

В. И. Ловчаков, д-р техн. наук, проф., lovvi50@mail.ru, О. А. Шибякин, магистрант, yutiop@gmail.com, Тульский государственный университет

Решение задачи быстродействия по выходной координате для линейных динамических систем

Исследуется решение так называемой задачи быстродействия по одной координате (БОК), имеющей важное теоретическое и практическое значение. Она сформулирована применительно к линейным одномерным объектам управления высокого порядка, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений в некотором фазовом пространстве. Время переходного процесса t_{nn} проектируемой системы понимается в смысле классической теории автоматического управления относительно одной (выходной) координаты объекта и определяется с использованием зоны $\Delta = \sigma^ = 4,321\%$, равной заданному (желаемому) значению перерегулирования синтезируемой системы. Данное перерегулирование соответствует быстродействующему колебательному звену второго порядка с коэффициентом демпфирования $\sqrt{2}/2 = 0,7071$. Здесь необходимо подчеркнуть, что равенство $\Delta = \sigma$ является одним из необходимых условий максимального быстродействия системы с колебательным характером переходных процессов. Соответственно задача БОК ставится в следующей обобщенной формулировке: требуется найти линейный алгоритм обратной связи, обеспечивающий замкнутой системе регулирования заданный порядок астатизма n_a и переводящий объект управления из начального нулевого состояния в конечное, определяемое постоянным сигналом задания, с минимальным значением времени переходных процессов системы t_{nn} и заданным значением перерегулирования $\sigma \leq \sigma^*$ при выполнении ограничения на сигнал управления $|u(t)| \leq u_{max}$.*

В настоящее время указанная задача БОК приближенно решена алгебраическим методом синтеза линейных систем управления при определении желаемой передаточной функции проектируемой замкнутой системы на основе типовых (эталонных) нормированных передаточных функций (НПФ). В работах Д. П. Кима проведен анализ четырех видов НПФ, обладающих повышенным быстродействием. В настоящей работе предлагаются дополнительно два вида нормированных передаточных функций, имеющих в сравнении с указанными НПФ более высокое быстродействие при заданном перерегулировании $\sigma^ = 4,321\%$. На их основе с использованием методологии модального управления предложен метод синтеза регулятора, обеспечивающего время переходных процессов проектируемой системы, близкое к минимальному, при заданных ограничениях на перерегулирование и значение сигнала управления. Подчеркнем, что данный метод в отличие от алгебраического метода синтеза применим к более широкому классу объектов управления: как к минимально-фазовым, так и не к минимально-фазовым, как содержащим нули, так и нет. Метод иллюстрируется примером синтеза быстродействующей системы управления четвертого порядка, содержащим результаты ее моделирования.*

Ключевые слова: линейный одномерный объект, критерий быстродействия, перерегулирование, астатизм, полюса оптимальной системы, модальное управление

1. Введение, постановка задачи исследования

Задача быстродействия по одной (выходной) координате объекта управления, имеющая важное теоретическое и практическое значение, сформулирована в работе [1]. Она сформулирована применительно к нелинейным одномерным объектам, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений в некотором фазовом пространстве с n -мерным вектором состояния $X(t)$, компоненты которого имеют физический смысл отклонений от заданного режима. Время T переходного процесса проектируемой системы определяется по первому моменту попадания системы в желаемую (требуемую) область фазового пространства, описываемую неравенствами $|x_i(T)| \leq \varepsilon_i$, где ε_i , $i = 1, 2, \dots, k$, — положительные числа, характеризующие заданную точность функционирования системы по соответствующей фазовой координате, причем $k < n$. Соответственно задача управления ставится следующим образом:

требуется найти управление в форме обратной связи $u(X)$, переводящее объект из начального состояния $X(0) = X_0$ в желаемую область за минимальное время T , причем при $t > T$ синтезируемая замкнутая система управления остается в требуемой области.

Подчеркнем, что в данной задаче координаты $x_{k+1}(T), \dots, x_n(T)$ могут принимать произвольные значения.

