УДК 519.715 DOI: 10.17587/mau.20.579-588

В. А. Твердохлебов, д-р техн. наук, проф., TverdokhlebovVA@list.ru,
Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов

Модели функциональных зависимостей элементов в последовательностях для решения задач контроля и управления

Разработан вариант основных положений, моделей и методов для постановок и решения задач контроля и диагностирования процессов в системах, задач построения моделей процессов, в которых причинно-следственные связи событий преобразованы в функциональные зависимости между элементами в последовательностях, задач формализации правил управления процессами и т. п. Для этого расширено классическое рекуррентное определение последовательностей, в котором представлены функциональные зависимости элементов от непосредственно предшествующих им m элементов до вводимого Z-рекуррентного определения, в котором определяется функциональная зависимость между наборами элементов в последовательности. Порядки Z-рекуррентных форм имеют вид наборов чисел и удобны для точной и полной характеристики связей событий в процессах. Задачи контроля, диагностирования, построения новых моделей процессов, оценки сложности процессов и правил управления процессами могут ставиться и решаться с использованием числовых показателей Z-рекуррентных определений. Построены классификация Z-рекуррентных определений последовательностей и классификация процессов, разработан алгоритм проверки выполнимости определения Z-рекуррентной формы для заданных последовательностей формы. Z-рекуррентное определение последовательностей дополнено методом Z-рекуррентного определения образов последовательностей, включающим: введение линейного порядка на базовом множестве элементов последовательности, построение для рассматриваемой последовательности образа в форме последовательности выполняющихся или не выполняющихся отношений между элементами, представленных линейным порядком, и применение Z-рекуррентного определения к построенному образу последовательности. Задачей, на которой основывается решение рассматриваемых задач, является распознавание двух последовательностей по свойствам, которые определяются показателями Z-рекуррентных определений последовательностей, имеющими вид порядков Z-рекуррентных форм. Множества порядков в выполняющихся или не выполняющихся Z-рекуррентных формах характеризуют последовательности и анализируемые множества последовательностей, что позволяет ставить и решать задачи, связанные с управлением системами: задачи контроля и диагностирования процессов в системе, задачи построения моделей процессов, задачи формализации и оценки сложности правил управления процессами.

Ключевые слова: *система, процесс, свойство, модель, метод, контроль, диагностирование, последовательность, рекуррентное определение, Z-рекуррентное определение*

Введение

При решении задачи управления процессами в системе используются модели в форме последовательностей, представляющих свойства процессов, рассматриваемых как последовательности событий. Одними из таких основных свойств являются причинно-следственные связи событий в процессах, и эти связи представляются функциональными зависимостями элементов в последовательностях, соответствующих моделям процессов. В статье представлено развитие разработанного и предложенного в работах [1—3] Z-рекуррентного определения последовательностей, которое основывается на новой формализации причинно-следственных связей событий, составляющих процессы. Исследуемая последовательность может уточняться методами интерполяции и экстраполяции, которые рассматриваются в работах [4, 5].

Направление исследований и разработок, в которых эффективно используются рекуррентные отношения между событиями в процессах различной природы, представлено, например, для процессов движения в работах [7, 8], для процессов управления в работах [6, 9, 10], для классификации объектов в работе [11] и для определения свойств процессов в работах [12, 13].

Функциональная зависимость распространяется на связи элементов в последовательностях, т. е. на отображение вида $\theta : N_n \to W$, где $N_n = \{1, 2, ..., n\}$ и W — произвольное множество. Для этого последовательности $\xi = \langle w_1, w_2, ..., w_C\rangle$

сопоставляется формальная структура вида $M = (\{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}\}, \{j_1, j_2, \ldots, j_{n_2}\})$ со следующей интерпретацией: совокупность элементов $w_{i_1+t}, w_{i_2+t}, \ldots, w_{i_{n_1}+t}$ последовательности рассматривается как аргумент, а совокупность элементов $w_{j_1+t}, w_{j_2+t}, \ldots, w_{j_{n_2}+t}$ — как значение функции для значений t, согласованных с величиной C. Частный случай такой функциональной зависимости элементов в последовательности известен в случае классического рекуррентного определения последовательностей: последовательность $\xi = \langle w_1, w_2, ..., w_C \rangle$ рекуррентно определяется рекуррентной формой F^m порядка m, если уравнение $x_{t+m+1} = F^m(x_{t+1}, x_{t+2}, ..., x_{t+m})$ выполняется для всех равенств вида $w_{t+m+1} = F^m(w_{t+1}, w_{t+2}, ..., w_{t+m})$. Математический аппарат Z-рекуррентного определения последовательностей позволяет:

- формально определять структуру функциональных зависимостей элементов в последовательности на основе взаиморасположения элементов;
- осуществлять преобразования содержательно представленных причинно-следственных связей событий в строгую математическую форму уравнений, неравенств, сетей, автоматов и т. п.;
- разрабатывать на основе показателей Z-рекуррентных определений последовательностей модели и методы для постановок и решений задач контроля, диагностирования, управления, оценки сложности функционирования систем и т. п.

Множество всех выполняющихся Z-рекуррентных определений последовательностей может рассматриваться как образ последовательности в классе последовательностей. В работах [1—3] рекуррентное определение последовательности принципиально расширяется до Z-рекуррентного определения последовательности, в котором Z-рекуррентная форма F^M порядка $M = (M_1, M_2) = (\{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}\}, \{j_1, j_2, \ldots, j_{n_2}\})$ имеет вид

$$(x_{j_1+t}, x_{j_2+t}, \ldots, x_{j_{n_2}+t}) = F^M(x_{i_1+t}, x_{i_2+t}, \ldots, x_{i_{n_1}+t}) \quad (1)$$

