

В. И. Краснощеченко, канд. техн. наук, доц., [kviip@yandex.ru](mailto:kviip@yandex.ru),  
Калужский филиал МГТУ им. Н. Э. Баумана

## Синтез робастного динамического $H_\infty$ -регулятора низкого порядка с использованием линейных матричных неравенств и проекционных лемм

*Рассматривается прямой подход к синтезу робастного регулятора низкого порядка. Для синтеза робастного  $H_\infty$ -регулятора низкого порядка для объектов с политопической неопределенностью используются лемма об ограниченности  $H_\infty$ -нормы передаточных функций (так называемая BR-лемма для линейных матричных неравенств) и две процедуры проектирования: 1) проекционная лемма для линейных матричных неравенств; 2) проектирование неотрицательно определенных матриц в редуцированное пространство также неотрицательно определенных матриц. Подробно рассмотрен пример синтеза регулятора для двухмассовой системы четвертого порядка с политопической неопределенностью. Показано, что порядок регулятора можно снизить с первоначального четвертого до второго при незначительном ухудшении показателей качества.*

**Ключевые слова:** робастность, линейные матричные неравенства, проекционная лемма, политопическая неопределенность, двухмассовая система, регулятор низкого порядка

### Введение

В настоящее время существует множество методов и алгоритмов синтеза динамических регуляторов (регуляторов, для которых входом является вектор измеряемых переменных, но не используется наблюдатель) для объектов с неопределенными параметрами. Предложены алгоритмы робастного модального синтеза динамических  $H_\infty$ -регуляторов [1]; алгоритмы, использующие проекционную лемму для линейных матричных неравенств [2–5]; синтез с использованием дробно-линейных преобразований [6]; алгоритмы, использующие параметризацию Юлы и взаимно простую факторизацию передаточных функций [7]. Но всегда возникает одна проблема: спроектированные регуляторы, как правило, имеют высокий порядок, равный порядку объекта управления или превышающий его. Достаточно привести пример из работы [6], где для объекта второго порядка с тремя интервально неопределенными параметрами спроектированный регулятор имеет двадцатый порядок. Поэтому проблема синтеза регуляторов низкого порядка имеет как теоретический, так и, что более важно, практический интерес. Данная проблема всегда стояла перед разработчиками, менялись только подходы и объекты управления [8–11].

Следует отметить, что при проектировании регуляторов низкого порядка имеют место три подхода.

1. Для объекта высокого порядка проектируется регулятор высокого порядка, а затем с использованием различных подходов (например, балансного усечения, аппроксимации ганкелевой нормы и др. [6]) синтезируется регулятор низкого порядка. Возможна следующая проблема: редуцированный регулятор может приводить не только к значительной потере качества, но и даже к потере устойчивости.

2. Редуцируется модель высокого порядка объекта управления, и для полученной редуцированной модели объекта строится регулятор пониженного порядка. Возможна следующая проблема: понижение порядка модели объекта ограничено сохранением его существенных свойств.

3. Прямой метод: для модели высокого порядка сразу синтезируется регулятор низкого порядка. Возможна следующая проблема: потеря качества управления для редуцированного регулятора, однако устойчивость обеспечивается.

В данной статье рассматривается третий подход. Для синтеза робастного  $H_\infty$ -регулятора низкого порядка для объектов с политопической неопределенностью используется лемма об ограниченности  $H_\infty$ -нормы передаточных функций (так называемая BR-лемма (bounded real lemma) [12, 13]) для линейных матричных неравенств и две процедуры проектирования: 1) проекционная лемма для линейных матричных неравенств [2, 3, 12], далее — просто проекционная лемма

(аналог элиминационной леммы П. Финслера [14]); 2) проектирование неотрицательно определенных матриц в редуцированное пространство также неотрицательно определенных матриц. Подробно рассмотрен пример синтеза регулятора для высококачественного объекта четвертого порядка с политопической неопределенностью. Показано, что порядок регулятора можно снизить с первоначального четвертого до второго при незначительном ухудшении показателей качества.

### Постановка задачи

Задан объект управления:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} \in R^{n_p}$  — вектор состояния;  $\mathbf{z} \in R^{n_z}$  — вектор регулируемых переменных (определяет цели управления; чаще всего состоит из ошибок слежения, а также позволяет косвенно ограничить уровень входного управляющего сигнала и др.);  $\mathbf{y} \in R^{n_y}$  — вектор измеряемых переменных;  $\mathbf{u} \in R^{n_u}$  — вектор управления;  $\mathbf{w} \in R^{n_w}$  — вектор возмущений (неконтролируемых воздействий, куда относятся различного рода шумы, командные сигналы). Матрицы объекта управления имеют соответствующие размерности:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &: n_p \times n_p; \mathbf{B}_1 : n_p \times n_w; \mathbf{B}_2 : n_p \times n_u; \\ \mathbf{C}_1 &: n_z \times n_p; \mathbf{D}_{11} : n_z \times n_w; \mathbf{D}_{12} : n_z \times n_u; \\ \mathbf{C}_2 &: n_y \times n_p; \mathbf{D}_{21} : n_y \times n_w. \end{aligned}$$

Требуется для выбранного уровня  $H_\infty$ -качества  $\gamma > 0$  и заданной политопической неопределенности синтезировать робастный динамический регулятор по выходу  $\mathbf{U}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{Y}(s)$  (где  $\mathbf{K}(s)$  — матричная передаточная функция регулятора) минимально возможного порядка, обеспечивающий выполнение условия

$$\|\mathbf{W}_{w \rightarrow z}(s)\|_\infty < \gamma;$$

$\mathbf{W}_{w \rightarrow z}(s)$  — передаточная функция системы по каналу "возмущение — регулируемая переменная";  $\|\cdot\|_\infty$  —  $H_\infty$ -норма передаточной функции.

### Процедура синтеза динамического регулятора

В пространстве состояний динамический регулятор имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_K(t) &= \mathbf{A}_K\mathbf{x}_K(t) + \mathbf{B}_K\mathbf{y}(t); \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_K\mathbf{x}_K(t) + \mathbf{D}_K\mathbf{y}(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}_K \in R^{n_c}$ ,  $n_c \leq n_p$ , т.е. размерность вектора состояния регулятора совпадает с размерностью вектора состояния объекта управления (регулятор полного порядка) либо имеет меньший порядок. Матрицы динамического регулятора имеют соответствующие размерности:

$$\mathbf{D}_K : n_u \times n_y; \mathbf{C}_K : n_u \times n_c; \mathbf{B}_K : n_c \times n_y; \mathbf{A}_K : n_c \times n_c.$$

Используя уравнения (1) и (2), найдем передаточную функцию замкнутой системы от возмущения  $\mathbf{w}$  к регулируемой переменной  $\mathbf{z}$ . Получим

$$\mathbf{W}_{w \rightarrow z}(s) = \mathbf{C}^* (s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{B}^* + \mathbf{D}^*, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$$\mathbf{B}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_K\mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_K\mathbf{D}_{21} \end{pmatrix}; \quad (5)$$

$$\mathbf{C}^* = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_K); \quad (6)$$

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_{21}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица соответствующей размерности.

Представим матрицу  $\mathbf{A}^*$  замкнутой системы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_K & \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{C}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{(n_p \times n_p)} & \mathbf{0}_{(n_p \times n_c)} \\ \mathbf{0}_{(n_c \times n_p)} & \mathbf{0}_{(n_c \times n_c)} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{2(n_p \times n_u)} & \mathbf{0}_{(n_p \times n_c)} \\ \mathbf{0}_{(n_c \times n_u)} & \mathbf{I}_{(n_c \times n_c)} \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{C}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{2(n_y \times n_p)} & \mathbf{0}_{(n_y \times n_c)} \\ \mathbf{0}_{(n_c \times n_p)} & \mathbf{I}_{(n_c \times n_c)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а  $\bar{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_K & \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}$  — матричные параметры искомого регулятора. Заметим, что матрицы  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$  связаны только с объектом управления.

