УДК 51.74 DOI: 10.17587/mau.20.542-549

С. Г. Буланов, канд. техн. наук, доц., bulanovtgpi@mail.ru,
Ростовский государственный экономический университет, г. Таганрог

Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем

Представлен подход к анализу устойчивости в смысле Ляпунова систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на мультипликативных преобразованиях разностных схем численного интегрирования. В результате преобразований формируются критерии устойчивости в виде необходимых и достаточных условий. Критерии инвариантны относительно правой части системы и не требуют ее преобразования относительно разностной схемы, длины промежутка и шага решения. Отличительной особенностью критериев является то, что они не используют методы качественной теории дифференциальных уравнений. В частности, для случая систем с постоянной матрицей коэффициентов не нужно построения характеристического многочлена и оценки значений характеристических чисел. При анализе устойчивости системы с переменной матрицей коэффициентов не требуется вычисления характеристических показателей. Получены разновидности критериев в аддитивной форме. Анализ устойчивости на их основе эквивалентен оценке устойчивости на основе критериев в мультипликативной форме. В условиях устойчивости (асимптотической устойчивости) линейной системы дифференциальных уравнений получены критерии устойчивости (асимптотической устойчивости) систем линейных дифференциальных уравнений с нелинейной добавкой. Для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений приводится схема анализа устойчивости на основе линеаризации, которая связана непосредственно с исследуемым решением. Схема строится в предположении, что устойчивость решения системы общего вида эквивалентна устойчивости линеаризованной системы в достаточно малой окрестности возмущения начальных данных. Матричная форма критериев позволяет реализовать их в виде циклической программы. Компьютерный анализ выполняется в режиме реального времени и по своим результатам позволяет сделать однозначный вывод о характере устойчивости исследуемой системы. На основе численного эксперимента установлен допустимый диапазон вариации шага разностного метода и длины промежутка разностного решения в границах достоверности анализа устойчивости. Изложен подход, ориентированный на компьютерный анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений. Компьютерная апробация показала целесообразность использования данного подхода на практике.

Ключевые слова: *устойчивость по Ляпунову, компьютерное моделирование устойчивости, разностные решения дифференциальных уравнений*

Введение

Анализ устойчивости по Ляпунову систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) требуется проводить при решении теоретических и прикладных задач механики, физики, теории сверхоперативного управления, при строительстве высотных сооружений и создании авиационных конструкций, в ряде других областей современной науки и техники.

Актуальность исследований в данном направлении обусловлена и тем, что к анализу устойчивости систем линейных ОДУ на основе классических и современных методов линеаризации сводятся важные методы исследования устойчивости решений нелинейных систем. Помимо этого, с помощью систем линейных ОДУ непосредственно моделируются классы физических и технологических процессов, требующих анализа устойчивости.

Использование компьютерной техники в научно-технических исследованиях приводит к задаче автоматизации анализа устойчивости. Анализ устойчивости требуется выполнять непосредственно в процессе компьютерного управления объектами в целях повышения качества управления. Поэтому актуальна разработка компьютерных средств анализа устойчивости систем линейных ОДУ.

В работе предлагается подход к решению задачи анализа устойчивости (в смысле Ляпунова), в основу которого положены схемы, представляющие собой матричные мультипликативные преобразования разностных методов численного интегрирования. Это делается с целью сконструировать компьютерный метод анализа устойчивости по Ляпунову. Метод должен формировать критерии устойчивости, компьютерное моделирование которых влечет однозначное определение характера устойчивости, неустойчивости либо асимптотической устойчивости систем линейных ОДУ.

Постановка задачи

Рассматривается задача Коши для линейной однородной системы ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y,\ Y(t_0) = Y_0, \quad (1)$$

где Y — вектор-функция, координаты которой — искомые функции $y_1, y_2, ..., y_n$ от независимой переменной t; $A(t)$ — матрица коэффициентов размерности $n \times n$. Предполагается, что все функции $a_{ij}(t)$ $i, j = 1, ..., n$, определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, T]$, при любом выборе $T = \text{const}$, $T \in [t_0, \in)$; $Y(t_0) = Y_0$ — заданный начальный вектор.

Всюду ниже используется каноническая норма матрицы $\|A\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}|$ и согласованная с ней норма вектора $\|Y\| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k|$.

Предполагается, что для системы (1) выполнены все условия существования и единственности решения $Y = Y(t)$, $Y(t_0) = Y_0$ на $[t_0, \infty)$, эти же условия предполагаются выполненными для каждого элемента множества возмущенных решений $\tilde{Y} = \tilde{Y}(t)$, соответствующих возмущенному начальному вектору $\tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}_0$, удовлетворяющему неравенству

$$\left\|\tilde{Y}_0 - Y_0\right\| \leqslant \delta,\ \delta > 0, \quad (2)$$

где δ — некоторое достаточно малое число.