и представляет функциональную зависимость наборов элементов $(w_{j_1+t}, w_{j_2+t}, \ldots, w_{j_{n_2}+t})$ от наборов элементов $(w_{i_1+t}, w_{i_2+t}, \ldots, w_{i_{n_1}+t})$ при значениях t, согласованных с величиной C. Z-рекуррентное определение последовательности отличается от рекуррентного определения не только по математической форме, но и по большим возможностям для прикладной интерпретации. Прикладная интерпретация Z-рекуррентного определения последовательности предполагает, что рассматриваемая последовательность является математической моделью процесса, состоящего из причинно-следственно связанных событий, в котором элементы последовательности соответствуют событиям, распределенным во времени в соответствии со структурой процесса. Отношение $\xi_1 \neq \xi_2$ для последовательностей одинаковой длины $\xi_1 = \langle a_1, a_2, ..., a_C \rangle$ и $\xi_2 = \langle b_1, b_2, ..., b_C \rangle$ и любой их интерпретации означает, что существует такой индекс i, $i \in \{1, 2, ..., C\}$, для которого выполняется неравенство $a_i \neq b_i$. В таком классическом отношении неравенства последовательностей не представлено множество вариантов свойств последовательностей, следствием которых является классическое отношение неравенства последовательностей. Предлагаемый математический аппарат Z-рекуррентных определений позволяет во множестве отношений неравенства последовательностей выделить подмножества таких свойств функциональных связей элементов, следствиями которых являются неравенства последовательностей.

Целью исследования является разработка показателей функциональных связей элементов в последовательностях, с использованием которых могут решаться задачи распознавания последовательностей по соответствующим им порядкам выполняющихся и не выполняющихся Z-рекуррентных определений, задачи классификации последовательностей по свойствам функциональных зависимостей элементов в последовательностях, задачи формализации правил управления событиями в процессах и т. д. Результатами исследований являются разработка основных положений, математических моделей и методов, позволяющих получать показатели для причинно-следственных связей событий в процессах в виде формальных показателей функциональных зависимостей элементов в последовательностях, представляющих процессы в системе. Для этого вводится и классифицируется множество D порядков Z-рекуррентных форм, соответствующих Z-рекуррентным определениям последовательностей, которое для каждой последовательности ξ разбивается на два подмножества:

- D_ξ^1 — подмножество порядков Z-рекуррентных форм, выполняющихся для Z-рекуррентного определения последовательности ξ;
- D_ξ^2 — подмножество порядков Z-рекуррентных форм, не выполняющихся для Z-рекуррентного определения последовательности ξ.

Для повышения эффективности вычисления разбиения множества D на подмножества D_ξ^1 и D_ξ^2 последовательность ξ преобразуется в последовательность $\psi(\xi)$, которую будем называть образом последовательности ξ, соответствующим линейному порядку элементов на множестве, составляющем последовательность ξ. На множестве $W_\xi = \{w_1, w_2, ..., w_C\}$, используемом в определении последовательности ξ отображением $\theta: N_n \xrightarrow{на} W_\xi$, вводим линейный порядок e: $w_1 \prec w_2 \prec ... \prec w_C$. Отношение следования "$\prec$" элементов множества W_ξ по линейному порядку e дополняем отношениями равенства элементов "=" и невыполнением отношения следования "$\succ$". Например, образом $\psi(\xi)$ последовательности $\xi = \langle a, a, b, a, c, b, a, c, d\rangle$, соответствующим линейному порядку e: $a \prec b \prec c \prec d$ на множестве $W_\xi = \{a, b, c, d\}$ является последовательность $\psi(\xi) = \langle =, \prec, \succ, \prec, \succ, \succ, \prec, \prec\rangle$. Существенным свойством последовательности $\psi(\xi)$ оказывается то, что она характеризует связи взаиморасположения элементов в последовательности ξ без указания самих элементов, что позволяет рассматривать более общие классы последовательностей.

Классификация *Z*-рекуррентных определений

Полное и точное правило Z-рекуррентного определения последовательности $\xi = \langle w_1, w_2, ..., w_C\rangle$ представляется порядком $M = (M_1, M_2) = (\{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}\}, \{j_1, j_2, \ldots, j_{n_2}\})$ Z-рекуррентной формы F^M. Числовая форма порядка позволяет достаточно просто классифицировать Z-рекуррентные определения на основе классификации порядков Z-рекуррентных форм. В общем случае множество порядков Z-рекуррентных форм счетно-бесконечно, так как в каждом конкретном порядке совмещаются два конечных подмножества $\{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}\}$ и $\{j_1, j_2, \ldots, j_{n_2}\}$ целых положительных чисел, ограничения на значение которых зависят от длины C анализируемой последовательности. Для таких совмещений введем следующие условия: $1 \in M_1$, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, $1 \notin M_2$, и все элементы последовательности используются при Z-рекуррентном определении. Кроме этого, будем рассматривать классификации, ограниченные длиной c анализируемых последовательностей.

Пример 1. Счетно-бесконечное множество вариантов Z-рекуррентных определений последовательностей для каждой последовательности длины $C \in N^+$ существенно ограничивается конечным множеством применимых к последовательностям такой длины Z-рекуррентных определений. В табл. 1 для $C = 5$ приведена классификация порядков Z-рекуррентных форм, взаимно-однозначно соответствующих Z-рекуррентным определениям последовательностей. В столбцах 4, 5, 10, 11 перечислены коды, представляющие порядки Z-рекуррентных форм по правилу: номера мест вхождения в код буквы "a" составляют множество M_1, номера мест вхождения в код буквы "b" составляют множество M_2 и номера мест вхождения в код буквы "d" соответствуют индексам, не включенным в порядок Z-рекуррентной формы вида $M = (M_1, M_2)$. Из 54 порядков Z-рекуррентных форм в столбцах 2 и 8 табл. 1 выделены 38 порядков Z-рекуррентных форм, имеющих интерпретацию для случая $C = 5$. Легко показать, что из 38 порядков с помощью нумерации, указанной в столбцах 3 и 9, выделены базовые порядки Z-рекуррентных форм. Пусть D^C — множество порядков Z-рекуррентных форм для последовательностей длины C и D_ξ^C — множество порядков Z-рекуррентных форм для конкретной последовательности ξ, состоящее из множества $D_{\xi 1}^C$ порядков, выполняющихся для ξ, и множества $D_{\xi 2}^C$ порядков, не выполняющихся для ξ.

Основной характеристикой, построенной для последовательности ξ с использованием Z-рекуррентных определений ξ, полагается пара $(D_{\xi 1}^C, D_{\xi 2}^C)$. Две последовательности ξ_1 и ξ_2 рассматриваются как неравные по Z-рекуррентному определению, если $(D_{\xi_1}^C, D_{\xi_2}^C)$.