Для синтеза стабилизирующего  $H_\infty$ -регулятора используем BR-лемму [12, 13] и проекционную лемму. В соответствии с BR-леммой замкнутая система устойчива и имеет  $H_\infty$ -норму не больше  $\gamma$ ,  $\|\mathbf{W}_{w \rightarrow z}(s)\|_\infty < \gamma$ , если существует поло-

жительно определенная матрица  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$  (в дальнейшем используем символы  $\{<, >\}$  для указания знакоопределенности матрицы или матричного неравенства) размерности  $(n_p + n_c) \times (n_p + n_c)$  такая, что выполнено следующее неравенство относительно неизвестной матрицы  $\mathbf{P}$ , но содержащее матрицы, зависящие от искомым, а значит, тоже неизвестных параметров регулятора (см. формулы (4)–(7)):

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A}^* + \mathbf{A}^{*\top}\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{B}^* & \mathbf{C}^{*\top} \\ \mathbf{B}^{*\top}\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^{*\top} \\ \mathbf{C}^* & \mathbf{D}^* & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{C}^* & \mathbf{D}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \\ & + \left( \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{C}^* & \mathbf{D}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right)^\top < \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для нахождения параметров регулятора из неравенства (9) сначала преобразуем его. Для этого представим матрицу  $\mathbf{P}$  и обратную к ней в блочно-матричной форме, а именно:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^\top & \mathbf{V} \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \mathbf{R}^\top \in R^{n_p \times n_p}, \\ \mathbf{M} &\in R^{n_p \times n_c}, \mathbf{V} = \mathbf{V}^\top \in R^{n_c \times n_c}, \\ \mathbf{P}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^\top & \mathbf{U} \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \mathbf{S}^\top \in R^{n_p \times n_p}, \\ \mathbf{N} &\in R^{n_p \times n_c}, \mathbf{U} = \mathbf{U}^\top \in R^{n_c \times n_c}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подстановка (10) в формулу (9) с учетом соотношений (4)–(8) приводит к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top\mathbf{R} & \mathbf{A}^\top\mathbf{M} & \mathbf{R}\mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1^\top \\ \mathbf{M}^\top\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^\top\mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1^\top\mathbf{R} & \mathbf{B}_1^\top\mathbf{M} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^\top \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{B}_2 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^\top\mathbf{B}_2 & \mathbf{V} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{12} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_K & \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \\ & + \left( \begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{B}_2 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^\top\mathbf{B}_2 & \mathbf{V} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{12} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_K & \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right)^\top < \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top\mathbf{R} & \mathbf{A}^\top\mathbf{M} & \mathbf{R}\mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1^\top \\ \mathbf{M}^\top\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^\top\mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1^\top\mathbf{R} & \mathbf{B}_1^\top\mathbf{M} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^\top \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix}, \\ \Psi_L &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{B}_2 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^\top\mathbf{B}_2 & \mathbf{V} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{12} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \Psi_R = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \Theta &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_K & \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда неравенство (11) можно записать в следующей компактной форме:

$$\Omega(\mathbf{P}) + \Psi_L(\mathbf{P})\Theta\Psi_R + (\Psi_L(\mathbf{P})\Theta\Psi_R)^\top < \mathbf{0}, \quad (13)$$

где аргументы в скобках указывают на зависимость соответствующего слагаемого или множителя от матрицы  $\mathbf{P}$ , а точнее, от элементов ее блочно-матричного представления (10). Теперь воспользуемся проекционной леммой [2–5], где показано, что для разрешимости неравенства (13) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие два неравенства:

$$\begin{aligned} 1) \Psi_L^\perp(\mathbf{P})\Omega(\mathbf{P})\Psi_L^\perp(\mathbf{P}) < \mathbf{0}; \\ 2) (\Psi_R^\top)^\top\Omega(\mathbf{P})\Psi_R^\top < \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\Psi_L^\perp$ ,  $\Psi_R^\top$  — ортогональные дополнения столбцовых пространств  $\Psi_L, \Psi_R^\top$ . Отметим, что для произвольной матрицы  $\mathbf{G}$  ортогональное дополнение  $\mathbf{G}^\perp$  совпадает с нульпространством  $\text{Null}_{\mathbf{G}^\top}$  матрицы  $\mathbf{G}^\top$  (линейная оболочка *любого* базиса ядра отображения  $\text{Ker}\mathbf{G}^\top$ ) [15], т.е.

$$\mathbf{G}^\perp = \text{Null}_{\mathbf{G}^\top} = \text{Ker}\mathbf{G}^\top. \quad (15)$$

С учетом (15) неравенства (14) представляются в следующем виде:

$$1) (\text{Ker}\Psi_L^\top(\mathbf{P}))^\top\Omega(\mathbf{P})\text{Ker}\Psi_L^\top(\mathbf{P}) < \mathbf{0}; \quad (16a)$$

$$2) (\text{Ker}\Psi_R)^\top\Omega(\mathbf{P})\text{Ker}\Psi_R < \mathbf{0}. \quad (16b)$$

Рассмотрим вначале неравенство (16b), так как его ортогональное дополнение не зависит от неизвестной матрицы  $\mathbf{P}$ . Из соотношения (12) имеем

$$\text{Ker}\Psi_R = \text{Ker} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где  $V_i, i = 1, 2$ , — любые матрицы соответствующих размерностей, обеспечивающие выполнение равенства

$$\Psi_R \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ V_2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя выражение (17), преобразуем (16б) с учетом (12). Получим

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ V_2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \Omega(P) \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ V_2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ V_2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \times \\ & \times \begin{pmatrix} RA + A^T R & A^T M & RB_1 & C_1^T \\ M^T A & 0 & M^T B_1 & 0 \\ B_1^T R & B_1^T M & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & 0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ V_2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ V_2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} RA + A^T R & RB_1 & C_1^T \\ B_1^T R & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ V_2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = (18) \\ & = \begin{pmatrix} \text{Ker}(C_2 & D_{21}) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \times \\ & \times \Omega_1^-(R) \begin{pmatrix} \text{Ker}(C_2 & D_{21}) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0, \end{aligned}$$

где матрица

$$\Omega_1^-(R) = \begin{pmatrix} RA + A^T R & RB_1 & C_1^T \\ B_1^T R & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \quad (19)$$

теперь зависит только от неизвестной блочной матрицы  $R$  и

$$\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ V_2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Ker}(C_2 & D_{21}) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Переходим к неравенству (16а). Имеем

$$\begin{aligned} \text{Ker} \Psi_L^T(P) &= \text{Ker} \begin{pmatrix} B_2^T R & B_2^T M & 0 & D_{12}^T \\ M^T & V & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} B_2^T & 0 & 0 & D_{12}^T \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & M & 0 & 0 \\ M^T & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} R & M & 0 & 0 \\ M^T & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \text{Ker} \begin{pmatrix} B_2^T & 0 & 0 & D_{12}^T \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} S & N & 0 & 0 \\ N^T & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \text{Ker} \begin{pmatrix} B_2^T & 0 & 0 & D_{12}^T \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (21)$$

где использованы соотношения (10) и легко доказываемое равенство  $\text{Ker}(QH) = H^{-1} \text{Ker}Q$  для любой невырожденной матрицы  $H$ . Подставим (21) в (16а), после преобразований получим

$$\begin{aligned} & \left( \text{Ker} \begin{pmatrix} B_2^T & 0 & 0 & D_{12}^T \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^T \times \\ & \times \begin{pmatrix} SA^T + AS & AN & B_1 & SC_1^T \\ N^T A^T & 0 & 0 & N^T C_1^T \\ B_1^T & 0 & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 S & C_1 N & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \times \\ & \times \text{Ker} \begin{pmatrix} B_2^T & 0 & 0 & D_{12}^T \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим в формуле (22) составляющую

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} B_2^T & 0 & 0 & D_{12}^T \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ V_4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Подстановка выражения (23) в соотношение (22) после проведения преобразований приводит к неравенству

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} V_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ V_4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} SA^T + AS & AN & B_1 & SC_1^T \\ N^T A^T & 0 & 0 & N^T C_1^T \\ B_1^T & 0 & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 S & C_1 N & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} V_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ V_4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_3 & 0 \\ 0 & I \\ V_4 & 0 \end{pmatrix}^T \times \\ & \times \begin{pmatrix} SA^T + AS & B_1 & SC_1^T \\ B_1^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 S & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3 & 0 \\ 0 & I \\ V_4 & 0 \end{pmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя матрицу перестановок

$$\Pi = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \Pi = \Pi^{-1} = \Pi^T$$