В рассматриваемых предположениях справедливы следующие утверждения [1]:

1) матрица $A(t)$ ограничена на отрезке $[t_0, T]$ по норме:

$$\|A(t)\| \leqslant c,\ c = \text{const}\ \forall T \in [t_0, \infty);$$

2) производная функций $f_k(t, Y(t))$, $f_k(t, \tilde{Y}(t))$, где $f_k(t, Y) = a_{k1}(t)y_1 + ... + a_{kn}(t)y_n$, $k = 1, ..., n$, ограничена на отрезке $[t_0, T]$:

$$\left|f_k'(t, Y(t))\right| \leqslant c_1,\ \left|f_k'(t, \tilde{Y}(t))\right| \leqslant c_1,$$
$$c_1 = \text{const}\ \forall t \in [t_0, T].$$

Пусть R обозначает область, включающую множество всех решений задачи (1) при начальных значениях, удовлетворяющих (2):

$$R: \{t_0 \leqslant t < \infty;\ \tilde{Y}(t), Y(t): \left\|\tilde{Y}_0 - Y_0\right\| \leqslant \delta\}. \quad (3)$$

Требуется исследовать решение задачи (1) на устойчивость в смысле Ляпунова. Традиционное определение устойчивости заимствовано с упрощениями на случай рассматриваемого множества R [2].

Описание метода

Метод Эйлера приближенного решения системы (1) можно записать в виде: $Y_{i+1} = Y_i + hA(t_i)Y_i$, $i = 0, 1, ...$, или

$$Y_{i+1} = (E + hA(t_i))Y_i, \quad (4)$$

где h — шаг разностной схемы, узлы которой предполагаются равноотстоящими. При любом выборе $t = \text{const}$, $t \in [t_0, \infty)$, h и переменный индекс i всегда предполагаются связанными соотношениями

$$t = t_{i+1},\ h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i+1},\ i = 0, 1, \ldots . \quad (5)$$

Для возмущенного решения системы (1) соотношение (5) переходит в соотношение

$$\tilde{Y}_{i+1} = (E + hA(t_i))\tilde{Y}_i. \quad (6)$$

Соответствующие приближенным решениям (4), (6) точные решения могут быть представлены в форме метода Эйлера с остаточным членом на каждом шаге:

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= (E + hA(t_i))Y_i + Q_i, \\ \tilde{Y}_{i+1} &= (E + hA(t_i))\tilde{Y}_i + \tilde{Q}_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Остаточным членом метода Эйлера на шаге будем считать разность между точным решением и его приближением по методу Эйлера.

Для разности между возмущенным и невозмущенным решениями получим точное равенство

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = (E + hA(t_i))(\tilde{Y}_i - Y_i) + Q_{Ei}, \quad (8)$$

где $Q_{Ei} = \tilde{Q}_i - Q_i$. Поскольку $\|Q_{Ei}\| \leqslant \left\|\tilde{Q}_i\right\| + \|Q_i\|$, то $\|Q_{Ei}\| \leqslant c_1 h^2$ [1].

Рекуррентное преобразование (8) влечет равенство

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell}))(\tilde{Y}_0 - Y_0) + L_i, \quad (9)$$

где

$$L_i = \sum_{k=1}^{i} \prod_{\ell=0}^{i-k} (E + hA(t_{i-\ell}))Q_{Ek-1} + Q_{Ei}. \quad (10)$$

Лемма 1. В рассматриваемых условиях имеет место соотношение $\|L_i\| = O(h)$ [1].

Доказательство. Из соотношения (10) следует

$$\|L_i\| \leqslant \sum_{k=1}^{i} \prod_{\ell=0}^{i-k} \|(E + hA(t_{i-\ell}))\| \|Q_{Ek-1}\| + \|Q_{Ei}\|.$$

С учетом утверждений 1) и 2) последнее неравенство примет вид

$$\|L_i\| \leqslant c_1 h^2 \sum_{k=1}^{i+1} (1+ch)^{i-k+1}$$

$$\text{или } \|L_i\| \leqslant c_1 h^2 \sum_{\ell=0}^{i} (1+ch)^{\ell}.$$

Суммирование геометрической прогрессии в правой части влечет выполнение

$$\|L_i\| \leqslant \bar{c}_1 h((1+ch)^{i+1} - 1),$$

где $\bar{c}_1 = \dfrac{c_1}{c}$.