Введем классификацию для специальных образов последовательностей. К последовательности $\xi = \langle w_{\nu_1}, w_{\nu_2}, \ldots, w_{\nu_C}\rangle$, определенной отображением $\theta_\xi: N_n \xrightarrow{на} W_\xi$, имеющим естественный линейный порядок на множестве N_n, добавим линейный порядок e: $w_1 \prec w_2 \prec ... \prec w_C$ на множестве W_ξ. Образ $\psi(\xi)$ последовательности ξ — это множество, в котором последовательность ξ заменяется последовательностью отношений в ней элементов в соответствии

Таблица 2
Table 2

Таблица классификации порядков Z-рекуррентных форм

Table of Z-recurrent forms orders classification

1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***
1				aaaa		28	20	13	baaa		({2, 3, 4}, {1})
2	1	1	aaab		({1, 2, 3}, {4})	29	21		baab		({2, 3}, {1, 4})
3				aaad		30	22	14	baad		({2, 3}, {1})
4	2	2	aaba		({1, 2, 4}, {3})	31	23		baba		({2, 4}, {1, 3})
5	3		aabb		({1, 2}, {3, 4})	32	24		babb		({2}, {1, 3, 4})
6	4	3	aabd		({1, 2}, {3})	33	25		babd		({2}, {1, 3})
7				aada		34	26	15	bada		({2, 4}, {1})
8	5	4	aadb		({1, 2}, {4})	35	27		badb		({2}, {1, 4})
9				aadd		36	28	16	badd		({2}, {1})
10	6	5	abaa		({1, 3, 4}, {2})	37	29		bbaa		({3, 4}, {1, 2})
11	7		abab		({1, 3}, {2, 4})	38	30		bbab		({3}, {1, 2, 4})
12	8	6	abad		({1, 3}, {2})	39	31		bbad		({3}, {1, 2})
13	9		abba		({1, 4}, {2, 3})	40	32		bbba		({4}, {1, 2, 3})
14	10		abbb		({1}, {2, 3, 4})	41				bbbb	
15	11		abbd		({1}, {2, 3})	42				bbbd	
16	12	7	abda		({1, 4}, {2})	43	33		bbda		({4}, {1, 2})
17	13		abdb		({1}, {2, 4})	44				bbdb	
18	14	8	abdd		({1}, {2})	45				bbdd	
19				adaa		46	34	17	bdaa		({3, 4}, {1})
20	15	9	adab		({1, 3}, {4})	47	35		bdab		({3}, {1, 4})
21				adad		48	36	18	bdad		({3}, {1})
22	16	10	adba		({1, 4}, {3})	49	37		bdba		({4}, {1, 3})
23	17		adbb		({1}, {3, 4})	50				bdbb	
24	18	11	adbd		({1}, {3})	51				bdbd	
25				adda		52	38	19	bdda		({4}, {1})
26	19	12	addb		({1}, {4})	53				bddb	
27				addd		54				bddd	

с выполнением или нарушением линейного порядка e. Образ $\psi(\xi)$ является последовательностью вида $\psi(\xi) \in \{\prec, \succ, =\}^*$, где $\{\prec, \succ, =\}^*$ — множество последовательностей, полученное замыканием множества $\{\prec, \succ, =\}$ по операции конкатенации и исключением пустой последовательности.

Исходными базовыми классами образов последовательностей полагаются классы $K_1, K_2, ..., ..., K_7$: $K_1 = \{=\}^*$, $K_2 = \{\prec\}^*$, $K_3 = \{\succ\}^*$, $K_4 = K_1 \cdot K_2 = \{=\}^* \cdot \{\prec\}^*$, $K_5 = K_2 \cdot K_1 = \{\prec\}^* \cdot \{=\}^*$, $K_6 = K_1 \cdot K_3 = \{=\}^* \cdot \{\succ\}^*$, $K_7 = K_3 \cdot K_1 = \{\succ\}^* \cdot \{=\}^*$. Основным свойством классов K_1, K_2, K_3, K_5, K_7 является то, что последовательности из этих классов Z-рекуррентно определяются Z-рекуррентными формами F^M порядка $M = (M_1, M_2) = (\{1\}, \{2\})$. Для последовательностей из классов K_4, K_6 определяющие Z-рекуррентные формы F^M имеют порядок $M = (M_1, M_2) = (\{1, 2, ..., m\}, \{m + 1\})$, где m — число знаков равенства в последовательности ξ. Классы $K_8 = K_1 \cdot K_2 \cdot K_1 = K_4 \cdot K_1 = K_1 \cdot K_5 = \{=\}^* \cdot \{\prec\}^* \cdot \{=\}^*$ и $K_9 = K_1 \cdot K_3 \cdot K_1 = K_6 \cdot K_1 = K_1 \cdot K_7 = \{=\}^* \cdot \{\succ\}^* \cdot \{=\}^*$ Z-рекуррентно определяются Z-рекуррентными формами F^M, которые имеют порядок $M = (M_1, M_2) = (\{1, 2, ..., m\}, \{m + 1\})$, где m — число знаков равенства в префиксе последовательности ξ.

Классы $K_{10} = K_2 \cdot K_3 = \{\prec\}^* \cdot \{\succ\}^*$ и $K_{11} = K_3 \cdot K_2 = \{\succ\}^* \cdot \{\prec\}^*$ содержат последовательности, для которых Z-рекуррентное определение выполняется при порядке Z-рекуррентной формы F^M, где $M = (M_1, M_2) = (\{1, 2\}, \{3\})$. Следующие классы K_{12}—K_{19} построены как произведения трех классов K_1, K_2, K_3:

- $K_{12} = K_1 \cdot K_{10} = K_4 \cdot K_3 = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 = \{=\}^* \cdot \{\prec\}^* \cdot \{\succ\}^*$;
- $K_{13} = K_{10} \cdot K_1 = K_2 \cdot K_7 = K_2 \cdot K_3 \cdot K_1 = \{\prec\}^* \cdot \{\succ\}^* \cdot \{=\}^*$;
- $K_{14} = K_6 \cdot K_2 = K_1 \cdot K_{11} = K_1 \cdot K_3 \cdot K_2 = \{=\}^* \cdot \{\succ\}^* \cdot \{\prec\}^*$;
- $K_{15} = K_{11} \cdot K_1 = K_3 \cdot K_5 = K_3 \cdot K_2 \cdot K_1 = \{\succ\}^* \cdot \{\prec\}^* \cdot \{=\}^*$;
- $K_{16} = K_5 \cdot K_3 = K_2 \cdot K_6 = K_2 \cdot K_1 \cdot K_3 = \{\prec\}^* \cdot \{=\}^* \cdot \{\succ\}^*$;
- $K_{17} = K_7 \cdot K_2 = K_3 \cdot K_4 = K_3 \cdot K_1 \cdot K_2 = \{\succ\}^* \cdot \{=\}^* \cdot \{\prec\}^*$;
- $K_{18} = K_5 \cdot K_2 = K_2 \cdot K_4 = K_2 \cdot K_1 \cdot K_2 = \{\prec\}^* \cdot \{=\}^* \cdot \{\prec\}^*$;
- $K_{19} = K_7 \cdot K_3 = K_3 \cdot K_6 = K_3 \cdot K_1 \cdot K_3 = \{\succ\}^* \cdot \{=\}^* \cdot \{\succ\}^*$.

Для последовательностей из классов K_{12}, ..., ..., K_{19} также возможно сопоставление конкретных порядков выполняющихся Z-рекуррентных форм. Каждая конкретная последовательность допускает представление нескольких вариантов композиций классов K_1, K_2, ..., K_{19} для определения класса, которому принадлежит Z-рекуррентное определение последовательности. Например, для последовательностей из классов K_{12}, K_{14} выполняется Z-рекуррентное определение Z-рекуррентной формой F^M порядка $M = (M_1, M_2) = (\{1, 2, ..., m\}, \{m + 1\})$, где m — число знаков " = " в последовательности, если $m > 2$, и определение Z-рекуррентной формой порядка $M = (M_1, M_2) = (\{1, 2\}, \{3\})$, если в последовательности только один знак равенства. Число знаков равенства в суффиксе последовательности не влияет на порядок Z-рекуррентной формы.

T_2

a	a	b	c	c	b	a	b	b	c	b	d	d	a	b	d
	a	a	b	c	c	b	a	b	b	c	b	d	d	a	b
		a	a	b	c	c	b	a	b	b	c	b	d	d	a
			a	a	b	c	c	b	a	b	b	c	b	d	d
				a	a	b	c	c	b	a	b	b	c	b	d
					a	a	b	c	c	b	a	b	b	c	b
						a	a	b	c	c	b	a	b	b	c
							a	a	b	c	c	b	a	b	b
								a	a	b	c	c	b	a	b
									a	a	b	c	c	b	a
										a	a	b	c	c	b
											a	a	b	c	c
												a	a	b	c
													a	a	b
														a	a
															a

T_3

a	b	b	c	b	d	d	a	b	d
b	a	b	b	c	b	d	d	a	b
c	c	b	a	b	b	c	b	d	d

T_4

b	b	c	b	d	d	a	b	d
a	b	b	c	b	d	d	a	b
c	b	a	b	b	c	b	d	d

Таблицы T_2, T_3 и T_4 для анализа выполнимости Z-рекуррентных определений последовательности ξ Z-рекуррентными формами порядков $M^1 = (\{2, 4\}, \{7\})$, $M^2 = (\{2, 4\}, \{8\})$, $M^3 = (\{2, 4\}, \{7, 8\})$

Tables T_2, T_3 and T_4 for analysis of executing of Z-recurrent definition of sequences ξ by Z-recurrent forms with orders $M^1 = (\{2, 4\}, \{7\})$, $M^2 = (\{2, 4\}, \{8\})$, $M^3 = (\{2, 4\}, \{7, 8\})$

Алгоритм проверки выполнимости Z-рекуррентного определения

Основное свойство, характеризующее Z-рекуррентное определение последовательности $\xi = \langle w_1, w_2, ..., w_C \rangle$ Z-рекуррентной формой F^M порядка $M = (M_1, M_2) = (\{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}\}, \{j_1, j_2, \ldots, j_{n_2}\})$, представляется следующей формулой:

$$\begin{aligned} &((w_{i_1+t_1}, w_{i_2+t_1}, \ldots, w_{i_{n_1}+t_1}) = \\ &= (w_{i_1+t_2}, w_{i_2+t_2}, \ldots, w_{i_{n_1}+t_2})) \to \\ &\to ((w_{j_1+t_1}, w_{j_2+t_1}, \ldots, w_{j_{n_2}+t_1}) = \\ &= (w_{j_1+t_2}, w_{j_2+t_2}, \ldots, w_{j_{n_2}+t_2})) \end{aligned} \tag{2}$$

для всех значений t_1 и t_2, имеющих смысл для последовательности ξ. На основании формулы (2) сформулируем алгоритм, который достаточно простыми действиями позволяет определить, выполняется ли Z-рекуррентное определение последовательности ξ с использованием Z-рекуррентной формы F^M заданного порядка M. Перед точной формулировкой алгоритма рассмотрим пример.

Пример 2. Для заданной последовательности $\xi = \langle a, a, b, c, c, b, a, b, b, c, b, d, d, a, b, d \rangle$ проверим выполнимость Z-рекуррентной формы порядка $M = (M_1, M_2) = (\{2, 4\}, \{7, 8\})$ с условием $1 \notin M_1$. Исходной информацией для алгоритма является таблица T_2 размерности 16×16, представленная на рисунке заполненными клетками.

В таблице T_2 (см. рисунок) для элементов исходной последовательности второй, третьей и т. д. строками представлены предшествующие элементы. Выделенные две строки (вторая и четвертая) требуются для анализа того, выполняется ли для последовательности Z-рекуррентная форма $M = (M_1, M_2) = (\{2, 4\}, \{7, 8\})$. Выделенные две строки, соответствующие числам 2, 4 и два столбца, соответствующие числам 7, 8, достаточны для анализа. Столбцы таблицы T_2 с номерами 1...6 и строки с номерами 7...16 исключаются.