для неравенства (24), получим

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{S}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{S} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{S}\mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{B}_1^T & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_1\mathbf{S} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \Pi \Pi^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{S}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{S} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{S}\mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{B}_1^T & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_1\mathbf{S} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \times \\ & \times \Pi \Pi^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \times \\ & \times \begin{pmatrix} \mathbf{S}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{S} & \mathbf{S}\mathbf{C}_1^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{S} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{D}_{11}^T & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \text{Ker}(\mathbf{B}_2^T & \mathbf{D}_{12}^T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \times \\ & \times \begin{pmatrix} \mathbf{S}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{S} & \mathbf{S}\mathbf{C}_1^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{S} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{D}_{11}^T & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \text{Ker}(\mathbf{B}_2^T & \mathbf{D}_{12}^T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Ker}(\mathbf{B}_2^T & \mathbf{D}_{12}^T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \times \\ & \times \Omega_2^-(\mathbf{S}) \begin{pmatrix} \text{Ker}(\mathbf{B}_2^T & \mathbf{D}_{12}^T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (25)$$

где матрица

$$\Omega_2^-(\mathbf{S}) = \begin{pmatrix} \mathbf{S}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{S} & \mathbf{S}\mathbf{C}_1^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{S} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{D}_{11}^T & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (26)$$

теперь зависит только от неизвестной блочной матрицы  $\mathbf{S}$ .

Теперь видно, что разрешимость неравенств (16а), (16б) сводится к следующей системе линейных матричных неравенств:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \text{Ker}(\mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \times \\ & \times \Omega_1^-(\mathbf{R}) \begin{pmatrix} \text{Ker}(\mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \text{Ker}(\mathbf{B}_2^T & \mathbf{D}_{12}^T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \times \\ & \times \Omega_2^-(\mathbf{S}) \begin{pmatrix} \text{Ker}(\mathbf{B}_2^T & \mathbf{D}_{12}^T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (27b)$$

относительно неизвестных матриц  $\mathbf{R} > \mathbf{0}, \mathbf{S} > \mathbf{0}$ , где матрицы  $\Omega_1^-(\mathbf{R}), \Omega_2^-(\mathbf{S})$  определяются формулами (19) и (26) соответственно. Однако неравенств (27) недостаточно, так как матрицы  $\mathbf{R} > \mathbf{0}, \mathbf{S} > \mathbf{0}$  связаны соотношениями (10).

Для поиска дополнительных условий рассмотрим обращение блочных матриц. Известно [15, 16], что для блочной матрицы

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \det \mathbf{D} \neq 0$$

ее обратная (один из возможных вариантов) определяется как

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{-1} & -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{T} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где  $\mathbf{T} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}, \det \mathbf{T} \neq 0$ .

Пусть блочная матрица  $\mathbf{V} = \mathbf{I}$  в матрице  $\mathbf{P}$  будет единичной. Тогда из соотношения (28) получаем

$$(\mathbf{R} - \mathbf{M}\mathbf{M}^T)^{-1} = \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{M}\mathbf{M}^T \geq \mathbf{0}. \quad (29)$$

Так как  $\mathbf{M} \in R^{n_p \times n_c}$  и  $n_c \leq n_p$ , то

$$\text{rank}(\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}) = \text{rank}(\mathbf{M}\mathbf{M}^T) \leq n_c. \quad (30)$$

Используя дополнение Шура [12] для выражения (29), имеем следующее дополнительное линейное матричное неравенство для нахождения матриц  $(\mathbf{R}, \mathbf{S})$ :

$$\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1} \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}. \quad (31)$$

Ивасаки и Скелтон [3] показали, что для данной пары матриц  $(\mathbf{R}, \mathbf{S})$  достигается минимальный порядок  $n_c^*$  регулятора, если матрица  $\mathbf{M}$  имеет полный ранг по столбцам, т.е.

$$\text{rank}(\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}) = \text{rank}(\mathbf{M}\mathbf{M}^T) = n_c^*. \quad (32)$$

Для регулятора не обязательно минимального порядка  $n_c^* \leq n_c < n_p$  соотношение (32) имеет вид неравенства

$$\text{rank}(\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}) = \text{rank}(\mathbf{M}\mathbf{M}^T) \leq n_c. \quad (33)$$

Итак, окончательно имеем следующую теорему о субоптимальном редуцированном  $H_\infty$ -регуляторе с  $H_\infty$ -нормой передаточной функции замкнутой системы  $\|\mathbf{W}_w \rightarrow z(s)\|_\infty < \gamma$  и заданным параметром  $\gamma > 0$ .

**Теорема.** Следующие утверждения эквивалентны:

1) существует субоптимальный  $H_\infty$ -регулятор порядка  $n_c$ ;

2) существуют положительно определенные матрицы  $\mathbf{R} > \mathbf{0}, \mathbf{S} > \mathbf{0}$  такие, что выполнены неравенства (27), (31), (33).  $\square$

Однако возникает одна проблема. Если неравенства (27), (31) являются линейными матричными неравенствами, а значит, определяют выпуклые множества, то неравенство (33) является таковым только для  $n_c = n_p$  [3]. При  $n_c < n_p$ , что является обычной практикой и целью данной работы, условие (33) уже не является выпуклым, так как ранговое условие (33) не определяет выпуклого множества в параметрическом пространстве  $(\mathbf{R}, \mathbf{S})$ . Поэтому решить неравенства (27), (31), (33) с использованием, например, средств пакета MATLAB не представляется возможным.

Для решения данной проблемы используем проекционный метод и следующую двухэтапную процедуру синтеза.

*1 этап.* На первом этапе решим ослабленную задачу (27), (31) без учета условия (33). Для получения регулятора редуцированного порядка необходимо использовать некоторую процедуру оптимизации, а именно: найти матрицы  $\mathbf{R} > \mathbf{0}, \mathbf{S} > \mathbf{0}$ , которые минимизируют след матрицы (31) (линейная целевая функция)

$$J = \min_{\mathbf{R} > \mathbf{0}, \mathbf{S} > \mathbf{0}} \text{tr} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{S} \end{pmatrix} = \min_{\mathbf{R} > \mathbf{0}, \mathbf{S} > \mathbf{0}} (\text{tr} \mathbf{R} + \text{tr} \mathbf{S}) \quad (34)$$

при выполнении ограничений (неравенств) (27), (31) и заданном параметре  $\gamma > 0$ .

Такой выбор целевой функции обусловлен следующими соображениями. Рассмотрим предельный случай, когда динамический регулятор ( $n_c > 0$ ) переходит в статический ( $n_c = 0$ ). Для статического регулятора имеем матрицы  $\mathbf{M} = \mathbf{0}, \mathbf{N} = \mathbf{0}, \mathbf{U} = \mathbf{0}, \mathbf{V} = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{S} = \mathbf{R}^{-1} > \mathbf{0}, \mathbf{P} = \mathbf{R}, \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{R}^{-1}$ , а целевая функция (34) представляется как

$$J_0 = \min_{\mathbf{R} > \mathbf{0}} \text{tr} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{R}^{-1} \end{pmatrix} = \min_{\mathbf{R} > \mathbf{0}} (\text{tr} \mathbf{R} + \text{tr} \mathbf{R}^{-1}). \quad (35)$$

Нетрудно показать, что при отсутствии каких-либо ограничений  $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^{*-1} = \mathbf{I}_{n_p}$  и оптимальное значение целевой функции  $J_0^* = 2n_p$ . При наличии ограничений, как в нашем случае,  $J^* > J_0^* > \bar{J}_0^*$ . Поэтому целевая функция вида (34) вполне адекватна решаемой задаче.

*2 этап.* Для получения редуцированного регулятора и учета рангового условия (33) исполь-

зуем полученные после первого этапа матрицы  $(\mathbf{R}, \mathbf{S})$  и процедуру ортогонального проектирования симметричной неотрицательно определенной матрицы  $\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}$  на множество редуцированных неотрицательно определенных матриц. Для этого воспользуемся модификацией леммы из работы [17].

