующим в том и только в том случае, когда замкнутая система асимптотически устойчива в среднем квадратичном. Как известно (см., например, [2, стр. 11—13]), система (1) асимптотически устойчива в среднем квадратичном, если и только если асимптотически устойчивы матричное дифференциальное уравнение (13) или эквивалентная ей система линейных дифференциальных уравнений (15). Из теории устойчивости детерминированных систем хорошо известно, что линейная система с постоянными коэффициентами (15) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда спектр матрицы системы $\Lambda(v)$ принадлежит левой открытой полуплоскости. ■

Утверждение 3. Множество $\mathcal{V}$ является открытым.

Доказательство. Из свойств симметрического произведения Кронекера и дифференцируемости отображений $A_i, i=\overline{1,m}$, по v на $\mathcal{R}^m$ следует, что отображение $\Lambda : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^{\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}}$ также является дифференцируемым по v на $\mathcal{R}^m$. В частности, оно является непрерывным. Из утверждения 2 следует, что при отображении Λ множество $\mathcal{V}$ есть полный прообраз множества асимптотически устойчивых матриц, которое является открытым. Таким образом, множество $\mathcal{V}$ как прообраз открытого множества при непрерывном отображении является открытым. ■

Утверждение 4. Если $v \in \mathcal{V}$, то существует неотрицательно определенная симметрическая матрица $\tilde{P}$, которая является единственным решением уравнения (14). При этом $\tilde{P}$ можно рассматривать как дифференцируемую функцию от v.

Доказательство. Рассмотрим эквивалентное (14) линейное векторное уравнение с постоянными коэффициентами (16). Из утверждения 2 следует, что матрица системы не вырождена и, следовательно, существует единственное решение данного уравнения:

$$\mathrm{svec}[\tilde{P}] = -\Lambda(v)^{-1}\mathrm{svec}[P_0].$$

Полученная таким образом матрица $\tilde{P}$ будет удовлетворять уравнению (14) и по построению является неотрицательно определенной. Более того, в этом случае можно рассматривать $\tilde{P}$ как дифференцируемую функцию от v. Действительно, частные производные $\tilde{P}(v)'_i := \frac{\partial}{\partial v_i}\tilde{P}(v),\ i=\overline{1,m}$ можно найти из равенств (14) или (16) как производные неявной функции. Продифференцируем, например, (16) по v_i и получим

$$\Lambda(v)'_i\mathrm{svec}[\tilde{P}(v)] + \Lambda(v)\mathrm{svec}[\tilde{P}(v)'_i] = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned}\mathrm{svec}[\tilde{P}(v)'_i] &= -\Lambda(v)^{-1}\Lambda(v)'_i\mathrm{svec}[\tilde{P}(v)] = \\ &= -\Lambda(v)^{-1}\Lambda(v)'_i\Lambda(v)^{-1}\mathrm{svec}[P_0].\end{aligned} \tag{17}$$

Поскольку по условию задачи отображения $v \mapsto A_i(v),\ i=\overline{0,q}$, непрерывно дифференцируемы по v, из равенства (17) следует, что частные производные отображения $v \mapsto \tilde{P}(v)$ также являются непрерывными функциями на множестве $\mathcal{V}$. Таким образом, выполняются достаточные условия для того, чтобы отображение $v \mapsto \tilde{P}(v)$ являлось дифференцируемым на множестве $\mathcal{V}$. ■

Пусть $M \in \mathcal{R}^{m\times m}$ — некоторая симметрическая матрица. С помощью интеграла матрицы вторых моментов $\tilde{P}(v)$ мы можем представить функционал Γ на множестве $\mathcal{D}^{\mathcal{V}}_{X_0}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \mathrm{tr}[MP_0] + \mathbb{E}\int_0^{+\infty} X(s)^{\mathrm{T}} H(v,M)X(s)ds = \\ &= \mathrm{tr}[MP_0] + \int_0^{+\infty}\mathbb{E}\,\mathrm{tr}[H(v,M)X(s)X(s)^{\mathrm{T}}]ds = \\ &= \mathrm{tr}[MP_0] + \mathrm{tr}\left[H(v,M)\int_0^{+\infty}P(s)ds\right] = \\ &= \mathrm{tr}[MP_0] + \mathrm{tr}[H(v,M)\tilde{P}(v)] =: \hat{\Gamma}(v),\end{aligned} \tag{18}$$

где симметрическая неотрицательно определенная матрица $P(v) \in \mathcal{R}^{n\times n}$ является единственным решением уравнения (14) при данном v. Таким образом, на множестве $\mathcal{D}^{\mathcal{V}}_{X_0}$ функционал Γ представим в виде функции $\hat{\Gamma} : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}$, дифференцируемой по v на $\mathcal{V}$. Заметим также, что если v является допустимым вектором, то значение $\hat{\Gamma}(v)$ не зависит от выбора матрицы M.