Отсюда, с учетом (5), следует, что

$$\|L_i\| \leqslant \bar{c}_1 h\left((1+ch)^{\frac{t_{i+1}-t_0}{h}} - 1\right).$$

Тем более справедливо неравенство

$$\|L_i\| \leqslant \bar{c}_1 h(\mathbf{e}^{c(t_{i+1}-t_0)} - 1). \tag{11}$$

При любом выборе $t = t_{i+1}$, $t = \text{const}$, $t \in [t_0, \infty)$, и при переменном i выполняется соотношение $\bar{c}_1(\mathbf{e}^{c(t-t_0)} - 1)h \to 0$, если $h \to 0$. Отсюда и из неравенства (11) следует, что $\|L_i\| = O(h)$. Лемма доказана.

В условиях леммы 1 имеет место равенство

$$\lim_{h\to 0} L_i = 0. \tag{12}$$

Предельный переход в равенстве (9) при любом t из (5) влечет равенство

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{h\to 0} \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell}))(\tilde{Y}_0 - Y_0) + \lim_{h\to 0} L_i.$$

Стремление h к нулю равносильно стремлению i к бесконечности. Отсюда, с учетом (12), для любого $t \in [t_0, \infty)$ выполнено:

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell}))(\tilde{Y}_0 - Y_0). \tag{13}$$

Теоретически шаг h в формуле (13) зависит от i: $h(i) = \dfrac{t - t_0}{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots$. В правой части (13) бесконечное произведение не вполне соответствует смыслу этого понятия, определяемого в математическом анализе. Известное определение включает последовательность частичных произведений, изменение которых определяет добавление новых сомножителей. Бесконечное произведение в соотношении (13) строится как последовательность частичных произведений, каждое из которых отличается от предыдущего не только добавлением нового сомножителя, но и изменением (уменьшением в обратной числу сомножителей пропорции) параметра h в каждом из сомножителей нового частичного произведения.

Смысл равенства (13) состоит в том, что для произвольного t величина возмущения равна бесконечному матричному произведению, умноженному на возмущение начальных данных. Таким образом, возмущение при любом t пропорционально бесконечному матричному произведению. Отсюда автоматически вытекает базовый критерий устойчивости линейных систем ОДУ, представленный теоремой 1 [3].

Теорема 1. Пусть выполнены все рассматриваемые условия. Для того чтобы решение задачи (1) было устойчиво, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\left\|\lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell}))\right\| \leqslant \tilde{c}_1 = \text{const } \forall t \in [t_0, \infty). \tag{14}$$

Решение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполнено (14) и, кроме того, выполняется соотношение

$$\left\|\lim_{t\to\infty} \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell}))\right\| \to 0. \tag{15}$$

Соотношение (13) можно переписать в виде

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \prod_{i=0}^{\infty} (E + hA(t_i))(\tilde{Y}_0 - Y_0).$$

Соответственно, соотношения (14), (15) примут вид

$$\left\|\prod_{i=0}^{\infty} (E + hA(t_i))\right\| \leqslant \tilde{c}_1 = \text{const } \forall t \in [t_0, \infty)$$

$$\text{и } \left\|\lim_{t\to\infty} \prod_{i=0}^{\infty} (E + hA(t_i))\right\| \to 0,$$

где t, i, h связаны зависимостью (5).

Значение критериев (14), (15) заключается в том, что они позволяют определить характер устойчивости, асимптотической устойчивости либо неустойчивости систем линейных ОДУ без представления решения в аналитической форме, непосредственно по значениям разностных приближений. Мультипликативная форма выражений под знаком предела в левой части предоставляет возможность запрограммировать вычисление этих выражений в виде цикла по числу сомножителей. Это влечет предпосылки компьютерного анализа устойчивости без обращения к аналитическим методам качественной теории дифференциальных уравнений.

Практическая компьютерная реализация критериев будет выполняться с постоянным шагом на фиксированном промежутке. Это делается по двум причинам: во-первых, экспериментально не обнаруживается разница результатов моделирования при изменении шага в наборе сомножителей, во-вторых, постоянство шага принципиально сокращает время моделирования [1].

В случае постоянства матрицы A запись критериев упрощается [1]. Критерий устойчивости (14) примет вид

$$\left\| \lim_{i \to \infty} B^{i+1} \right\| \leqslant \tilde{c}_2 = \text{const } \forall t \in [t_0, \infty),$$

где $B = E + hA$.

Критерий асимптотической устойчивости (15) преобразуется в следующее соотношение:

$$\left\| \lim_{t \to \infty} \lim_{i \to \infty} B^{i+1} \right\| \to 0.$$

Далее приводится схема компьютерного анализа устойчивости для случая систем линейных ОДУ с нелинейной добавкой.