**Лемма.** Пусть  $\mathbf{Q}_r = \mathbf{Q}_r^T \succeq \mathbf{0}, \mathbf{Q}_r \in \bar{\mathcal{S}}_+^{n|r}$  — некоторая неотрицательно определенная матрица размерности  $n \times n$ , ранга  $r < n$  и

$$\mathbf{Q}_r = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{U}^T = (\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2) \begin{pmatrix} \Sigma_r^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^T \\ \mathbf{U}_2^T \end{pmatrix}$$

— ее сингулярное разложение, где  $\mathbf{U}$  — ортогональная матрица,  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}(:, 1:r)$  — матрица размерности  $n \times r$ ,  $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}(:, r+1:n)$  — матрица размерности  $n \times (n-r)$ ,  $\Sigma_r^+$  — диагональная матрица ее положительных собственных значений (сингулярных чисел),  $\bar{\mathcal{S}}_+^{n|r}$  — множество неотрицательно определенных матриц размерности  $n \times n$ , ранга  $r$ . Тогда ортогональная проекция матрицы  $\mathbf{Q}_r$  на множество неотрицательно определенных матриц  $\mathbf{Q}_p \in \bar{\mathcal{S}}_+^{n|p}$  размерности  $n \times n$  и ранга  $p < r$  определяется следующей формулой:

$$\mathbf{Q}_p = (\tilde{\mathbf{U}}_1 \quad \tilde{\mathbf{U}}_2) \begin{pmatrix} \Sigma_p^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_1^T \\ \tilde{\mathbf{U}}_2^T \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{U}}_1 \Sigma_p^+ \tilde{\mathbf{U}}_1^T, \quad (36)$$

где  $\Sigma_p^+ = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p > 0$ ,  $p < r$  — диагональная матрица ненулевых сингулярных чисел матрицы  $\mathbf{Q}_r$ , полученная приравниванием нулю  $(r-p)$  самых малых (практически нулевых) сингулярных чисел матрицы  $\mathbf{Q}_r$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{U}(:, 1:p)$ .

*Доказательство.* Скалярное произведение  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  неотрицательно определенных матриц  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \bar{\mathcal{S}}_+^{n|p}$ ,  $p < n$ , определяется следующим выражением [16]:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}),$$

где  $\text{tr}(\mathbf{Y})$  — след матрицы  $\mathbf{Y}$ . Тогда ортогональная проекция  $\mathbf{A}_\perp \in \bar{\mathcal{S}}_+^{n|q}$  матрицы  $\mathbf{A} \in \bar{\mathcal{S}}_+^{n|p}$  на некоторое замкнутое и выпуклое подмножество  $\bar{\mathcal{S}}_+^{n|q} \subset \bar{\mathcal{S}}_+^{n|p}$ ,  $q < p$  находится по формуле

$$(\mathbf{A}_\perp, \mathbf{A} - \mathbf{A}_\perp) = 0.$$

Нетрудно показать, что подстановка представленных выше выражений для спроектированной матрицы дает необходимый результат, т.е.

$$(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_r - \mathbf{Q}_p) = 0. \quad \blacksquare$$

Воспользовавшись этой леммой, проведем сингулярное разложение матрицы  $\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}$  (формула (29)) и рассмотрим ее ортогональную проекцию на множество  $\bar{S}_+^{n_p|n_c}, n_c \leq n_p$ . Получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1})_+ &= \mathbf{U}_1 \Sigma_{n_c}^+ \mathbf{U}_1^T = \\ &= \mathbf{U}_1 (\Sigma_{n_c}^+)^{1/2} (\Sigma_{n_c}^+)^{1/2} \mathbf{U}_1^T = \mathbf{M} \mathbf{M}^T \in \bar{S}_+^{n_p|n_c}, \end{aligned} \quad (37)$$

где  $\Sigma_{n_c}^+ = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n_c})$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{n_c} > 0$ ,  $0 < n_c \leq n_p$ . Такая процедура проектирования показывает, что матрица  $\mathbf{M} = \mathbf{U}_1 (\Sigma_{n_c}^+)^{1/2}$  имеет полный ранг, т.е. порядок  $n_c = n_c^*$ ,  $\mathbf{M} \in R^{n_p \times n_c^*}$ , равный минимальному порядку регулятора.

Однако после отбрасывания только (практически) нулевых сингулярных чисел в матрице  $\Sigma_{n_c}^+$  могут остаться сингулярные числа очень малых значений, близких к нулю. В этом случае возможна дальнейшая редукция порядка регулятора удалением таких сингулярных чисел. Структура регулятора становится проще. Но при этом с каждым отбрасыванием малых сингулярных чисел качество регулирования может ухудшаться. Необходим компромисс и количественные оценки работы полученного редуцированного регулятора. Далее рассматривается решение этой проблемы.

### Синтез редуцированного регулятора

Далее мы рассматриваем регуляторы, у которых  $n_c^r \leq n_c^*$ , т.е. регуляторы, где отбрасываются малые ненулевые сингулярные числа матрицы  $\Sigma_{n_c}^+$ . Обозначим редуцированную матрицу

$$\begin{aligned} (\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1})_+^r &= (\mathbf{U}_1 \Sigma_{n_c}^+ \mathbf{U}_1^T)^r = \\ &= \tilde{\mathbf{U}}_1 (\Sigma_{n_c}^+)^{1/2} (\Sigma_{n_c}^+)^{1/2} \tilde{\mathbf{U}}_1^T = \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{M}}^T \in \bar{S}_+^{n_p|n_c^r}, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\Sigma_{n_c}^+ = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n_c}), \quad n_c^r \leq n_c^*,$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{U}}_1 (\Sigma_{n_c}^+)^{1/2}, \quad \tilde{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{U}_1(:, 1:n_c^r),$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{n_c^r} \gg \sigma_{n_c^r+1} \geq \dots \geq \sigma_{n_c^*} > 0,$$

$$\text{rank}(\tilde{\mathbf{M}}) = n_c^r, \quad n_c^r \leq n_c^*.$$

После отбрасывания малых сингулярных чисел необходимо проверить выполнение основного линейного матричного неравенства (13), из кото-

рого после подстановки полученных матриц  $\mathbf{P}$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}$  определяются матрицы регулятора  $\mathbf{A}_K$ ,  $\mathbf{B}_K$ ,  $\mathbf{C}_K$ ,  $\mathbf{D}_K$ . Ясно, что при редукции порядка регулятора неравенство (13) для некоторого  $n_c^r < n_c^*$  может не выполняться. При этом возможны два решения:

1) вернуться к регулятору более высокого порядка, который обеспечивает выполнение этого неравенства;

2) увеличить параметр  $\gamma$  и/или изменить весовые коэффициенты матриц регулируемого выхода (ухудшение качества управления), решить задачу первого этапа и попробовать найти регулятор для выбранного порядка  $n_c^r$ .

Представленный алгоритм синтеза редуцированного регулятора рассмотрим на примере синтеза робастного регулятора для объекта управления с политопической неопределенностью. Объектом управления выступает спутник, соединенный нежесткой связью с инструментальным блоком (двухмассовая система) [18]. Необходимо управлять угловым положением инструментального блока, на котором стоят звездный датчик и датчик углового положения самого блока, а привод управляет угловым положением спутника. Ввиду нежесткости связи имеет место несогласованность движений привода и датчика углового положения инструментального блока, в западной литературе этот эффект получил название "noncollocated" [18].

### Пример

Рассматривается двухмассовая система (рис. 1), где  $J_1, J_2$  — моменты инерции масс спутника и инструментального блока соответственно, связанных гибкой связью с неопределенными параметрами:  $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$  — жесткость пружины,

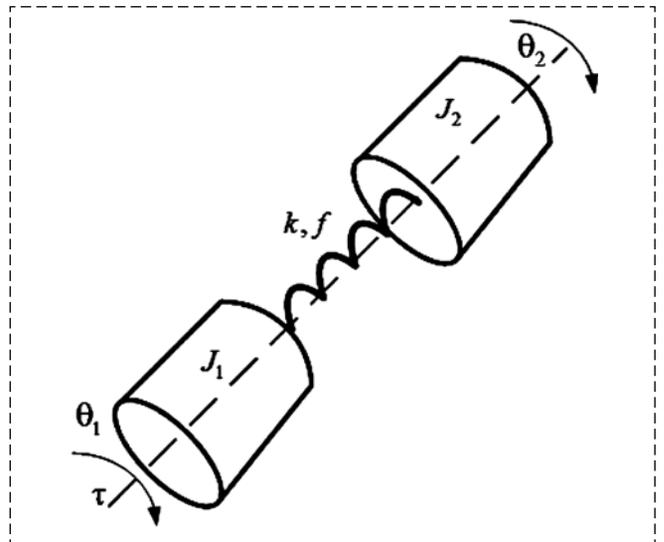


Рис. 1. Схематическое изображение объекта управления

$f \in [f_{\min}, f_{\max}]$  — коэффициент вязкого трения;  $\tau$  — вращающий момент, приложенный к первой массе.