4. Оптимальный стабилизирующий вектор

Получены следующие необходимые условия в задаче поиска процесса управления $\bar{z} = (\bar{X}, \bar{v}) \in \mathcal{D}^{\mathcal{V}}_{X_0}$, который минимизирует критерий (3) на суженном множестве допустимых процессов управления $\mathcal{D}^{\mathcal{V}}_{X_0}$:

$$J(\bar{z}) = \min_{z\in\mathcal{D}^{\mathcal{V}}_{X_0}} J(z). \tag{19}$$

Теорема 1. Если процесс управления $z = (X, v) \in \mathcal{D}^{\mathcal{V}}_{X_0}$ оптимален на множестве $\mathcal{D}^{\mathcal{V}}_{X_0}$ в задаче (1)—(3), (19), то выполнено следующее условие:

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}[(MA_0(v)'_i + (A_0(v)'_i)^{\mathrm{T}}M + 2\sum_{j=1}^{q}(A_j(v)'_i)^{\mathrm{T}}\times \\ &\times MA_j(v) + F(v)'_i)\tilde{P}(v)] = 0,\ i=\overline{1,m},\end{aligned} \tag{20}$$

где неотрицательно определенные симметрические матрицы $M \in \mathcal{R}^{n\times n}$ и $\tilde{P}(v) \in \mathcal{R}^{n\times n}$ — единственные решения уравнений

$$
\begin{aligned}
&MA_0(v) + A_0(v)^{\mathrm{T}} M + \sum_{i=1}^{q} A_i(v)^{\mathrm{T}} MA_i(v) = -F(v);\\
&\tilde{P}(v)A_0(v)^{\mathrm{T}} + A_0(v)\tilde{P}(v) + \sum_{i=1}^{q} A_i(v)\tilde{P}(v)A_i(v)^{\mathrm{T}} = -P_0.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Доказательство. Пусть процесс управления $z = (X, v) \in \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{V}}$ является точкой минимума функционала Γ на $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{V}}$. Из леммы 1 и утверждения 4 следует, что найдутся единственные неотрицательно определенные симметрические матрицы $M \in \mathcal{R}^{n\times n}$ и $\tilde{P}(v) \in \mathcal{R}^{n\times n}$, удовлетворяющие уравнениям (21). При этом выполняется равенство

$$
H(v, M) = 0. \tag{22}
$$

Ранее было показано, что функционал Γ на множестве $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{V}}$ можно представить в виде функции $\hat{\Gamma}$ от переменной v. При этом процесс управления $z = (X, v) \in \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{V}}$ является точкой минимума функционала Γ на множестве $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{V}}$ тогда и только тогда, когда v является точкой минимума функции $\hat{\Gamma}$ на множестве $\mathcal{V}$. Поскольку $\hat{\Gamma}$ дифференцируема на $\mathcal{V}$, и $\mathcal{V}$ является открытым, для точки v выполнены необходимые условия экстремума первого порядка, а именно

$$
\hat{\Gamma}(v)'_i = 0, \; i = \overline{1, m}. \tag{23}
$$

С учетом равенства (22) получим

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(v)'_i = \mathrm{tr}[H(v, M)\tilde{P}(v)]'_i =\\
&= \mathrm{tr}[H(v, M)'_i\tilde{P}(v) + H(v, M)\tilde{P}(v)'_i] =\\
&= \mathrm{tr}[H(v, M)'_i\tilde{P}(v)] = \mathrm{tr}[(MA_0(v)'_i +\\
&+ (A_0(v)'_i)^{\mathrm{T}} M + 2\sum_{j=1}^{q} A_j(v)'_i)^{\mathrm{T}} MA_j(v) +\\
&+ F(v)'_i)\tilde{P}(v)], \;\; i = \overline{1, m},
\end{aligned} \tag{24}
$$

откуда в совокупности с условием (23) получаем условие (20). ■

Выражение (24) для частных производных функции $\hat{\Gamma}$ может быть применено для построения следующей процедуры градиентного типа. Пусть имеется процесс управления $z^{(l)} = (X^{(l)}, v^{(l)}) \in \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{V}}$. Тогда мы можем улучшить значение функционала качества, выбрав новый вектор $v^{(l+1)}$ по следующей формуле:

$$
v_i^{(l+1)} = v_i^{(l)} - \theta\, \hat{\Gamma}(v^{(l)})'_i, \; i = \overline{1, m}, \tag{25}
$$

где $\theta > 0$ — достаточно малый шаг.

5. Субоптимальное программное управление

Нахождение оптимального программного управления в задаче (1)—(4) сопряжено с рядом трудностей, и точного численного алгоритма ее решения не известно. Поэтому привлекательными являются приближенные алгоритмы синтеза субоптимальных программных управлений. Отметим тот факт, что полученные выше в теореме 1 условия содержат матрицу P_0 вторых начальных моментов вектора X_0. Этот факт приводит к идее алгоритма синтеза кусочно-постоянного программного управления, основанного на рекуррентном вычислении стабилизирующего вектора, удовлетворяющего условиям теоремы 1. Примером такого алгоритма является следующий.