Рассматривается задача Коши для системы

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t, Y),\ Y(t_0) = Y_0. \qquad (16)$$

Предполагается, что для системы (16) выполнены все условия, ранее требуемые для (1). Дополнительно предполагается, что элементы нелинейной функции $F(t, Y)$ определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, T]$ при любом выборе $T = \text{const}$, $T \in [t_0, \infty)$.

В данных условиях для $\forall T \in [t_0, \infty)$ на отрезке $[t_0, T]$ производные функций $\phi_k(t, Y(t))$, $\phi_k(t, \tilde{Y}(t))$, $\phi_k(t_i, Y_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t_i) y_{ji} + f_k(t_i, Y_i)$, $k = 1, ..., n$, ограничены общей константой: $\left|\phi'_k(t, Y(t))\right| \leqslant c_2$, $\left|\phi'_k(t, \tilde{Y}(t))\right| \leqslant c_2$, $c_2 = c_2(T) = \text{const}$.

Разность между возмущенным и невозмущенным решением (16) имеет вид точного равенства [4]:

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = B(t_i)(\tilde{Y}_i - Y_i) + h\Phi_i(t_i, \tilde{Y}_i, Y_i) + \Theta_{Ei}, \quad (17)$$

где $B(t_i) = E + hA(t_i)$, $\Phi_i(t_i, \tilde{Y}_i, Y_i) = F(t_i, \tilde{Y}_i) - F(t_i, Y_i)$, $\|\Theta_{Ei}\| \leqslant c_2 h^2$. Ниже полагается, что $\Phi_i = \Phi_i(t_i, \tilde{Y}_i, Y_i)$.

Для системы (16) рекуррентное преобразование (17) влечет равенство

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = P_i(\tilde{Y}_0 - Y_0) + D_{Ei} + S_{Ei}, \qquad (18)$$

где $P_i = \prod_{\ell=0}^{i} B(t_{i-\ell})$, $D_{Ei} = \sum_{k=1}^{i} \prod_{\ell=0}^{i-k} B(t_{i-\ell}) h\Phi_{k-1} + h\Phi_i$, $S_{Ei} = \sum_{k=1}^{i} \prod_{\ell=0}^{i-k} B(t_{i-\ell}) \Theta_{Ek-1} + \Theta_{Ei}$ [4].

Переходя в (18) к пределу при $h \to 0$, что равносильно $i \to \infty$, получим

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{i \to \infty} P_i(\tilde{Y}_0 - Y_0) + \lim_{i \to \infty} D_{Ei} + \lim_{i \to \infty} S_{Ei}. \quad (19)$$

В рассматриваемых условиях выполняется соотношение $\|S_{Ei}\| = O(h)$ [4].

В тех же условиях

$$\lim_{h \to 0} S_{Ei} = 0. \qquad (20)$$

Согласно (20) соотношение (19) примет вид

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{i \to \infty} P_i(\tilde{Y}_0 - Y_0) + \lim_{i \to \infty} D_{Ei}. \quad (21)$$

Вывод необходимых и достаточных условий устойчивости (асимптотической устойчивости) решения задачи (16) строится в предположении, что устойчива (асимптотически устойчива) соответствующая системе (16) система линейных ОДУ [4].

Теорема 2. Пусть выполнены рассматриваемые ограничения на систему (16), и соответствующая ей линейная система устойчива. Тогда для устойчивости решения системы (16) необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\tilde{\varepsilon} > 0$ нашлось $\delta_1 > 0$, такое что выполнение $\left\|\tilde{Y}_0 - Y_0\right\| \leqslant \delta_1$ влечет неравенство

$$\left\| \tilde{Y}(t) - Y(t) - \lim_{i \to \infty} P_i(\tilde{Y}_0 - Y_0) \right\| \leqslant \tilde{\varepsilon} \quad \forall t \in [t_0, \infty). \quad (22)$$

Относительно асимптотической устойчивости имеет место следующая теорема [4].

Теорема 3. Если выполнены рассматриваемые ограничения на систему (16), и соответствующая ей линейная система асимптотически устойчива, то решение задачи (16) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполняется утверждение теоремы 2 и существует некоторое положительное δ_2, такое что выполнение $\left\|\tilde{Y}_0 - Y_0\right\| \leqslant \delta_2$ при $t \to \infty$ влечет соотношение

$$\left\|\tilde{Y}(t) - Y(t) - \lim_{i \to \infty} P_i(\tilde{Y}_0 - Y_0)\right\| \to 0. \qquad (23)$$

Значения выражений под знаком нормы в (22), (23) вычисляются программно, на этой основе численно моделируются устойчивость и асимптотическая устойчивость и реализуется компьютерный анализ устойчивости решений систем вида (16).