Фиксированные и интервально неопределенные параметры объекта управления:  $k \in [0,09...0,4]$ ,  $f \in [0,0038...0,042]$ ,  $J_1 = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $J_2 = 0,1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

Требуется синтезировать регулятор низкого порядка, обеспечивающего следующие показатели качества для *любых* параметров объекта управления:

- 1) время переходного процесса не более 20 с;
- 2) перерегулирование не более 15 %.

**Решение.** Синтезируем  $H_\infty$ -регулятор. Перечисленные состояния:  $x_1 = \theta_1, x_2 = \dot{\theta}_1, x_3 = \theta_2, x_4 = \dot{\theta}_2$  (объект четвертого порядка,  $n_p = 4$ ). Управление:  $u = \tau$ . Матрицы объекта управления (1) имеют следующий вид:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_1} & -\frac{f}{J_1} & \frac{k}{J_1} & \frac{f}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_2} & \frac{f}{J_2} & -\frac{k}{J_2} & -\frac{f}{J_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & -f & k & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10k & 10f & -10k & -10f \end{pmatrix};$$

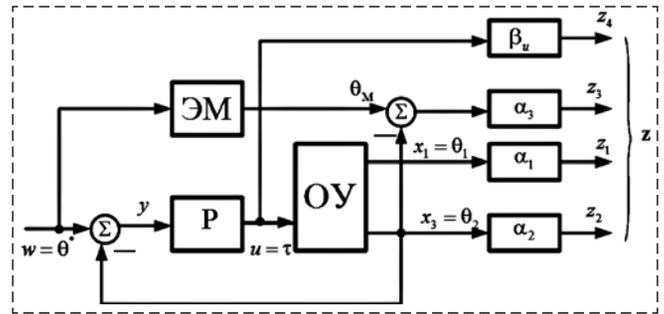
$$\mathbf{B}_{1,0} = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T,$$

$$\mathbf{B}_{2,0} = \left(0 \ \frac{1}{J_1} \ 0 \ 0\right)^T = (0 \ 1 \ 0 \ 0)^T.$$

Дополнительные индексы внизу у матриц приведены для того, чтобы показать, что данные матрицы еще не в полной мере соответствуют уравнениям полного объекта управления (1), имеется еще эталонная модель (ЭМ). Целью использования ЭМ является обеспечение синтезированным регулятором максимально точного отслеживания объектом управления желаемой динамики в переходном процессе. Структурная схема системы управления представлена на рис. 2.

Собственные значения матрицы  $\mathbf{A}_0$  изменяются в широких пределах: наряду с наличием двойного нуля (двойного интегратора) имеются комплексные полюса с высоким значением показателя колебательности и малой собственной демпфированной частотой. В табл. 1 приведены собственные значения системной матрицы  $\mathbf{A}_0$  для четырех вершин политопа неопределенности.

Измеряется только угол поворота инструментального блока  $\theta_2$ , т.е. матрица выхода  $\mathbf{C}_{2,0} = (0 \ 0 \ -1 \ 0)$ . Знак минус указывает на то, что



**Рис. 2. Структурная схема системы управления:**

$P$  — регулятор;  $OY$  — объект управления; ЭМ — эталонная модель;  $\alpha_1, \dots, \alpha_3, \beta_u$  — весовые коэффициенты регулируемого выхода  $z$

Таблица 1

**Собственные значения системной матрицы  $\mathbf{A}_0$  для угловых вершин политопа**

Вершина политопа	Собственные значения
$(k_{\min}, f_{\min})$	$-0,0209 \pm j0,9948; 0; 0$
$(k_{\min}, f_{\max})$	$-0,2310 \pm j0,9678; 0; 0$
$(k_{\max}, f_{\min})$	$-0,0209 \pm j2,0975; 0; 0$
$(k_{\max}, f_{\max})$	$-0,2310 \pm j2,0849; 0; 0$

на вход регулятора поступает рассогласование  $y(t) = \theta^*(t) - \theta_2(t)$ , где  $\theta^*(t) = w(t)$  — желаемая траектория угловой координаты инструментального блока (внешнее нерегулируемое воздействие). В качестве регулируемого вектора выхода  $z$  рассматривается вектор взвешенных угловых координат спутника и инструментального блока, управления и рассогласования углового положения инструментального блока с выходом эталонной модели. Матрицы регулируемого выхода объекта управления:

$$\mathbf{C}_{1,0} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$\mathbf{D}_{11} = \mathbf{0}_{4 \times 1}, \mathbf{D}_{12} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \beta_u \end{pmatrix}, \mathbf{D}_{21} = 1,$$

где числовые значения весовых коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_3, \beta_u$  будут приведены ниже.

Для формирования матрицы  $\mathbf{A}$  полного объекта управления к системной матрице  $\mathbf{A}_0$  добавим системную матрицу

$$\mathbf{A}_M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}$$

ЭМ, где коэффициенты  $a, b, c$  определяют передаточную функцию третьего порядка для жела-

емой динамики объекта управления. Выход модели  $\theta_M = x_5$  сравнивается с измеряемым углом  $\theta_2$  для формирования сигнала рассогласования, затем ошибка взвешивается и формирует одну из координат регулируемого выхода. Полная модель объекта управления в этом случае имеет следующие матрицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{A}_M \end{pmatrix}; \\ \mathbf{B}_1 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ a \end{pmatrix}; \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{2,0} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{C}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{1,0} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = (\mathbf{C}_{2,0} \quad \mathbf{0}_{1 \times 3}). \end{aligned} \quad (40)$$

Остальные матрицы определены соотношением (39). Порядок полной модели объекта управления с учетом эталонной модели  $n_p = 7$ .

**Замечания:**

1) состояние ЭМ не управляется регулятором, поэтому размерность реально управляемого объекта  $n_{p,o} = 4$ . Относительно этого порядка объекта мы и будем синтезировать регулятор;

2) на первых этапах выбора матриц регулируемого выхода использовался алгоритм слежения за эталонным входом (без ЭМ, в этом случае  $n_p = n_{p,o} = 4$ ). Но получить удовлетворительный результат во всем диапазоне политопической неопределенности не удалось. Переход к введению ЭМ и использованию алгоритма слежения за ее выходом позволил решить поставленную задачу.

**Синтез робастного регулятора.** По представленному выше алгоритму синтезированы три регулятора: четвертого, третьего и второго порядков. Весовые коэффициенты для матриц регулируемого выхода и параметр  $\gamma$  (выражения (39)) для каждого регулятора представлены в табл. 2.

Передаточные функции ЭМ выбраны таким образом, чтобы максимально обеспечить выполнение требуемых показателей качества для всех регуляторов, а именно:

- регулятор четвертого порядка

$$W_{M4}(s) = \frac{0,113}{s^3 + 0,9s^2 + 0,54s + 0,113};$$

- регулятор третьего порядка

$$W_{M3}(s) = \frac{0,022}{s^3 + 0,84s^2 + 0,24s + 0,022};$$

- регулятор второго порядка

$$W_{M2}(s) = \frac{0,078}{s^3 + 0,89s^2 + 0,43s + 0,078}.$$

На первом этапе поиска матриц  $\mathbf{R}, \mathbf{S}$  для синтеза робастного регулятора в линейных матричных неравенствах использовали либо все вершины политопической неопределенности, либо номинальную усредненную матрицу и пару вершинных матриц (определены моделированием).

Сингулярные числа симметричной матрицы  $\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}$ , полученные после первого этапа синтеза, отражены в табл. 3 (выделены сингулярные числа, определяющие порядок регулятора).