Шаг 1. Задать разбиение $0 = t_0 < t_1 < ... < t_q < +\infty$ интервала $[0, +\infty)$; $v^{(0)}$ — начальное приближение (стабилизирующий вектор, удовлетворяющий условиям теоремы 1); $\varepsilon > 0$ — параметр алгоритма, отвечающий за условие остановки. Положить номер итерации $l = 0$.

Шаг 2. Вычислить $P(t_{l+1})$, решая задачу Коши (13) на интервале времени $[t_l, t_{l+1})$ при $u(t) \equiv v^{(l)}$ с начальным условием $P(t_l)$, $P(t_0) = P_0$.

Шаг 3. С помощью предложенной выше процедуры в задаче вычислить стабилизирующий вектор $v^{(l+1)}$, удовлетворяющий уравнениям теоремы 1 при $P_0 = P(t_{l+1})$. За начальное приближение алгоритма взять $v^{(l)}$.

Шаг 4. Проверить выполнение условий $\|P(t_{l+1})\| < \varepsilon$ и $l + 1 < q$. Если не выполнено, то увеличить l на единицу и перейти к шагу 2. Иначе искомую стратегию $u(t)$ положить равной функции вида

$$
u(t) = \begin{cases} v^{(0)}, \; 0 \leqslant t < t_1;\\ v^{(1)}, \; t_1 \leqslant t < t_2;\\ \quad \dots\\ v^{(l+1)}, \; t_{l+1} \leqslant t < +\infty. \end{cases}
$$

Полезное свойство данного алгоритма заключается в том, что он является не ухудшающим, т. е. каково бы ни было разбиение интервала времени, значение критерия, соответствующее найденному управлению u, будет не хуже, чем соответствующее вектору $v^{(0)}$. Кроме того, данный алгоритм отличается относительной простотой производимых вычислений и обладает свойством рекуррентности по времени, т. е. можно проводить расчет в реальном времени. Среди недостатков стоит отметить тот, что результат работы может значительно зависеть от выбора разбиения интервала времени. При этом вопрос выбора наилучшего разбиения остается открытым.

6. Связь с задачей с информационными ограничениями

Полученные результаты могут быть применены в задаче оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными возмущениями при наличии информационных ограничений. Рассмотрим данную задачу подробнее. Процесс управления описывается векторным стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$dX(t) = \big(A_0X(t) + B_0u(t, Y(t))\big)\,dt + \\ + \sum_{i=1}^{q}\big(A_iX(t) + B_iu(t, Y(t))\big)\,dW_i(t),\ X(0) = X_0, \tag{26}$$

где $t \geqslant 0$ — время; X — случайный процесс со значениями в $\mathcal{R}^n$; W — стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathcal{R}^q$; $y \mapsto u(t, y) : [0, +\infty) \times \mathcal{R}^p \to \mathcal{R}^m$ — стратегия управления; $A_i \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathcal{R}^{n\times m}$, $i = \overline{0, q}$ — постоянные матрицы; $Y(t) = CX(t)$, $C \in \mathcal{R}^{p\times n}$, — измеряемый выход системы. Предполагается, что случайный вектор X_0 не зависит от $W(t)$, $t \geqslant 0$, и удовлетворяет условию $\mathbb{E}\,\|X_0\|^2 < +\infty$.

Для того чтобы свести задачу к рассмотренной ранее в данной работе, ограничим множество стратегий управления линейными регуляторами $u(t, y) = -L(t)y$, $L(t) \in \mathcal{R}^{m\times p}$, $t \geqslant 0$. При этом далее управлением, подлежащим определению, будем считать не u, а L. Заметим, что из описания системы следует, что

$$u(t, Y(t)) = -L(t)CX(t),\ \ t \geqslant 0. \tag{27}$$

Обозначим $\mathcal{D}_{X_0}$ — множество процессов управления $z = (X, L)$, которые являются парами случайных процессов X и отображений L, таких что

1) отображение $t \mapsto L(t)$ является ограниченным и кусочно-непрерывным на каждом конечном интервале;

2) при заданной стратегии управления $u(t, y) = -L(t)y$ непрерывный случайный процесс X является решением уравнения (26) с заданным начальным условием;

3) выполнено условие (2).