В рамках предложенного подхода можно выполнять анализ устойчивости нелинейной системы ОДУ на основе линеаризации, которая имеет место только в окрестности исследуемого решения [5].

Рассматривается задача Коши для нелинейной системы ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y),\ Y(t_0) = Y_0. \qquad (24)$$

Предполагается, что существует $\delta_0 > 0$, при котором все условия существования и единственности выполнены для невозмущенного решения на полупрямой $[t_0, \infty)$ и для каждого его возмущения с начальным вектором из окрестности $\left\|\tilde{Y}_0 - Y_0\right\| \leqslant \delta_0$. Предполагается также, что в области $R_0 : \{t_0 \leqslant t < \infty;\ Y(t),\ \forall\, \tilde{Y}(t) : \left\|\tilde{Y}_0 - Y_0\right\| \leqslant \delta_0\}$ функция $F(t, Y)$ всюду определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по t (в точке t_0 — справа), компоненты этой функции удовлетворяют неравенству

$$\left|f_k(t, Y) - f_k(t, \tilde{Y})\right| \leqslant L\left|y_k - \tilde{y}_k\right|,\ L = \mathrm{const},$$

$$\forall\, t \in [t_0, \infty),\ \forall (t, Y),\ (t, \tilde{Y}) \in R_0,\ \forall\, k = 1, \ldots, n.$$

Первоначально выполняется преобразование системы (24):

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{f_k(t, y_1, \ldots, y_n)}{y_k} y_k,\ k = 1, \ldots, n,$$

в предположении $y_k \neq 0$, или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dt} \\ \dfrac{dy_2}{dt} \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{f_1(t, y_1, \ldots, y_n)}{y_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \dfrac{f_2(t, y_1, \ldots, y_n)}{y_2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{f_n(t, y_1, \ldots, y_n)}{y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Если каждую диагональную компоненту в матрице из (25) заменить на аналитическое выражение от t в явной форме, то получим для анализа устойчивости линейную систему, поскольку матрица от $y_1(t)$, ..., $y_n(t)$ зависеть не будет. Это дает возможность на практике использовать аппарат анализа устойчивости систем линейных ОДУ для каждого отдельного решения нелинейной системы (24). Преобразованную такой подстановкой систему (25) можно рассматривать как линейную систему ОДУ вида

$$\frac{dY}{dt} = \tilde{A}(t)Y, \qquad (26)$$

где диагональные элементы зависят только от переменной t.

Для системы (26) критерии устойчивости (14), (15) приводятся к аддитивной форме после следующего преобразования [5]:

$$\prod_{\ell=0}^{i} (E + h\tilde{A}(t_{i-\ell})) =$$

$$= \mathbf{e}^{\ln \prod_{\ell=0}^{i} (E + h\tilde{A}(t_{i-\ell}))} = \mathbf{e}^{\sum_{\ell=0}^{i} \ln(E + h\tilde{A}(t_{i-\ell}))}.$$

Система (26) устойчива тогда и только тогда, когда [5]

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} h\tilde{A}(t_{i-\ell}) \leqslant \tilde{C}_1 = \mathrm{const}\ \forall\, t \in [t_0, \infty), \qquad (27)$$

где C_1 — постоянная (диагональная) матрица. Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (27), а также соотношение

$$\lim_{t \to \infty} \lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} h\tilde{A}(t_{i-\ell}) = (-\infty), \qquad (28)$$

где под символом $(-\infty)$ понимается предел диагональной матрицы, диагональные элементы которой стремятся к $-\infty$.

Критерии (27), (28) инвариантны относительно правой части системы, разностных схем приближенного решения системы, шага и длины промежутка численного интегрирования и ориентированы на компьютерную реализацию, которая выполняется в режиме реального времени.

На практике при компьютерном анализе устойчивости точное аналитическое решение в (25) заменяется на разностное. В результате исследование устойчивости решения системы (24) сводится к анализу устойчивости линейной системы ОДУ вида (26) с соответственно дискретизированными значениями правой части и решениями на диагонали.

Численный эксперимент

Исследуется нелинейная система

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_2\sqrt{y_1^2 + y_2^2}; \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1\sqrt{y_1^2 + y_2^2}. \end{cases} \qquad (29)$$

Известно, что нулевое решение этой системы устойчиво, все остальные решения неустойчивы [2].