Практически нулевые сингулярные числа  $\sigma_7 \sim 10^{-8} \approx 0$  для всех регуляторов определяют  $\text{rank}(\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}) = 6$ . Однако малые сингулярные числа  $\sigma_5, \sigma_6 \sim 0,01...0,03$ , учитывающие влияние ЭМ и нами отбрасываемые, позволяют начинать с регулятора четвертого порядка.

Из табл. 3 видно, что для регуляторов 4-го и 3-го порядков максимальное отбрасываемое сингулярное число при редукции порядка регулятора *на порядок меньше*, чем оставленное минимальное сингулярное число. Для регулятора второго порядка эта величина равна одной четверти, что, как мы увидим ниже, напрямую отражается на показателях качества в худшую сторону.

Полученные после второго этапа передаточные функции регуляторов — все неминимально фазовые и имеют нуль с малой частотой сопряжения (реальное дифференцирующее звено):

- регулятор четвертого порядка

$$W_{p4}(s) = \frac{-0,975(s - 0,764)(s + 0,0003)(s^2 + 1,84s + 1,61)}{(s + 10,84)(s + 0,87)(s^2 + 0,85s + 0,60)};$$

Таблица 2

**Весовые коэффициенты регулируемого выхода и параметр  $\gamma$  (выделены столбцы, одинаковые для всех регуляторов)**

Порядок регулятора	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\beta_u$	$\gamma$
4	0,014	0,0084	0,0018	0,0021	0,0174
3	0,014	0,0084	0,0018	0,0021	0,0174
2	0,014	0,0084	0,00074	0,0032	0,0174

Таблица 3

**Сингулярные числа матрицы  $\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}$**

Порядок регулятора	Сингулярные числа матрицы $\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}$
4	<b>1600000; 9,31; 1,44; 0,50;</b> 0,036; 0,011; $8,8 \cdot 10^{-10}$
3	<b>250000; 37,4; 7,05;</b> 0,81; 0,05; 0,013; $1,6 \cdot 10^{-8}$
2	<b>20870; 2,66;</b> 0,72; 0,26; 0,032; 0,0083; $6,4 \cdot 10^{-9}$

- регулятор третьего порядка

$$W_{p3}(s) = \frac{-0,74(s - 0,92)(s + 0,0003)(s + 1,59)}{(s + 57,1)(s^2 + 0,82s + 0,19)};$$

- регулятор второго порядка

$$W_{p2}(s) = \frac{-2,84(s - 0,89)(s + 0,001)}{(s + 27,6)(s + 0,51)}.$$

**Моделирование.** Моделирование проводили во всем диапазоне политописической неопределенности параметров  $k$  и  $f$  (рис. 3).

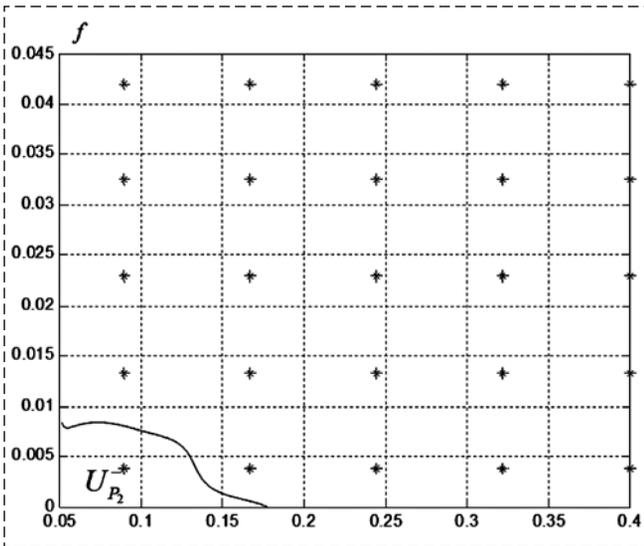


Рис. 3. Отмеченные точки политописической неопределенности параметров, с которыми проводилось моделирование. Выделена область  $U_{P_2}^*$ , где для регулятора второго порядка получены худшие результаты

Результаты моделирования — переходные процессы по углам  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  для различных регуляторов — представлены на рис. 4—6.

**Обсуждение полученных результатов.** По результатам моделирования можно сделать следующие выводы:

- наибольшим быстродействием обладает система с регулятором четвертого порядка. При этом по углу  $\theta_1(t)$  показатели качества удовлетворяются в полном объеме. По углу  $\theta_2(t)$  для некоторых параметров  $k, f$  имеется небольшое (5...7 %) превышение допустимого перерегулирования. При этом норма  $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\infty} = 0,0182 > \gamma = 0,0174$ , что объясняется колебательным, а не апериодическим переходным процессом в объекте управления, как в ЭМ;
- регулятор третьего порядка обеспечивает практически апериодический переходной процесс по обеим угловым координатам, но есть небольшое увеличение (порядка 1...2 с) допустимого времени переходного процесса. Здесь норма  $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\infty} = 0,0162 < \gamma = 0,0174$ ;
- регулятор второго порядка обеспечивает требуемые показатели качества по углу  $\theta_1(t)$ , но переходные процессы по углу  $\theta_2(t)$  имеют больший разброс, а для отдельных траекторий (область  $U_{P_2}^-$ , см. рис. 3) имеют место колебательность и превышение требуемого времени переходного процесса (около 4 с). При этом норма  $\|W_{w \rightarrow z}\|_{\infty} = 0,0164 < \gamma = 0,0174$ .  
Заметим, что в монографии [18] требуемый переходной процесс был получен только для двух из четырех рассмотренных регуляторов (для регулятора с полным измерением вектора состояния и регулятора с наблюдателем), причем для случаев: а) номинального (усредненного по параметрам)

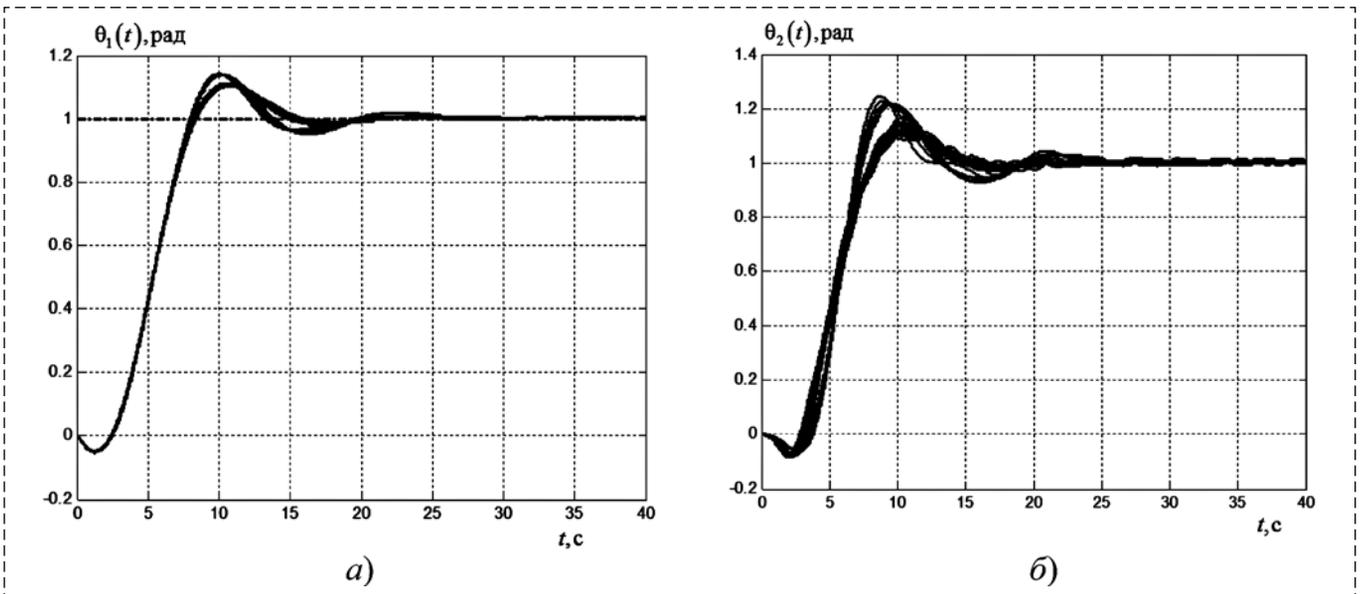


Рис. 4. Переходные характеристики с регулятором четвертого порядка:

а — график углового движения спутника; б — график углового движения инструментального блока

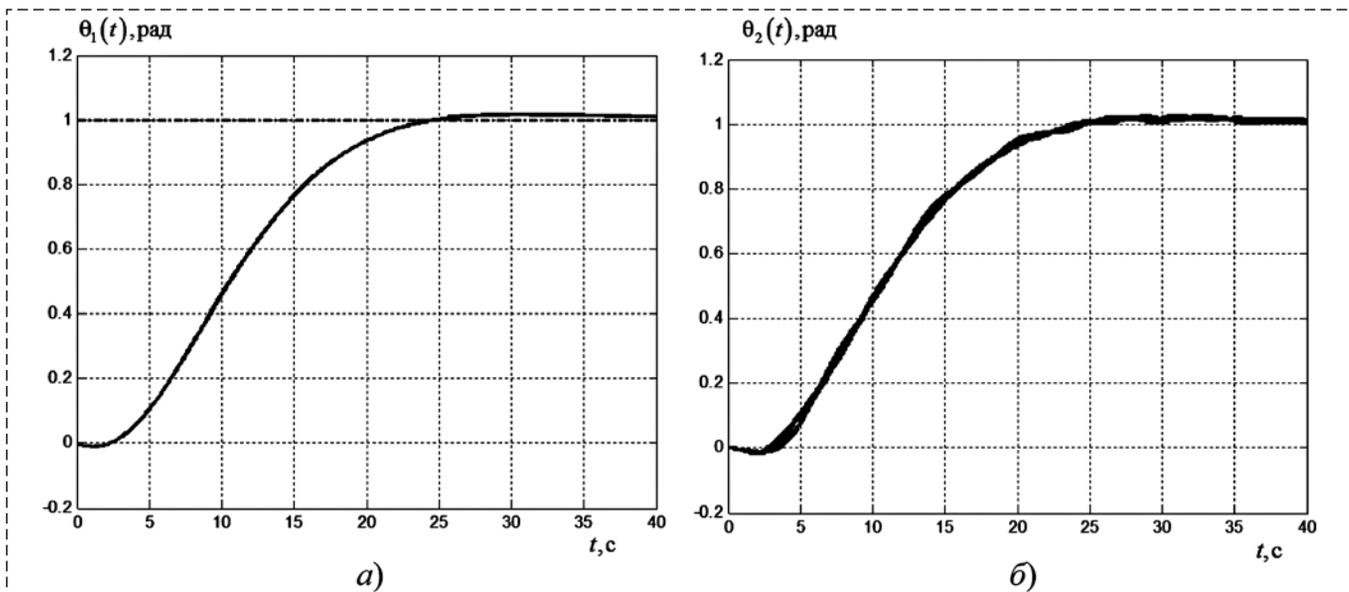


Рис. 5. Переходные характеристики с регулятором третьего порядка:

*a* — график углового движения спутника; *б* — график углового движения инструментального блока

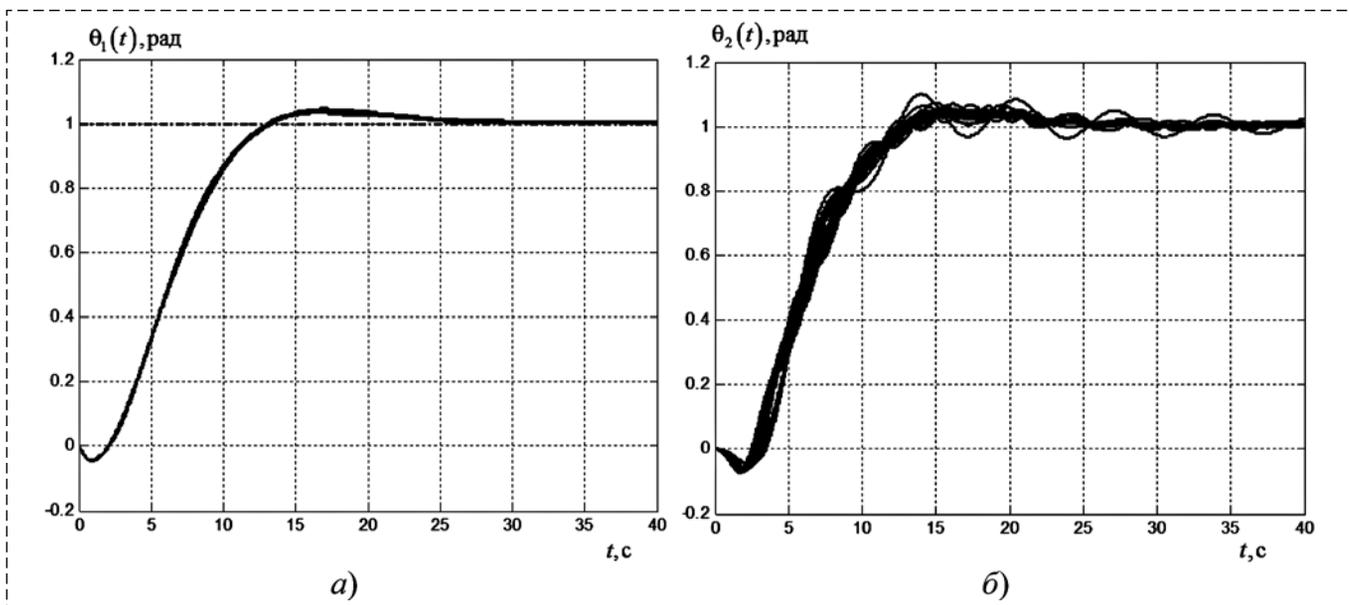


Рис. 6. Переходные характеристики с регулятором второго порядка:

*a* — график углового движения спутника; *б* — график углового движения инструментального блока

объекта управления и б) абсолютно жесткого соединения спутника и инструментального блока.

### Заключение

В работе рассмотрен алгоритм прямого синтеза робастного редуцированного регулятора с использованием линейных матричных неравенств и проекционных лемм. Решение задачи осуществляется в два этапа. На первом этапе проекционная лемма позволяет определить необходимые положительно определенные матри-

цы, характеризующие робастность проектируемой системы. Этап не включает нахождение матриц динамического регулятора, но гарантирует, что решение задачи синтеза регулятора с заданным уровнем показателя качества  $\gamma > 0$  существует. На втором этапе использование процедуры проектирования в пространстве неотрицательно определенных матриц (процедуры редукиции порядка регулятора) дает возможность найти параметры регулятора соответствующей размерности. Рассмотренный практический пример показал эффективность и простоту предлагаемого метода.