На множестве $\mathcal{D}_{X_0}$ определим функционал $J : \mathcal{D}_{X_0} \to \mathcal{R}$

$$J(z) = \mathbb{E}\int_0^{+\infty}(X(s)^{\mathrm{T}}QX(s) + X(s)^{\mathrm{T}}Su(s, Y(s)) + \\ + u(s, Y(s))^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}X(s) + u(s, Y(s))^{\mathrm{T}}Eu(s, Y(s)))ds,$$

который с учетом равенства (27) принимает вид

$$J(z) = \mathbb{E}\int_0^{+\infty}X(s)^{\mathrm{T}}(Q - SL(s)C - \\ - C^{\mathrm{T}}L(s)^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}}L(s)^{\mathrm{T}}EL(s)C)X(s)ds, \tag{28}$$

где $Q \in \mathcal{R}^{n\times n}$ и $E \in \mathcal{R}^{m\times m}$ — симметрические матрицы, $Q \succcurlyeq 0$, $E \succ 0$; матрица $S \in \mathcal{R}^{n\times m}$ удовлетворяет условию $Q - SE^{-1}S^{\mathrm{T}} \succcurlyeq 0$.

Задача состоит в поиске такого процесса управления $\overline{z} = (\overline{X}, \overline{L}) \in \mathcal{D}_{X_0}$, который минимизирует критерий (28) на допустимом множестве:

$$J(\overline{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{X_0}} J(z). \tag{29}$$

Полученная задача (26)—(29) представляет собой частный случай задачи (1)—(4), и к ней могут быть применены предложенные условия оптимальности и процедуры улучшения. В роли компонент оптимизируемого управления u здесь выступают координатные функции отображения $t \mapsto L(t)$. Однако с учетом линейной структуры данной задачи полученные условия оптимальности можно конкретизировать и далее улучшить.

Аналогично тому, как это было проделано выше, далее будут рассмотрены постоянные по времени отображения $L(t) \equiv K \in \mathcal{R}^{m\times p}$, мы будем отождествлять матрицы K и соответствующие постоянные по времени отображения $L(t) \equiv K$ и писать $z = (X, K) \in \mathcal{D}_{X_0}$. Также будем считать, что понятия допустимого и стабилизирующего управления, определения которых даны в разделе 3, аналогичным образом применимы к отображениям $t \mapsto L(t)$ или матрицам K. Множество стабилизирующих матриц обозначим $\mathcal{K} \subset \mathcal{R}^{m\times p}$, а множество соответствующих процессов управления $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{K}} \subset \mathcal{D}_{X_0}$:

$$\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{K}} := \left\{(X, K) : (X, K) \in \mathcal{D}_{X_0},\ K \in \mathcal{K}\right\}.$$

Имеют место следующие необходимые условия в задаче поиска процесса управления $\bar{z} = (\bar{X}, \bar{K}) \in \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{K}}$, который минимизирует критерий (28) на суженном множестве допустимых процессов управления $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{K}}$:

$$J(\bar{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{V}}} J(z). \tag{30}$$

Теорема 2. Если процесс управления $z = (X, K) \in \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{K}}$ оптимален на множестве $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{K}}$ в задаче (26)—(28), (30), то выполнено условие

$$\left(\left(E + \sum_{i=1}^{q} B_i^{\mathrm{T}} M B_i\right) KC - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{q} B_i^{\mathrm{T}} M A_i - S^{\mathrm{T}} - B_0^{\mathrm{T}} M\right) \tilde{P}_{\mathcal{K}}(K) C^{\mathrm{T}} = 0, \tag{31}$$

где неотрицательно определенные симметрические матрицы $M \in \mathcal{R}^{n \times n}$ и $\tilde{P}(K) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ — единственные решения уравнений

$$\begin{gathered} M A_0^u(K) + A_0^u(K)^{\mathrm{T}} M + \sum_{i=1}^{q} A_i^u(K)^{\mathrm{T}} M A_i^u(K) = \\ = -Q + SKC + C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} - C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} EKC; \\ \tilde{P}_{\mathcal{K}}(K) A_0^u(K)^{\mathrm{T}} + A_0^u(K) \tilde{P}_{\mathcal{K}}(K) + \\ + \sum_{i=1}^{q} A_i^u(K) \tilde{P}_{\mathcal{K}}(K) A_i^u(K)^{\mathrm{T}} = -P_0; \\ A_i^u(K) := A_i - B_i KC, \; i = \overline{0, q}. \end{gathered} \tag{32}$$

Доказательство. Выше отмечалось, что задача (26)—(29) представляет собой частный случай рассмотренной ранее в данной работе задачи (1)—(4).

Действительно, рассмотрим взаимно однозначное отображение $\mathrm{vec} : \mathcal{R}^{m \times p} \to \mathcal{R}^{mp}$:

$$\mathrm{vec}[K] := (K_{11}, K_{21}, K_{31}, \ldots, \\ \ldots, K_{m1}, K_{12}, K_{22}, \ldots, K_{m2}, \ldots, K_{mp})^{\mathrm{T}}, \; K \in \mathcal{R}^{m \times p}.$$

Обратное к vec отображение обозначим $\mathrm{mat} : \mathcal{R}^{mp} \to \mathcal{R}^{m \times p}$. Отметим также, что отображения vec и mat являются дифференцируемыми всюду на области определения.