Выполнение Z-рекуррентного определения с использованием порядка ({2, 4}, {7, 8}) Z-рекуррентной формы может быть эквивалентно представлено выполнением двух Z-рекуррентных определений F^{M^1} и F^{M^2}, где $M^1 = (\{2, 4\}, \{7\})$ и $M^2 = (\{2, 4\}, \{8\})$. Следовательно, в анализе последовательности таблица T_2 (см. рисунок) заменяется анализом таблиц T_3 и T_4, представленных на рисунке.

Для анализа таблиц T_3 и T_4 рассматриваются предполагаемые функциональные зависимости f^1 и f^2:

- $f^1(c, b) = f^1(b, d) = a, f^1(c, a) = f^1(b, b) = f^1(b, c) = f^1(d, a) = b, f^1(a, b) = c, f^1(b, b) = f^1(c, d) = f^1(d, b) = d$, определенные таблицей T_1;
- $f^2(b, b) = a, f^2(c, a) = f^2(b, b) = f^2(b, c) = f^2(d, a) = b, f^2(a, b) = c, f^2(b, b) = f^2(c, d) = f^2(d, b) = d$, определенные таблицей T_2.

Вывод: для последовательности $\xi = \langle a, a, b, c, c, b, a, b, b, c, b, d, d, a, b, d \rangle$ выполняются Z-рекуррентные определения с использованием Z-рекуррентных форм порядков $M^1 = (\{2, 4\}, \{7\})$, $M^2 = (\{2, 4\}, \{8\})$ и $M^3 = (\{2, 4\}, \{7, 8\})$. Эти конкретные Z-рекуррентные определения являются частью общей точной и полной модели процесса, представленного последовательностью ξ, пригодной для построения других моделей, постановок и решений задач, связанных с управлением системами.

Алгоритм содержит следующие этапы.

Этап 1. Для заданных последовательности $\xi = \langle w_1, w_2, ..., w_C \rangle$ и порядка $M = (M_1, M_2) = (\{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}\}, \{j_1, j_2, \ldots, j_{n_2}\})$ Z-рекуррентной формы F^M строится таблица размерности $C \times C$ с первой строкой ξ и последующими строками, полученными последовательным сдвигом на одну позицию вправо. В таблице выделяются строки с номерами $\{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}\}$ и первая строка, остальные строки исключаются. Также исключаются столбцы, номера которых меньше k, где $k = \min(M_1 \cup M_2)$. Полученная таблица обозначается T_0.

Этап 2. Из полученной на первом этапе таблицы T_0 строятся n_2 таблиц $T_{01}, T_{02}, \ldots, T_{0n_2}$ по правилу: таблица $T_{0\nu}, 1 \leqslant \nu \leqslant n_2$ получается из таблицы T_0 исключением столбцов, номера которых в таблице T_0 меньше j_ν.

Этап 3. Таблицы $T_{01}, T_{02}, \ldots, T_{0n_2}$ анализируются на выполнение функциональной зависимости элементов из верхних строк таблиц от ниже расположенных в столбцах элементов. Если для всех таблиц $T_{01}, T_{02}, \ldots, T_{0n_2}$ функциональная зависимость элементов из верхних строк таблиц от ниже расположенных элементов выполняется, то последовательность ξ Z-рекуррентно определяется Z-рекуррентной формой порядка $M = (M_1, M_2) = (\{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}\}, \{j_1, j_2, \ldots, j_{n_2}\})$. В противном случае последовательность ξ не определяется Z-рекуррентной формой порядка M.

Образы последовательностей по линейным порядкам элементов

Z-рекуррентное определение последовательностей характеризует функциональные связи между элементами последовательности на основе структур связей мест расположения элементов. В соответствии с этим показатели Z-рекуррентных определений последовательностей, различающиеся взаимно-однозначным переобозначением элементов, совпадают. Одни и те же показатели Z-рекуррентных определений последовательностей могут соответствовать различным последовательностям, которые связаны не только переобозначением элементов. Для того чтобы расширить классы последовательностей, представленные показателями Z-рекуррентных определений, перенесем Z-рекуррентное определение на образы последовательностей, построенные в форме цепочек новых отношений между элементами. Последовательность $\xi = \langle w_{\nu_1}, w_{\nu_2}, \ldots, w_{\nu_C} \rangle$ и отображение $\theta : N_n \xrightarrow{на} W_\xi$ дополним линейным порядком $w_1 \prec w_2 \prec \ldots \prec w_C$. Кроме последовательности ξ Z-рекуррентное определение будем применять к образу $\psi(\xi)$ и получать показатели функциональных зависимостей между элементами в последовательности ξ на основе функциональных зависимостей между элементами в последовательности $\psi(\xi)$.

Пример 3. С использованием Z-рекуррентных определений последовательностей можно получать характеристики классов последовательностей. Рассмотрим класс всех двоичных последовательностей длины 5 и соответствующий ему класс образов последовательностей для линейного порядка $0 \prec 1$. В классе образов таких последовательностей 32 последовательности:

1. $\psi(0, 0, 0, 0, 0) = \langle =, =, =, = \rangle$
2. $\psi(0, 0, 0, 0, 1) = \langle =, =, =, \prec \rangle$
3. $\psi(0, 0, 0, 1, 0) = \langle =, =, \prec, \succ \rangle$
4. $\psi(0, 0, 0, 1, 1) = \langle =, =, \prec, = \rangle$
5. $\psi(0, 0, 1, 0, 0) = \langle =, \prec, \succ, = \rangle$
6. $\psi(0, 0, 1, 0, 1) = \langle =, \prec, \succ, \prec \rangle$
7. $\psi(0, 0, 1, 1, 0) = \langle =, \prec, =, \succ \rangle$
8. $\psi(0, 0, 1, 1, 1) = \langle =, \prec, =, = \rangle$
9. $\psi(0, 1, 0, 0, 0) = \langle \prec, \succ, =, = \rangle$
10. $\psi(0, 1, 0, 0, 1) = \langle \prec, \succ, =, \prec \rangle$
11. $\psi(0, 1, 0, 1, 0) = \langle \prec, = , \prec, = \rangle$
12. $\psi(0, 1, 0, 1, 1) = \langle \prec, \succ, \prec, = \rangle$
13. $\psi(0, 1, 1, 0, 0) = \langle \prec, =, \succ, = \rangle$
14. $\psi(0, 1, 1, 0, 1) = \langle \prec, =, \succ, \prec \rangle$
15. $\psi(0, 1, 1, 1, 0) = \langle \prec, =, =, \succ \rangle$
16. $\psi(0, 1, 1, 1, 1) = \langle \prec, =, =, = \rangle$
17. $\psi(1, 0, 0, 0, 0) = \langle \succ, =, =, = \rangle$
18. $\psi(1, 0, 0, 0, 1) = \langle \succ, =, =, \prec \rangle$
19. $\psi(1, 0, 0, 1, 0) = \langle \succ, =, \prec, \succ \rangle$
20. $\psi(1, 0, 0, 1, 1) = \langle \succ, =, \prec, = \rangle$
21. $\psi(1, 0, 1, 0, 0) = \langle \succ, \prec, \succ, = \rangle$
22. $\psi(1, 0, 1, 0, 1) = \langle \succ, \prec, \succ, \prec \rangle$
23. $\psi(1, 0, 1, 1, 0) = \langle \succ, \prec, =, \succ \rangle$
24. $\psi(1, 0, 1, 1, 1) = \langle \succ, \prec, =, = \rangle$
25. $\psi(1, 1, 0, 0, 0) = \langle =, \succ, =, = \rangle$
26. $\psi(1, 1, 0, 0, 1) = \langle =, \succ, =, \prec \rangle$
27. $\psi(1, 1, 0, 1, 0) = \langle =, \succ, \prec, \succ \rangle$
28. $\psi(1, 1, 0, 1, 1) = \langle =, \succ, \prec, = \rangle$
29. $\psi(1, 1, 1, 0, 0) = \langle =, =, \succ, = \rangle$
30. $\psi(1, 1, 1, 0, 1) = \langle =, =, \succ, \prec \rangle$
31. $\psi(1, 1, 1, 1, 0) = \langle =, =, =, \succ \rangle$
32. $\psi(1, 1, 1, 1, 1) = \langle =, =, =, = \rangle$

Образ $\psi(\xi)$ последовательности ξ, рассматриваемый для определения класса последовательностей, значительно богаче, чем набор характеристик, соответствующий самой последовательности. Например, последовательность $\langle 1, 1, 0, 0, 1 \rangle$ Z-рекуррентно определяется Z-рекуррентными формами порядков ({1}, {3}), ({1, 2}, {3}), ({2, 3}, {1}), ({1,4}, {2}), ({2, 4}, {1}), ({3, 4}, {1}), ({1, 2, 3}, {4}), ({1, 3, 4}, {2}). Для образа $\langle =, \succ, =, \prec \rangle$ последовательности $\langle 1, 1, 0, 0, 1 \rangle$ выполняются Z-рекуррентные определения с использованием Z-рекуррентных форм порядков ({1}, {3}), ({1, 2}, {3}), ({2, 3}, {1}) и с использованием таких Z-рекуррентных форм для последовательностей с большим базовым множеством, например, множеством $\{a, b, c\}$, порядком $a \prec b \prec c$ и последовательностью $\langle c, c, a, a, b \rangle$. Выбор на базовом множестве линейного порядка, с использованием которого определяется образ последовательности, является существенным, так как последовательности могут соответствовать несколько различных образов в зависимости от выбора линейного порядка: последовательности $\langle 1, 1, 0, 0, 1 \rangle$ и линейному порядку $1 \prec 0$ соответствует образ $\langle =, \prec, =, \succ \rangle$.

Предположим, что каждый из процессов определяется значениями показателей по k свойствам $R_1, R_2, ..., R_k$ с множествами $U_1, U_2, ..., U_k$ значений свойств процессов. Это означает, что модель события W_i в момент (интервал) времени t представляется таблицей вида T_{it} (табл. 2).

В таблице T_{it} для конкретных момента времени t и класса процессов P_i и для всех рассматриваемых частных процессов $P_{ij}, 1 \leqslant j \leqslant \nu_i$, из класса процессов P_i, представлен срез в момент t значений $G(P_{ij}, R_\mu, t)$ показателей свойств процессов. В таблице T_{it} значения вида $G(P_{ij}, R_\mu, t)$ могут быть: конкретными числами; конкретными логическими значениями с интерпретацией; символами с содержательной интерпретацией; конкретными неравенствами или другими отношениями. Срез в момент времени t процесса в целом функционирования сложной человеко-машинной системы предполагается определенным таблицей T_t, состоящей из совмещения таблиц в последовательность $T_{1,\ t}$, $T_{2,\ t}$, ..., $T_{63,\ t}$.

Такая форма определения процесса позволяет использовать Z-рекуррентное определение последовательности для построения моделей процессов в виде дифференциаль-

Таблица 2
Table 2

Таблица T_{it}

Table T_{it}

		R_1	R_2	...	R_k
P_i	P_{i1}	$G(P_{i1}, R_1, t)$	$G(P_{i1}, R_2, t)$	...	$G(P_{i1}, R_k, t)$
	P_{i2}	$G(P_{i2}, R_1, t)$	$G(P_{i2}, R_2, t)$	...	$G(P_{i2}, R_k, t)$
	...	...	...	...	...
	$P_{i\nu_i}$	$G(P_{i\nu_i}, R_1, t)$	$G(P_{i\nu_i}, R_2, t)$	...	$G(P_{i\nu_i}, R_k, t)$

ных, интегральных, алгебраических или логических уравнений. Для последовательности $\xi = < w_{\nu_1}, w_{\nu_2}, ..., w_{\nu_C} >$, являющейся моделью процесса, представленного последовательностью событий, определенных таблицами, вычисляются все (или некоторые, в зависимости от постановки задачи построения уравнения) выполняющиеся порядки Z-рекуррентных форм: M^1, M^2, ..., M^r, где $M^\mu = (M_1^\mu, M_2^\mu) = (\{i_1^\mu, i_2^\mu, ..., i_{\alpha_\mu}^\mu\}, \{j_1^\mu, j_2^\mu, ..., j_{\beta_\mu}^\mu\})$. Из набора порядков Z-рекуррентных форм выбираются те, которые будут использованы при построении уравнения (для сокращения используемых обозначений будем предполагать, что для построения уравнения используются Z-рекуррентные формы всех выполняющихся для последовательности порядков).