Анализ устойчивости выполняется на основе критериев (14), (27) после предварительной линеаризации. Исследуется на устойчивость нулевое решение системы на промежутке [0, 10 000] с шагом $h = 0{,}00001$. Величина возмущения нулевого решения считается равной 0,000001.

На основе следующих операторов (Delphi) выполняется компьютерный анализ устойчивости по критерию (14), результаты которого представлены в табл. 1.

```
function f1(t, y1, y2: extended): extended;
 begin f1: = -y2*sqrt(sqr(y1) + sqr(y2)); end;
function f2(t, y1, y2: extended): extended;
 begin f2: = y1*sqrt(sqr(y1) + sqr(y2)); end;
 begin
   t: = 0; k: = 0; y1: = 0; y2: = 0;
   yv1: = y1 + eps1; yv2: = y2 + eps2;
   p1: = (1 + (h*(f1(t,y1,y2)-f1(t,yv1,yv2))/(y1-yv1)));
   p2: = (1 + (h*(f2(t,y1,y2)-f2(t,yv1,yv2))/(y2-yv2)));
  repeat
   y _ 1: = y1; yv _ 1: = yv1; y1: = y1 +
   h*f1(t,y1,y2); y2: = y2 + h*f2(t,y _ 1,y2);
   yv1: = yv1 + h*f1(t,yv1,yv2); yv2: = yv2 +
   h*f2(t,yv _ 1,yv2);
   p1: = p1*(1 + (h*(f1(t,y1,y2)-f1(t,yv1,yv2))/(y1-yv1)));
   p2: = p2*(1 + (h*(f2(t,y1,y2)-f2(t,yv1,yv2))/(y2-yv2)));
   k: = k + 1; t: = t + h;
   if k> = 100000000 then
   begin
    norma: = sqrt(sqr(p1) + sqr(p2));
    writeln('t = ',t:6:4,','norma = ',norma); k: = 0;
   end;
 until t>TT;
```

Представленные значения нормы ограничены константой, что в соответствии с критерием (14) свидетельствует об устойчивости.

Таблица 1
Table 1

Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (29) на основе критерия (14)

The Results of the Stability Analysis of the Zero Solution of the System (29) Based on the Criteria (14)

t	*norma*
1000	1.41421356237311
2000	1.41421356237312
3000	1.41421356237314
4000	1.41421356237315
5000	1.41421356237317
6000	1.41421356237318
7000	1.41421356237319
8000	1.41421356237321
9000	1.41421356237322
10000	1.41421356237324

Далее выполняется анализ устойчивости системы (29) на основе критерия (27). Численные значения входных параметров остаются прежними. Операторы, реализующие критерий (27), представлены ниже, результаты моделирования даны в табл. 2.

```
begin
  t: = 0; k: = 0; y1: = 0.01; y2: = 0.01;
  yv1: = y1 + eps1; yv2: = y2 + eps2;
  d1: = (f1(t,y1,y2)-f1(t,yv1,yv2))/(y1-yv1);
  d2: = (f2(t,y1,y2)-f2(t,yv1,yv2))/(y2-yv2);
 repeat
  y _ 1: = y1; yv _ 1: = yv1; y1: = y1 +
  h*f1(t,y1,y2); y2: = y2 + h*f2(t,y _ 1,y2);
  yv1: = yv1 + h*f1(t,yv1,yv2); yv2: = yv2 +
  h*f2(t,yv _ 1,yv2);
  d1: = d1 + ((f1(t,y1,y2)-f1(t,yv1,yv2))/(y1-yv1));
  d2: = d2 + ((f2(t,y1,y2)-f2(t,yv1,yv2))/(y2-yv2));
  k: = k + 1; t: = t + h;
  if k> = 100000000 then
  begin writeln('t = ',t:5:0,' ',h*d1,' ',h*d2);
  k: = 0; end;
until t>TT;
```

Таблица 2
Table 2

Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (29) на основе критерия (27)

The results of the Stability Analysis of the Zero Solution of the System (29) Based on the Criteria (27)

t	$h\sum_{\ell=0}^{i}\tilde{a}_{11}(t_{i-\ell})$	$h\sum_{\ell=0}^{i}\tilde{a}_{22}(t_{i-\ell})$
1000	−1.41621546482379E-0003	1.41221545945044E-0003
2000	−2.83644226666084E-0003	2.82044218124678E-0003
3000	−4.26069182993056E-0003	4.22469139780226E-0003
4000	−5.68897562982427E-0003	5.62497426428432E-0003
5000	−7.12130520691026E-0003	7.02130187319912E-0003
6000	−8.55769216760099E-0003	8.41368525483007E-0003
7000	−9.99814818462451E-0003	9.80213537767238E-0003
8000	−1.14426849975002E-0002	1.11866631488637E-0002
9000	−1.28913144130190E-0002	1.25672794146111E-0002
10 000	−1.43440483057280E-0002	1.39439949606140E-0002

Диагональные элементы матрицы ограничены константой, что является признаком устойчивости. Результат исследования находится в соответствии с полученными ранее оценками устойчивости на основе (14).