Произвольную матрицу $K \in \mathcal{R}^{m \times p}$ можно считать результатом применения оператора mat к некоторому вектору $v \in \mathcal{R}^{mp}$. Если выполнить в задаче (26)—(29) замену $L(t) = \mathrm{mat}[u(t)]$, $t \geqslant 0$, где $u : [0, +\infty) \to \mathcal{R}^{mp}$ — ограниченная кусочно-непрерывная на каждом конечном интервале времени функция, мы получаем эквивалентную задачу поиска оптимального управления u, которая является частным случаем задачи (1)—(4), в которой

$$\begin{aligned} &A_i(v) = A_i^u(\mathrm{mat}[v]), \quad i = \overline{0, q}; \\ &F(v) = Q - S\,\mathrm{mat}[v]\,C - C^{\mathrm{T}} \mathrm{mat}[v]^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} + \\ &+ C^{\mathrm{T}} \mathrm{mat}[v]^{\mathrm{T}} E\,\mathrm{mat}[v] C, \; v \in \mathcal{R}^{mp}. \end{aligned} \tag{33}$$

Нетрудно видеть, что при этом все утверждения, касающиеся допустимых управлений u и векторов v, полученные в разделе 5, переносятся и на допустимые отображения L и матрицы K соответственно, с точностью до равенств (33). В частности, множество $\mathcal{K}$ как прообраз открытого множества $\mathcal{V}$ при непрерывном отображении vec является открытым. Кроме того, функция $\tilde{P}_{\mathcal{K}}(K) := \tilde{P}(\mathrm{vec}[K])$ как композиция дифференцируемых отображений является дифференцируемым на $\mathcal{K}$ отображением.

Пусть задана некоторая симметрическая матрица $M \in \mathcal{R}^{n \times n}$. Введем в рассмотрение функцию $\hat{\Gamma}_{\mathcal{K}} : \mathcal{R}^{m \times p} \to \mathcal{R}$:

$$\begin{gathered} \hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}(K) := \mathrm{tr}[M P_0] + \mathrm{tr}[H_{\mathcal{K}}(K, M) \tilde{P}_{\mathcal{K}}(K)], \\ H_{\mathcal{K}}(K, M) := M A_0^u(K) + A_0^u(K)^{\mathrm{T}} M + \\ + \sum_{i=1}^{q} A_i^u(K)^{\mathrm{T}} M A_i^u(K) + Q - SKC - C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} EKC. \end{gathered}$$

Отметим, что с учетом (33) выполнено равенство

$$\hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}(K) = \hat{\Gamma}(\mathrm{vec}[K]), \; K \in \mathcal{K}. \tag{34}$$

Пусть процесс управления $z = (X, K) \in \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{K}}$ оптимален на множестве $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{K}}$ в задаче (26)—(28), (30). Из вышесказанного следует, что вектор $v = \mathrm{vec}[K]$ удовлетворяет условиям теоремы 1. С учетом отношений (33) условия (21) совпадают с условиями (32). Пусть далее матрицы M и $\tilde{P}(K)$ — неотрицательно определенные симметрические матрицы, удовлетворяющие равенствам (32). При этом будет выполнено соотношение

$$H_{\mathcal{K}}(K, M) = 0. \tag{35}$$

Покажем, что условия (20) совпадают с (31). Используя аппарат матричного дифференцирования, с учетом дифференцируемости $\tilde{P}_{\mathcal{K}}(K)$ и с помощью тождества (35) можно найти градиент функции $\hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}$ в точке K:

$$\nabla \hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}(K) = \left(\left(E + \sum_{i=1}^{q} B_i^{\mathrm{T}} M B_i\right) KC - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{q} B_i^{\mathrm{T}} M A_i - S^{\mathrm{T}} - B_0^{\mathrm{T}} M\right) P_{\mathcal{K}}(K) C^{\mathrm{T}}. \tag{36}$$

Из этого выражения и тождества (34) следует, что условия (20) и (31) совпадают. ■

Полученный результат может быть обобщен на задачу стабилизации со структурными ограничениями на матрицу регулятора. Пусть задана матрица $G \in \mathcal{R}^{m\times p}$, состоящая из нулей и единиц.

Определение. Будем говорить, что матрица $K \in \mathcal{R}^{m\times p}$ удовлетворяет структурным ограничениям, если выполнено условие $\mathrm{tr}[G^{\mathrm{T}}K] = 0$. Множество матриц, удовлетворяющих структурным ограничениям, образует подпространство в $\mathcal{R}^{m\times p}$. Обозначим данное множество $\mathcal{S}$.