Контроль и диагностирование в управлении системой

При исследовании контроля и диагностирования в управлении реальной сложной системой существенные ограничения принимаются в виде дополнительных условий и предположений. Реальная система как материальное тело изменяется во времени и, следовательно, результаты контроля и диагностирования имеют значение для прошлого системы, а распространяются из прошлого на настоящее и будущее с помощью гипотез. Кроме этого, существует последовательная во времени связь в событиях "возникновения дефекта", "проявление дефекта в процессе функционирования системы" и "обнаружения дефекта по свойствам изменения процесса функционирования". Каждое конкретное значение показателя свойства события или процесса в системе представляет дефект только с точностью до класса событий или класса процессов. Эти и другие особенности соответствия реальных объектов, событий и процессов их формальным моделям исключаются дополнительными предположениями и условиями.

Для решения задач контроля и диагностирования в управлении системой на основе использования формальных средств примем следующие предположения. Пусть H — множество всех последовательностей, являющихся моделями рассматриваемых процессов в системе. Предположим, что множество H представлено двумя подмножествами: $H_1 = \{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ (подмножество моделей работоспособных процессов) и $H_2 = \{h_d\}_{d \in D}$ (подмножество моделей процессов, соответствующих рассматриваемым дефектам системы). Для систематизации процессов предлагается использовать ранее разработанную классификацию процессов, включающую 63 варианта процессов: шесть базовых процессов (класс P_1 командно-информационных управляющих процессов; класс P_2 процессов действий человеческих звеньев в постановках целей и задач, а также в реализации решений задач; класс P_3 процессов функционирования техники и оборудования; класс P_4 процессов энергообеспечения; класс P_5 процессов обеспечения сырьем и другими ресурсами; класс P_6 процессов взаимодействия с внешней средой) и 57 вариантов процессов P_7, ..., P_{63}, соответствующих сочетаниям базовых процессов по два, по три, ..., всех шести базовых процессов.

В отличие от традиционных подходов к постановкам и решениям задач контроля и диагностирования предлагается представлять математические модели процессов в форме выполняющихся и не выполняющихся Z-рекуррентных определений последовательностей, соответствующих процессам. Рассмотрим случай зафиксированной длины c последовательностей. Множество H (или выбранное для анализа его подмножество) для каждой последовательности $h \in H$ разобьем на пару подмножеств $(\Phi_h, \bar{\Phi}_h)$, где Φ_h — множество выполняющихся для последовательности h Z-рекуррентных определений и $\bar{\Phi}_h$ — множество не выполняющихся для последовательности h Z-рекуррентных определений. Для задач контроля исходными данными являются множество пар $(\Phi_h^1, \bar{\Phi}_h^1)$ по всем $h \in H_1$ и множества пар $(\Phi_h^2, \bar{\Phi}_h^2)$ по всем $h \in H_2$. Переменной информацией является пара вида $(\Phi_{h_X}, \bar{\Phi}_{h_X})$, вычисленная для последовательности h_X, соответствующей реальному, фактическому процессу функционирования системы. В задаче контроля требуется определить, какому из двух множеств пар (для последовательностей из множества H_1 или для последовательностей из множества H_2) принадлежит пара $(\Phi_{h_X}, \bar{\Phi}_{h_X})$. В задачах диагностирования исключается анализ последовательностей из множества последовательностей H_1 и рассматриваются варианты совпадения пары $(\Phi_{h_X}, \bar{\Phi}_{h_X})$ с конкретными парами, вычисленными для последовательностей из множества H_2.

Заключение

На основе проведенных исследований разработаны основные положения, включающие: расширение рекуррентного определения последовательностей до вводимого Z-рекуррентного определения; представление моделей процессов в форме множества выполняющихся Z-рекуррентных определений последовательностей и множества не выполняющихся; разработку моделей и методов для распознавания процессов по моделям процессов в форме множеств выполняющихся Z-рекуррентных определений последовательностей и множеств не выполняющихся Z-рекуррентных определений. Разработаны классификация Z-рекуррентных определений последовательностей, метод проверки выполнимости для последовательности конкретного Z-рекуррентного определения, классификация процессов и табличное представление значений показателей свойств событий. Сформулированы постановки задач контроля, диагностирования и методы решения этих задач. Введение Z-рекуррентного определения последовательностей позволяет заменять прямые причинно-следственные или логические связи событий функциональными связями значений показателей свойств событиями. Даже для небольших значений длин $c \in N^{+}$ последовательностей оказывается возможным при использовании Z-рекуррентных определений последовательностей рассматривать большое число свойств процессов, представленных выполняющимися или не выполняющимися Z-рекуррентными определениями последовательностей.

Список литературы

1. **Твердохлебов В. А.** Z-рекуррентное определение последовательностей в задачах контроля и диагностирования процессов в системах // Доклады академии военных наук. 2016. № 2 (70). С. 43—47.

2. **Твердохлебов В. А.** Геометрическая форма автоматных отображений, рекуррентное и Z-рекуррентное определение последовательностей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 2. С. 232—241.

3. **Твердохлебов В. А.** Z-рекуррентное определение последовательности для оценки сложности структуры последовательности // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Международной науч. конф. (Саратов, 30 июня — 02 июля 2016 г.). Саратов, 2016. С. 414—417.

4. **Епифанов А. С.** Методы оценки сложности законов функционирования автоматных моделей систем // Прикладная математика и вопросы управления. 2017. № 3. С. 19—29.

5. **Епифанов А. С.** Метод оценки сложности дискретных детерминированных автоматов // Управление большими системами: Материалы IX Всероссийской школы-конференции молодых ученых (Липецк, 21—24 мая 2012 г.). Липецк, 2012. С. 45—47.

6. **Резчиков А. Ф., Твердохлебов В. А.** Метод рекуррентного и Z-рекуррентного управления функционированием сложной системы // Проблемы управления. 2018. № 3. С. 56—64.

7. **Алешкин А. П., Архипова И. Г., Полиенко В. Н., Семенов А. А., Макаров А. А.** Метод рекуррентного оценивания параметров движения подводного объекта по данным космических навигационных определений буксируемой аппаратуры потребителя // Радиопромышленность. 2018. № 1. С. 57—61.