Сформулированная задача, называемая задачей быстродействия по нескольким координатам (БНК), является обобщением известной задачи оптимального быстродействия [2]: она трансформируется в последнюю при $k = n$ и $\varepsilon_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. В работе анализируется подход к решению поставленной задачи в случае $k = 1$. В этом случае задача для краткости называется задачей быстродействия одной координаты (БОК). Она является математически наиболее простой из рассматриваемых, но в то же время имеет большое инженерное значение, так как при $\varepsilon_1 = 0,05$ введенное время T

совпадает с определением времени переходного процесса системы $t_{\text{пт}} = T$ в классической теории автоматического управления. В связи с этим задачу БОК можно рассматривать как задачу конструирования системы с минимальным временем регулирования, понимаемым в смысле классической теории управления.

Необходимо подчеркнуть, что решение задачи БОК, а тем более задачи БНК, представляет более сложную математическую проблему, чем решение задачи оптимального быстродействия, так как при определенных условиях решение задачи БОК можно свести к последовательному решению двух задач оптимального быстродействия. В свою очередь, решение последних задач в форме обратной связи, как показывает анализ работ [2–9], представляет серьезную проблему даже для линейных объектов относительно невысокого порядка ($n = 4, 5, \dots$). Подчеркнем, что существует большое число работ, оцениваемое сотнями, посвященных анализу и синтезу оптимальных по быстродействию систем управления (в списке литературы данной статьи указаны основные монографии, суммарная библиография которых отчасти отражает это множество работ). Их анализ установил, что задача быстродействия полностью решена для объектов второго порядка методом фазовой плоскости [3–5]. Для объектов третьего порядка быстродействующее управление точно (аналитически) найдено только в отдельных случаях, в частности, для трех последовательно соединенных интеграторов [3–5], соединения двух интеграторов и апериодического звена [3, 4], соединения интегратора и двух апериодических звеньев [3, 4]. При этом существенным образом использовались геометрические методы, например, построение проекций вынужденных траекторий объекта в трехмерном фазовом пространстве на соответствующие плоскости [2–5]. Для объектов высокого порядка ($n \geq 4$) применение геометрических методов существенно затруднено и, как следствие, для них практически неизвестны аналитические решения задач оптимального быстродействия [9, 10].

В связи с указанными обстоятельствами в данной работе ограничимся рассмотрением решения задачи БОК только для линейных объектов с определением алгоритма управления в форме линейной обратной связи. Анализ работ по исследованиям этой линейной задачи БОК показал, что к настоящему времени предложены лишь приближенные мето-

дики ее решения для отдельных подклассов объектов на основе алгебраического метода синтеза [11–15] с использованием желаемых передаточных функций (ЖПФ), обеспечивающих повышенное быстродействие. Методики определения ЖПФ основаны на использовании нормированных передаточных функций (НПФ) — передаточных функций в форме Вышнеградского [16, 17]. В качестве характерного примера рассмотрим методику работы [14] нахождения ЖПФ системы управления минимально-фазовым объектом (его передаточная функция (ПФ) содержит только левые нули и полюса). Если проектируемая система управления не должна обладать астатизмом выше 1-го порядка, то ЖПФ может не иметь нулей, и в этом случае нахождение данной передаточной функции сводится к определению только ее знаменателя — характеристического полинома синтезируемой системы. В указанной методике предлагается использовать следующие три вида типовых (эталонных) нормированных полиномов, обеспечивающих повышенное быстродействие проектируемой системе. Первыми двумя такими полиномами являются: 1) полином с одинаковыми корнями, представляющий собой бином Ньютона $(q + 1)^n$; 2) полином из произведения $n/2$ трехчленов $(q^2 + 2\zeta_n\beta_n q + \beta_n^2)$ при четном n , а при нечетном n — полином из произведения $(n - 1)/2$ трехчленов $(q^2 + 2\zeta_n\beta_n q + \beta_n^2)$ и одного двучлена $(q + \alpha_n)$. Эти полиномы и передаточные функции с такими характеристическими полиномами соответственно называются биномиальными и колебательными (известно, что функция $W(q) = 1/(q^2 + 2\zeta_n\beta_n q + \beta_n^2)$ описывает колебательное звено с коэффициентом демпфирования ζ_n и постоянной времени $T_n = 1/\beta_n$). Необходимо подчеркнуть, что системы с биномиальными передаточными функциями обеспечивают в классе монотонных переходных процессов (процессов с нулевым перерегулированием $\sigma = 0$) минимальное время регулирования [16, 17]. Также известно [16], что замена апериодического звена биномиальной системы колебательным звеном с небольшим перерегулированием (со значением коэффициента демпфирования, близким к единице) может существенно уменьшить время переходных процессов получаемой динамической системы. Соответственно в работах [17, 18] предложены нормированные полиномы, отвечающие НПФ колебательных систем, которые