Множество стабилизирующих матриц, удовлетворяющих структурным ограничениям, обозначим $\mathcal{G}, \mathcal{G} := \mathcal{K} \bigcap \mathcal{S}$. Будем предполагать, что данное множество не пусто. Множество соответствующих процессов управления обозначим $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{G}} \subset \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{K}} \subset \mathcal{D}_{X_0}$:

$$\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{G}} := \left\{(X,K) : (X,K) \in \mathcal{D}_{X_0},\, K \in \mathcal{G}\right\}.$$

Докажем следующие необходимые условия в задаче поиска процесса управления $\bar{z} = (\bar{X}, \bar{K}) \in \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{G}}$, который минимизирует критерий (28) на суженном множестве допустимых процессов управления $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{G}}$:

$$J(\bar{z}) = \min_{z\in\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{G}}} J(z). \qquad (37)$$

Теорема 3. Если процесс управления $z = (X, K) \in \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{G}}$ оптимален на множестве $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{G}} \subset \mathcal{D}_{X_0}$ в задаче (26)—(28), (37), то для всех i, j, таких что $G_{ij} = 0$, выполнены условия

$$\left(\left(\left(E + \sum_{i=1}^{q} B_i^{\mathrm{T}} M B_i\right) KC - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{i=1}^{q} B_i^{\mathrm{T}} M A_i - S^{\mathrm{T}} - B_0^{\mathrm{T}} M\right) \tilde{P}_{\mathcal{K}}(K) C^{\mathrm{T}}\right)_{ij} = 0,$$

где неотрицательно определенные симметрические матрицы $M \in \mathcal{R}^{n\times n}$ и $\tilde{P}(K) \in \mathcal{R}^{n\times n}$ — единственные решения уравнений (32).

Доказательство. Множество $\mathcal{G}$ как пересечение открытых множеств является открытым, а функция $\hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}$ является дифференцируемой на $\mathcal{K} \supset \mathcal{G}$. Условия (31) в совокупности представляют собой условие равенства проекции градиента (36) на подпространство $\mathcal{S}$. Таким образом, условия теоремы представляют собой необходимые условия экстремума первого порядка функции $\hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}$ в точке K. ■

Примером задачи, в которой могут возникнуть структурные ограничения на матрицу регулятора, является задача с информационными ограничениями общего вида. Действительно, пусть заданы числа $p_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = p$. Определим матрицу $G \in \mathcal{R}^{m\times p}$ следующим образом:

$$G_{ij} = \begin{cases} 0, & \sum_{r=1}^{i-1} p_r < j \leqslant \sum_{r=1}^{i} p_r; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом подпространство $\mathcal{S}$, которое задается матрицей G, состоит из матриц $K \in \mathcal{R}^{m\times p}$, которые можно представить в виде блочной матрицы

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_m \end{pmatrix},\ K_i \in \mathcal{R}^{1\times p_i}. \qquad (38)$$

На содержательном уровне данные информационные ограничения заключаются в том, что каждая компонента управления зависит от своего вектора выхода:

$$u(Y(t)) = \left(u_1(Y_1(t)), \dots, u_m(Y_m(t))\right)^{\mathrm{T}}, \qquad (39)$$

где $u_i : \mathcal{R}^{p_i} \to \mathcal{R}$; $Y_i(t) = C_i X(t)$, $C_i \in \mathcal{R}^{p_i\times n}$, $i = \overline{1,m}$. Для решения поставленной задачи можно воспользоваться теоремой 3.

Обозначим $\mathrm{pr}[\nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}(K)]$ ортогональную проекцию градиента функции $\hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}$ в точке K на подпространство $\mathcal{S}$:

$$\mathrm{pr}[\nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}(K)] = \nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}(K) - G \circ \nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}(K), \qquad (40)$$

где $A \circ B \in \mathcal{R}^{m\times p}$ обозначает поэлементное произведение матриц (произведение Адамара). Используя полученные условия оптимальности и выражение для проекции градиента (40), сформулируем следующую процедуру градиентного типа. Пусть имеется процесс управления $z^{(l)} = (X^{(l)}, K^{(l)}) \in \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{K}}$. Тогда мы можем улучшить значение функционала качества, выбрав новую матрицу $K^{(l+1)}$ по следующей формуле:

$$K^{(l+1)} = K^{(l)} - \theta\,\mathrm{pr}\left[\nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}(K^{(l)})\right] - \gamma G \circ K^{(l)}, \qquad (41)$$

где $\theta > 0, \gamma > 0$ достаточно малы. Здесь проекция градиента обеспечивает движение вдоль структурных ограничений, а дополнительное слагаемое обеспечивает сходимость к подпространству $\mathcal{S}$. Такая процедура улучшения имеет существенное преимущество в том, что начальное приближение $K^{(l)}$ может не принадлежать $\mathcal{S}$. Более того, начальным приближением для численного метода на основе данной процедуры может служить управление с полной обратной связью, что существенно упрощает процедуру подбора начального приближения.

Для задач со структурными и информационными ограничениями, так же как это было сделано ранее в работе, можно построить субоптимальное программное управление. Алгоритм построения по своей структуре полностью совпадает с предложенным ранее.