## Список литературы

1. **Chilali M., Gahinet P.** Hinf Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach // IEEE Trans. Automat. Contr. 1996. Vol. 41. P. 358—367.
2. **Gahinet P., Apkarian P.** A Linear Matrix Inequality Approach to Hinf Control // Intern. J. Robust & Nonlinear Control. 1994. Vol. 4, N. 4. P. 421—448.
3. **Iwasaki T., Skelton R. E.** All Controllers for General Hinf Control Problem: DLMI Existence and State Space Formulas // Automatica. 1994. V. 30, N. 8. P. 1307—1317.
4. **Баландин Д. В., Коган М. М.** Применение линейных матричных неравенств в синтезе законов управления. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2010. 93 с.
5. **Баландин Д. В., Коган М. М.** Линейные матричные неравенства в задаче робастного  $H_\infty$ -управления по выходу // ДАН. 2004. Т. 396. № 6. С. 759—761.
6. **Gu D. W., Petkov P. Hr., Konstantinov M. M.** Robust Control Design with Matlab. London: Springer, 2005. 389 p.
7. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
8. **Grigoriadis K. M., Skelton R. E.** Low-order Control Design for LMI Problems Using Alternating Projection Methods // Automatica. 1996. V. 32, N. 8. P. 1117—1125.
9. **Sun X., Mao J.** Low-order Controller Design Based on LMI Using Projection Method // Proceedings 14<sup>th</sup> World IFAC Congress. 1999. Paper N. G-2e-12-5.
10. **Gu D. W., Choi B. W., Postlethwaite I.** Low-Order Stabilizing Controllers // IEEE Trans. AC. 1994. V. 38, N. 11. P. 1713—1717.
11. **Brasch F. M., Pearson J. B.** Pole Placement Using Dynamic Compensator // IEEE Trans. AC. 1970. V. 15, N. 1. P. 34—43.
12. **Boyd S., Ghaoui E., Feron E., Balakrishnan V.** Linear Matrix in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994. 193 p.
13. **Hermann G., Turner M. C., Postlethwaite I.** Linear Matrix Inequalities in Control. In: Mathematical Methods for Robust and Nonlinear Control / Eds M. C. Turner et al. Berlin: Springer, 2007. P. 123—142.
14. **Finsler P.** Uber das Vorkommen definiten und semi-definiten Formen in Scharen quadratischer Formen // Comptari mathematici Helvetici. 1937. V. 9. P. 192—199.
15. **Laub A. J.** Matrix Analysis for Scientists and Engineers. Philadelphia: SIAM, 2005. 157 p.
16. **Zhang F.** Matrix Theory. Basic Results and Techniques. NY: Springer, 2011. 399 p.
17. **Higham N. J.** Computing the Nearest Symmetric Positive Semidefinite Matrix // Lin. Algebra Aspplics. 1988. V. 103. P. 103—118.
18. **Franclin G. F., Powell J. D., Emami-Naeini A.** Feedback Control of Dynamic Systems. Fourth Edition. New Jersey: Prentice-Hall, 2002. 887 p.

## Synthesis Robust $H_\infty$ -Regulator of the Low Order by using of Linear Matrix Inequalities and Projective Lemmas

V. I. Krasnoshchechenko, kviip@yandex.ru,

Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248600, Russian Federation

Corresponding author: **Krasnoshchechenko Vladimir I.**, Ph. D., Senior Lecturer, Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248600, Russian Federation, e-mail: kviip@yandex.ru

Accepted on November 24, 2017

*In this article the direct method of synthesis of a robust regulator of the low order is considered. For synthesis robust Hinf-regulator of the low order for plant with polytopic uncertainty are using bounded real lemma for linear matrix inequalities and two procedures of projection: 1) the projective lemma for linear matrix inequalities and 2) projection of nonnegative matrixes to reduced space also nonnegative matrixes. At the first stage of design the weakened problem with a convex linear matrix inequality is solved. For performance of not convex rank condition a procedure of orthogonal projection of singular value decomposition of a matrix and by rejection zero singular values is used. The order reduction a regulator is carried out by rejection small singular values. The submitted algorithm of synthesis of the reduced regulator is considered on an example of synthesis of robust regulator for plant with polytopic uncertainty. The plant is a satellite connected by a flexible boom with the sensor package (two-mass system). It is necessary to control angular position of the sensor package on which there is a star sensor and the sensor of angular position of the package, and the actuator control by angular position of the satellite. In view of no rigid connections inconsistency of movements of the actuator and the sensor of angular position of the sensor package takes place, i.e. there is a noncollocated system. Synthesis of a robust regulator for the weak damping plant of the fourth order with polytopic uncertainty is in detail considered. It is shown, that the order of a regulator it is possible to lower with initial the fourth to the second at insignificant deterioration of performance specifications.*

**Keywords:** robust, linear matrix inequalities, a projective lemma, polytopic uncertainty, two-mass system, a regulator of the low order

For citation:

**Krasnoshchechenko V. I.** Synthesis Robust  $H_\infty$ -Regulator of the Low Order by using of Linear Matrix Inequalities and Projective Lemmas, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 4, pp. 219–231.

DOI: 10.17587/mau.19.219-231

#### References

1. **Chilali M., Gahinet P.** Hinf Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1996, vol. 41, pp. 358–367.

2. **Gahinet P., Apkarian P.** A Linear Matrix Inequality Approach to Hinf Control, *Intern. J. Robust&Nonlinear Control*, 1994, vol. 4, no. 4, pp. 421–448.

3. **Iwasaki T., Skelton R. E.** All Controllers for General Hinf Control Problem: DLMI Existence and State Space Formulas, *Automatica*, 1994, vol. 30, no. 8, pp. 1307–1317.

4. **Balandin D. V., Kogan M. M.** *Primenenie lineynykh matrichnykh neravenstv v sinteze zakonov upravleniya* (Application of linear matrix inequality for control synthesis), Nizhniy Novgorod, Publishing house of Nizhegorodskii gosuniversitet, 2010, 93 p. (in Russian).

5. **Balandin D. V., Kogan M. M.** *Lineynye matrichnyye neravenstva v zadache robustnogo upravleniya po vyihodu* (Linear matrix inequality for output robust control), *DAN*, 2004, vol. 396, no. 6, pp. 759–761 (in Russian).

6. **Gu D. W., Petkov P. Hr., Konstantinov M. M.** *Robust Control Design with Matlab*, London, Springer, 2005, 389 p.

7. **Polyak B. T., Scherbakov P. S.** *Robastnaya ustoychivost i upravlenie* (Robust stability and control), Moscow, Nauka, 2002, 303 p. (in Russian).

8. **Grigoriadis K. M., Skelton R. E.** Low-order Control Design for LMI Problems Using Alternating Projection Methods, *Automatica*, vol. 32, no. 8, 1996, pp. 1117–1125.

9. **Sun X., Mao J.** Low-order Controller Design Based on LMI Using Projection Method, *Proceedings 14<sup>th</sup> World IFAC Congress*, Paper No. G-2e-12-5, 1999.

10. **Gu D. W., Choi B. W., Postlethwaite I.** Low-Order Stabilizing Controllers, *IEEE Trans. AC*, 1994, vol. 38, no. 11, pp. 1713–1717.

11. **Brasch F. M., Pearson J. B.** Pole Placement Using Dynamic Compensator, *IEEE Trans. AC*, 1970, vol. 15, no. 1, pp. 34–43.

12. **Boyd S., Ghaoui E., Feron E., Balakrishnan V.** *Linear Matrix in System and Control Theory*, Philadelphia, SIAM, 1994, 193 p.

13. **Hermann G., Turner M. C., Postlethwaite I.** Linear Matrix Inequalities in Control. In: *Mathematical Methods for Robust and Nonlinear Control*, Eds M. C. Turner et al, Berlin, Springer, 2007, pp. 123–142.

14. **Finsler P.** Uber das Vorkommen definiten und semi-definiten Formen in Scharen quadratischer Formen, *Comentari Mathematici Helvetici*, 1937, vol. 9, pp. 192–199.

15. **Laub A. J.** *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*, Philadelphia, SIAM, 2005, 157 p.

16. **Zhang F.** *Matrix Theory. Basic Results and Techniques*, NY, Springer, 2011, 399 p.

17. **Higham N. J.** Computing the Nearest Symmetric Positive Semidefinite Matrix, *Lin. Algebra Aspplics*, 1988, vol. 103, pp. 103–118.

18. **Franclin G. F., Powell J. D., Emami-Naeini A.** *Feedback Control of Dynamic Systems*, Fourth Edition, New Jersey, Prentice-Hall, 2002, 887 p.



28—30 мая 2018 г. в Санкт-Петербурге  
на базе АО "Концерн "ЦНИИ Электроприбор" состоится

Юбилейная XXV Санкт-Петербургская

## МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ИНТЕГРИРОВАННЫМ НАВИГАЦИОННЫМ СИСТЕМАМ (МКИНС 2018)



Председатель программного комитета —  
Академик РАН, проф. **В. Г. Пешехонов**

#### Тематика конференции

- ♦ Инерциальные датчики, системы навигации и ориентации
- ♦ Интегрированные системы навигации и управления движением
- ♦ Глобальные навигационные спутниковые системы
- ♦ Средства гравиметрической поддержки навигации

На конференции не рассматриваются вопросы, затрагивающие военно-техническое сотрудничество, разработки военных технологий и образцов вооружений и военной техники. Программный комитет считает полезным представление обзорных докладов и докладов молодых ученых (до 33 лет).

Подробную информацию о конференции см. сайте:  
<http://www.elektropribor.spb.ru/icins2018/rindex>