Далее выполняется анализ устойчивости ненулевого решения системы (29), соответствующего начальным условиям $y_1(0) = 0{,}01$, $y_2(0) = 0{,}01$. Все остальные входные параметры программы не меняются. Результаты анализа устойчивости на основе критерия (14) отображены в табл. 3.

Наблюдается монотонное увеличение значений нормы, что свидетельствует о неустойчивости решения системы. Результаты исследования на основе критерия (27) представлены в табл. 4. и свидетельствуют о неустойчивости решения системы.

Компьютерная реализация критериев показала целесообразность использования данного подхода на практике. Выполненный численный эксперимент показал эквивалентность рассмотренных способов компьютерного анализа и позволил указать значение шага разностного метода, длину промежутка разностного решения для сохранения достоверности анализа устойчивости.

Таблица 3
Table 3

Результаты анализа устойчивости ненулевого решения системы (29) на основе критерия (14)

The Results of the Stability Analysis of the Nonzero Solution of the System (29) Based on the Criteria (14)

t	*norma*
1000	2.00509839014046E + 0001
2000	4.00271780873374E + 0001
3000	6.00200688337337E + 0001
4000	8.00171918936163E + 0001
5000	1.00016040816282E + 0002
6000	1.20015772753961E + 0002
7000	1.40016020966995E + 0002
8000	1.60016596426253E + 0002
9000	1.80017390581162E + 0002
10 000	2.00018332995000E + 0002

Таблица 4
Table 4

Результаты анализа устойчивости ненулевого решения системы (29) на основе критерия (27)

The Results of the Stability Analysis of the Nonzero Solution of the System (29) Based on the Criteria (27)

t	$h\sum_{\ell=0}^{i}\tilde{a}_{11}(t_{i-\ell})$	$h\sum_{\ell=0}^{i}\tilde{a}_{22}(t_{i-\ell})$
1000	−1.33439834750317E + 0001	−2.39578166413820E + 0001
2000	−1.61236408719768E + 0001	−1.76326201174625E + 0001
3000	−2.85138829462534E + 0001	1.29716455076887E + 0002
4000	−1.17482297585034E + 0002	1.09150527716857E + 0002
5000	−1.10920097518025E + 0002	9.73066902829440E + 0001
6000	−1.32803432779380E + 0002	1.14073647152513E + 0002
7000	−1.23246494308784E + 0002	2.74865524156251E + 0002
8000	−1.25041154302556E + 0002	2.74974411665878E + 0002
9000	−1.61359014795154E + 0002	2.64322950154764E + 0002
10 000	1.14864679112119E + 0001	2.71221899034593E + 0002

Заключение

Предложен принципиально новый подход к анализу устойчивости систем линейных ОДУ, в основу которого полагаются компьютерные схемы анализа устойчивости, сконструированные с помощью мультипликативных преобразований разностных методов численного интегрирования.

Итогом преобразований являются необходимые и достаточные условия устойчивости в матричной мультипликативной форме, удобной для циклической программной реализации.

Важной особенностью предложенных критериев является то, что для их применения достаточно подать на вход стандартной процедуры, работающей в виде цикла значения правой части системы ОДУ в некоторой (начальной) точке. После этого никаких аналитических преобразований правой части не требуется, равно как не требуется ввод дополнительных данных по ходу работы программы или же ее прерывание, причем это так при любых параметрических изменениях правой части. Отсюда следует, что для анализа устойчивости системы управления, модель которой описывается системой ОДУ рассматриваемого вида, можно использовать стандартный блок в виде процедуры, программно реализующей представленные критерии. Поскольку для этого не требуется ввод дополнительных данных, компьютерный анализ устойчивости допускает выполнение в режиме реального времени. Тем самым анализ будет адекватно соответствовать реальным значениям параметров системы. Скорость выполнения анализа достаточно высока и на персональном компьютере, но имеется резерв увеличения быстродействия за счет параллелизма выполняемых операций [1].

Отмеченной возможностью не обладает математический анализ в рамках качественной теории ОДУ. Не обладают ею и системы компьютерной математики, которым на вход требуется ручной ввод с клавиатуры всех изменений правой части системы ОДУ.