7. Модельный пример

Продемонстрируем применение полученных результатов на модельном примере. Пусть имеется следующая задача оптимальной стабилизации:

$$\begin{cases} dX_1(t) = 2X_2(t)dt + \dfrac{1}{2}u(t)X_1 dW(t), \quad X_1(0) = 1; \\ dX_2(t) = (-X_1(t) - u(t)X_2)dt, \quad X_2(0) = 1,\ t \geqslant 0; \end{cases}$$

$$J(z) = \mathbb{E}\int_0^{+\infty} ((1 + u(s)^2)X_1^2(s) + X_2^2(s))ds;$$

$$J(\bar{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{X_0}} J(z).$$

Данная задача является частным случаем задачи (1)—(4). Если мы ограничимся рассмотрением только постоянных стратегий управления $u(t) \equiv v \in \mathcal{R}$, то получим задачу (1)—(3), (19), для которой в разделе 4 получены условия оптимальности и градиентная процедура поиска. Найденное с помощью численного метода постоянное управление u, удовлетворяющее условиям теоремы 1, и соответствующее значение критерия равны

$$u \approx 0{,}6776, \quad J \approx 6{,}777.$$

С использованием алгоритма синтеза субоптимального программного управления, предложенного в разделе 5, найдены программная кусочно-постоянная функция управления с одним переключением в момент времени $t_1 = 1{,}4200$ и значение критерия

$$u(t) = \begin{cases} 0{,}6776, & 0 \leqslant t < t_1; \\ 1{,}2389, & t_1 \leqslant t < +\infty; \end{cases} \quad J \approx 6{,}1854.$$

Таким образом, даже используя кусочно-постоянную стратегию управления с одним переключением, удалось значительно улучшить значение критерия.

Заключение

В данной работе был решен ряд вопросов оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем. Вместе с тем, некоторые вопросы остаются открытыми. Не были получены условия оптимальности программной стратегии управления в задаче раздела 1. Остается нерешенным вопрос о выборе наилучшего разбиения интервала в алгоритме из раздела 5. Также открыты для изучения вопросы оптимальной стабилизации по части координат. В задаче с информационными ограничениями не рассмотрен случай наличия помех в канале измерений. Эти и другие вопросы являются предметом дальнейших исследований в данной области.

Список литературы

1. **Wonham W. M.** Optimal Stationary Control of a Linear System with State-dependent Noise // SIAM Journal on Control. 1967. Vol. 5, Iss. 3. P. 486—500.
2. **Damm T.** Rational Matrix Equations in Stochastic Control. Springer, Berlin Heidelberg, 2004.
3. **McLane P. J.** Optimal Stochastic Control of Linear Systems with State- and Control-dependent Disturbances // IEEE Transactions on Automatic Control. 1971. Vol. 16, Iss. 6. P. 793—798.
4. **Haussmann U. G.** Optimal Stationary Control with State Control Dependent Noise // SIAM Journal on Control. 1971. Vol. 9, Iss. 2. P. 184—198.
5. **Хрусталев М. М.** Синтез оптимальных и устойчивых управляемых стохастических систем при неполной информации о состоянии на неограниченном интервале времени // Автоматика и телемеханика. 2011. № 11. С. 174—190.
6. **Халина А. С., Хрусталев М. М.** Оптимизация облика и стабилизация управляемых квазилинейных стохастических систем, функционирующих на неограниченном интервале времени // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 65—88.
7. **Мильштейн Г. Н.** Линейные оптимальные регуляторы заданной структуры в системах с неполной информацией // Автоматика и телемеханика. 1976. № 8. С. 48—53.
8. **McLane P. J.** Linear Optimal Stochastic Control Using Instantaneous Output Feedback // International Journal of Control. 1971. Vol. 13, Iss. 2. P. 383—396.
9. **Трушкова Е. А.** Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 151—159.
10. **Tsar'kov K. A., Khrustalev M. M., Rumyantsev D. S.** Optimization of Quasilinear Stochastic Control-nonlinear Diffusion Systems // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78, Iss. 6. P. 1028—1045.
11. **Onegin E., Khrustalev M.** The Optimal Disturbance Suppression Problem on the Infinite Time Interval for Quasilinear Stochastic Systems with Output Feedback // In Proc. 13th Int. Conf. Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conf.). 2016. URL: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7541193.
12. **Onegin E.**, **Khrustalev M.** Optimal Stabilisation of a Quasilinear Stochastic System with Controllable Parameters // In Proc. 14th Int. Conf. "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conf.). 2018. URL: https://ieeexplore.ieee.org/document/8408384.

13. **Хрусталев М. М.** Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информированности игроков о состоянии // Известия Российской академии наук, Ч. 1. 1995. № 6. С. 194—208; Ч. 2. 1996. № 1. С. 72—79.