8. **Анцев Г. В., Лысенко Л. Н., Петров В. А.** Повышение точности определения параметров орбит на основе применения операторов совмещения витковых оценок по результатам малоинтервальной обработки данных ГЛОНАСС // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Приборостроение. 2016. № 5 (110). С. 99—110.

9. **Брега Г. В.** Рекуррентный подход к управлению рисками в инновационной деятельности // Управленческие науки. 2015. № 2. С. 50—57.

10. **Кривулин Н. К., Нев О. А.** Вычисление асимптотических характеристик стохастической динамической системы с синхронизацией событий // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1, № 4. С. 533—543.

11. **Умирзаков И. Х.** Рекуррентный метод определения различных наборов кластеров и распределения кластеров по размерам в системе с конечным числом частиц // Бутлеровские сообщения. 2015. Т. 44, № 10. С. 45—63.

12. **Кельманов А. В., Хамидуллин С. А., Окольнишникова Л. В.** Распознавание квазипериодической последовательности, включающей одинаковые подпоследовательности-фрагменты // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5, № 4 (12). С. 38—54.

13. **Кельманов А. В., Хамидуллин С. А.** Апостериорное обнаружение заданного числа усеченных подпоследовательностей в квазипериодической последовательности // Сибирский журнал индустриальной математики. 2000. Т. 3, № 1 (15). С. 137—156.

Models of Functional Dependencies of Elements in Sequences for Solving Problems of Control and Management

V. A. Tverdokhlebov, TverdokhlebovVA@list.ru,
Institute of Problems of Precision Mechanics and Control of RAS, 410028, Saratov, Russian Federation

Corresponding author: **Tverdokhlebov Vladimir A.,** Doctor of science, Professor, Institute of Problems of Precision Mechanics and Control of RAS, 410028, Saratov, Russian Federation, e-mail: TverdokhlebovVA@list.ru

Accepted on May 15, 2019

Abstract

In paper developed version of the basic concepts, models and methods for the formulation and solution of problems of control and diagnosing of processes in systems, tasks of constructing models of processes in which the causal relationships of events are transformed into functional dependencies between elements in sequences, problems of formalizing of process control rules, etc. For this extended classical recurrent definition of the sequences, which presents the functional elements depending on the immediately preceding to them m elements to offered Z-recurrent definition, which defines the functional relationship between sets of elements in the sequence. The orders of Z-recurrent forms have the form of a set of numbers and are convenient for accurate and complete characterization of the connections of events in processes. The tasks of control, diagnosing, constructing new models of processes, assessing the complexity of processes and rules for managing processes can be formulated and solved using numerical indicators of Z-recurrent definitions. A classification of Z-recurrent definitions of sequences and a classification of processes are constructed, an algorithm for checking the feasibility of determining a Z-recurrent form for given sequences of form is developed. The Z-recurrent definition of sequence is complemented by the Z-recurrent sequence pattern method, which includes: introducing a linear order on the base set of sequence elements, constructing an image for the sequence in the form of a sequence of executing or non-executing relationships between the elements represented by a linear order, and applying Z-recurrent definitions to the constructed image of the sequence. The problem on which the solution of the considered problems is based is the recognition of two sequences by properties, which are determined by the indicators of Z-recurrent definitions of sequences, which have the form of orders of Z-recurrent forms. Sets of orders in executing or non-executing Z-recurrent forms characterize the sequences and the analyzed sets of sequences, which allows you to set and solve problems related to system management: problems of control and diagnosing of processes in the system, problems of constructing process models, problems of formalizing and complexity estimation of control rules of processes.

Keywords: *system, process, property, model, method, control, diagnosing, sequence, recurrent definition, Z-recurrent definition*

Acknowledgements: The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. AAAA-A18-118042790041-7).

For citation:

Tverdokhlebov V. A. Models of Functional Dependencies of Elements in Sequences for Solving Problems of Control and Management, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2019, vol. 20, no. 10, pp. 579—588.

DOI: 10.17587/mau.20.579-588

References

1. **Tverdohlebov V. A.** *Doklady akademii voennyh nauk*, 2016, no. 2 (70), pp. 43—47 (in Russian).
2. **Tverdohlebov V. A.** *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 232—241 (in Russian).
3. **Tverdohlebov V. A.** *Komp'yuternye nauki i informacionnye tekhnologii: Materialy Mezhdunarodnoj nauch. konf.*, Saratov, 30 iyunya 02 iyulya 2016 g., Saratov, 2016, pp. 414—417 (in Russian).
4. **Rezchikov A. F., Tverdohlebov V. A.** *Problemy Upravleniya*, 2018, no. 3, pp. 56—64 (in Russian).
5. **Epifanov A. S.** *Prikladnaya Matematika i Voprosy Upravleniya*, 2017, no. 3, pp. 19—29 (in Russian).
6. **Epifanov A. S.** *Upravlenie bol'shimi sistemami: Materialy IX Vserossijskoj shkoly-konferencii molodyh uchenyh* (Lipeck, 21—24 maya 2012 g.), Lipeck, 2012, pp. 45—47 (in Russian).
7. **Aleshkin A. P., Arhipova I. G., Polienko V. N., Semenov A. A., Makarov A. A.** Radiopromyshlennost', 2018, no. 1, pp. 57—61 (in Russian).
8. **Ancev G. V., Lysenko L. N., Petrov V. A.** *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N. E. Baumana. Seriya: Priborostroenie,* 2016, no. 5 (110), pp. 99—110 (in Russian).
9. **Brega G. V.** *Upravlencheskie nauki*, 2015, no. 2, pp. 50—57 (in Russian).
10. **Krivulin N. K., Nev O. A.** *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 2014, vol. 1, no. 4, pp. 533—543 (in Russian).
11. **Umirzakov I. H.** *Butlerovskie soobshcheniya*, 2015, vol. 44, no. 10, pp. 45—63 (in Russian).
12. **Kel'manov A. V., Hamidullin S. A., Okol'nishnikova L. V.** *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki,* 2002, vol. 5, no. 4 (12), pp. 38—54 (in Russian).
13. **Kel'manov A. V., Hamidullin S. A.** *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki*, 2000, vol. 3, no. 1 (15), pp. 137—156 (in Russian).