Список литературы

1. **Ромм Я. Е., Буланов С. Г.** Компьютерный анализ устойчивости по Ляпунову систем линейных дифференциальных уравнений. Таганрог: Изд-во Таганрог. гос. пед. ин-та им. А. П. Чехова, 2012. 148 с.
2. **Чезари Л.** Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 478 с.
3. **Буланов С. Г., Джанунц Г. А.** Программный анализ устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе мультипликативных преобразований разностных схем и кусочно-полиномиальных приближений решения // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 2. С. 10—20.
4. **Ромм Я. Е., Буланов С. Г.** Компьютерный анализ устойчивости линейных дифференциальных уравнений с нелинейной добавкой применительно к фазовой автоподстройке частоты // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. Серия "Управление, вычислительная техника и информатика". 2010. № 6. С. 55—60.
5. **Ромм Я. Е., Буланов С. Г.** Численный эксперимент по компьютерному анализу устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений на основе критериев матричного вида // Депонирована в ВИНИТИ от 14.08.17. № 89.2017. 20 с.

The Analysis of the Systems Stability of Linear Differential Equations Based on the Transformation of Difference Schemes

S. G. Bulanov, bulanovtgpi@mail.ru,
Rostov State University of Economics, 347900, Taganrog, Russian Federation

Corresponding author: **Bulanov Sergey G.,** Rostov State University of Economics, 347900, Taganrog, Russian Federation, Russian Federation, bulanovtgpi@mail.ru

Accepted on March 14, 2019

Abstract

The approach to the analysis of Lyapunov systems stability of linear ordinary differential equations based on multiplicative transformations of difference schemes of numerical integration is presented. As a result of transformations, the stability criteria in the form of necessary and sufficient conditions are formed. The criteria are invariant with respect to the right side of the system and do not require its transformation with respect to the difference scheme, the length of the gap and the step of the solution. A distinctive feature of the criteria is that they do not use the methods of the qualitative theory of differential equations. In particular, for the case of systems with a constant matrix of the coefficients it is not necessary to construct a characteristic polynomial and estimate the values of the characteristic numbers. When analyzing the system stability with variable matrix coefficients, it is not necessary to calculate the characteristic indicators. The varieties of criteria in an additive form are obtained, the stability analysis based on them being equivalent to the stability assessment based on the criteria in a multiplicative form. Under the conditions of a linear system stability (asymptotic stability) of differential equations, the criteria of the systems stability (asymptotic stability) of linear differential equations with a nonlinear additive are obtained. For the systems of nonlinear ordinary differential equations the scheme of stability analysis based on linearization is presented, which is directly related to the solution under study. The scheme is constructed under the assumption that the solution stability of the system of a general form is equivalent to the stability of the linearized system in a sufficiently small neighborhood of the perturbation of the initial data. The matrix form of the criteria allows implementing them in the form of a cyclic program. The computer analysis is performed in real time and allows coming to an unambiguous conclusion about the nature of the system stability under study. On the basis of a numerical experiment, the acceptable range of the step variation of the difference method and the interval length of the difference solution within the boundaries of the reliability of the stability analysis is established. The approach based on the computer analysis of the systems stability of linear differential equations is rendered. Computer testing has shown the feasibility of using this approach in practice.

Keywords: *Lyapunov stability, computer simulation of stability, differential solutions differential equations*

For citation:

Bulanov S. G. The Analysis of the Systems Stability of Linear Differential Equations Based on the Transformation of Difference Schemes, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2019, vol. 20, no. 9, pp. 542—549.

DOI: 10.17587/mau.20.542-549

References

1. **Romm Ya. E., Bulanov S. G.** Computer analysis of Lyapunov systems stability of linear differential equations, Taganrog, Publishing house of Taganrog State Pedagogical Institute named after A. P. Chekhov, 2012, 148 p. (in Russian).
2. **Chezari L.** The asymptotic behavior and solutions stability of ordinary differential equations, Moscow, Mir, 1964, 478 p. (in Russian).
3. **Bulanov S. G., Dzhanunts G. A.** *Promyshlennye ASU i kontrollery,* 2015, no. 2, pp. 10—20 (in Russian).
4. **Romm Ya. E., Bulanov S. G.** *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskij region. Tekhnicheskie nauki. Seriya "Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika"*, 2010, no. 6, pp. 55—60 (in Russian).
5. **Romm Ya. E., Bulanov S. G.** Numerical experiment on computer analysis of the solutions stability of ordinary differential equations based on the criteria of the matrix type, *Deponirovana v VINITI* on 14.08.17, no. 89, 2017, 20 p. (in Russian).