14. **Øksendal B.** Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. Springer, Berlin Heidelberg, 2003.

15. **Etienne de Klerk.** Aspects of Semidefinite Programming. Springer US, 2002.

Optimal Stabilization Problem for the Quasilinear System with Controllable Parameters

E. E. Onegin, evgeny.onegin@phystech.edu,
Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997, Russian Federation

Corresponding author: **Onegin Evgeny E.,** Junior Researcher, Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, 117997, Moscow, Russian Federation, e-mail: evgeny.onegin@phystech.edu

Accepted on June 23, 2019

Abstract

The main concern of this paper is the problem of optimal stabilization of a quasilinear stochastic system with controllable parameters. Systems of this type are described by linear stochastic differential equations with multiplicative noises whose matrices, in general case, are nonlinear functions of control. The performance criterion is a modification of the classic quadratic performance cost. The goal is to minimize the criterion on the set of admissible control processes. This formulation of the problem is interesting because it allows us to study a wide range of optimization problems of linear systems with multiplicative perturbations, including: optimization of design parameters of the system, the problem of optimal stabilization under constraints on the gain matrix of the linear regulator in the form of inequalities, the problem of optimal stabilization of linear stochastic systems under information constraints. The main result of this paper is the necessary conditions for the optimal vector in the problem of stabilization of a quasilinear stochastic system with controllable parameters.The numerical gradient-type procedure for synthesis of the optimal stabilizing vector is also proposed. In addition, using obtained results we construct the algorithm for synthesis of a suboptimal time-dependent control. The result of the proposed algorithm is piecewise constant control, which gives the value of the criterion is guaranteed not worse than for the optimal stabilizing vector. This algorithm is relatively simple and one may use it for calculations in real time. The obtained results are applied to the problem of optimal stabilization under information constraints, in which the necessary optimality conditions are also obtained and the gradient-type procedure for the synthesis of the optimal control is proposed. The use of the obtained results is demonstrated by a model example.

Keywords: *continuous stochastic systems, systems with controllable parameters, quadratic criterion, optimal stabilization, linear systems with multiplicative noise, information constraints*

For citation:

Onegin E. E. Optimal Stabilization Problem for the Quasilinear System with Controllable Parameters, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2019, vol. 20, no. 10, pp. 589—599.

DOI: 10.17587/mau.20.589-599

References

1. **Wonham W. M.** Optimal Stationary Control of a Linear System with State-dependent Noise, *SIAM Journal on Control*, 1967, vol. 5, iss. 3, pp. 486—500.

2. **Damm T.** Rational Matrix Equations in Stochastic Control. Springer, Berlin Heidelberg, 2004.

3. **McLane P. J.** Optimal Stochastic Control of Linear Systems with State- and Control-dependent Disturbances, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, vol. 16, iss. 6, pp. 793—798.

4. **Haussmann U. G.** Optimal Stationary Control with State Control Dependent Noise, *SIAM Journal on Control*, 1971, vol. 9, iss. 2, pp. 184—198.

5. **Khrustalyov M. M.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 2011, no. 11, pp. 174—190 (in Russian).

6. **Khalina A. S., Khrustalyov M. M.** Optimizaciya oblika i stabilizaciya upravlyaemyh kvazilinejnyh stohasticheskih sistem, funkcioniruyushchih na neogranichennom intervale vremeni, *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2017, no. 1, pp. 65—88 (in Russian).

7. **Mil'shtejn G. N.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 1976, no. 8, pp. 48—53 (in Russian).

8. **McLane P. J.** Linear Optimal Stochastic Control Using Instantaneous Output Feedback, *International Journal of Control*, 1971, vol. 13, iss. 2, pp. 383—396.

9. **Trushkova E. A.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 2011, no. 6, pp. 151—159 (in Russian).

10. **Tsar'kov K. A., Khrustalev M. M., Rumyantsev D. S.** Optimization of Quasilinear Stochastic Control-nonlinear Diffusion Systems, *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, iss. 6, pp. 1028—1045.

11. **Onegin E.**, **Khrustalev M.** The Optimal Disturbance Suppression Problem on the Infinite Time Interval for Quasilinear Stochastic Systems with Output Feedback, *In Proc. 13th Int. Conf. Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conf.),* 2016, available at: https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7541193.

12. **Onegin E.**, **Khrustalev M.** Optimal Stabilisation of a Quasilinear Stochastic System with Controllable Parameters, *In Proc. 14th Int. Conf. "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conf.),* 2018, available at: https://ieeexplore.ieee.org/document/8408384.

13. **Khrustalyov M. M.** *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk*, Part 1, 1995, no. 6, pp. 194—208; Part 2, 1996, no. 1, pp. 72—79 (in Russian).

14. **Øksendal B.** Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications, Springer, Berlin Heidelberg, 2003.

15. **Etienne de Klerk.** Aspects of Semidefinite Programming, Springer US, 2002.