обеспечивают минимальное время переходных процессов проектируемой системе управления. В дальнейшем эти полиномы и НПФ, составляющие третий вид функций, будем называть оптимальными по Г. С. Поспелову, А. А. Красовскому. Необходимо подчеркнуть, что данные полиномы и НПФ найдены приближенно, с некоторой точностью.

В настоящей работе на основе развития результатов статьи [19] предлагаются дополнительно два вида нормированных передаточных функций, обеспечивающих в сравнении с указанными НПФ более высокое быстродействие при заданном перерегулировании $\sigma^* = 4,321\%$. Данное перерегулирование соответствует колебательному звену второго порядка с коэффициентом демпфирования $\zeta = \sqrt{2}/2 = 0,7071$, являющемуся оптимальным по Г. С. Поспелову, А. А. Красовскому. Соответственно время переходных процессов $t_{\text{пп}}$ систем в дальнейшем определяется с использованием зоны $\varepsilon_1 = \sigma^* = 4,321\%$.

Для последующего сравнения показателей перечисленных нормированных передаточных функций, обеспечивающих высокое быстродействие, приведем параметры и показатели типовых НПФ, воспользовавшись данными работы [14].

2. Параметры и показатели типовых нормированных передаточных функций

Предварительно более конкретно сформулируем исследуемую задачу БОК. Рассматриваемый класс линейных объектов управления описывается матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t); |u(t)| \leq u_{\text{max}}, \quad (1)$$

где $X(t)$ — вектор координат состояния объекта; $u(t)$ — управляющее воздействие, ограниченное величиной $\pm u_{\text{max}}$; A, B — матрицы параметров объекта размерностей $n \times n, n \times 1$. Объектам (1) с выходной координатой $x(t) = x_1(t)$ соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n}, \quad m \leq n-1 \quad (2)$$

с постоянными коэффициентами a_i, b_j . Задачу управления, по аналогии с работой [11], сформулируем в следующей обобщенной постановке: *требуется найти линейный алгоритм обратной связи $u(X)$, обеспечивающий замкнутой системе регулирования заданный порядок астатизма n_a и переводящий объект (1) из начального нулевого состояния в конечное, определяемое заданием регулятора x_z , с минимальным значением времени переходных процессов системы $t_{\text{пп}}$ и заданным значением перерегулирования $\sigma \leq \sigma^*$ при наличии ограничения $|u(t)| \leq u_{\text{max}}$.*

Приближенно данную задачу управления можно решить алгебраическим методом синтеза линейных систем управления [11–14], выбрав ЖПФ проектируемой замкнутой системы на основе типовых НПФ, обладающих повышенным быстродействием. Для справки укажем, что произвольная ПФ (2) может быть преобразована в НПФ заменой переменной p преобразованием Лапласа $L[f(t)] = F(p)$ новой переменной [11, 17]

$$q = \alpha p, \quad \alpha = \sqrt[n]{a_0/a_n}. \quad (3)$$

Данная замена переменной Лапласа, согласно известному свойству преобразования Лапласа $L[f(t/\alpha)] = \alpha F(\alpha p)$, равносильна замене переменной времени $\tau = t/\alpha$ и умножению изображения на постоянную α . Так как умножение переходной функции на константу не влияет на время регулирования, то время регулирования исходной системы $t_{\text{пп}}$ и время регулирования $\tau_{\text{пп}}$ системы с НПФ связаны соотношением $t_{\text{пп}} = \alpha \tau_{\text{пп}}$. Остальные показатели качества (перерегулирование, запасы устойчивости и др.) нормированных и ненормированных систем совпадают.

При синтезе систем с порядком астатизма $n_a = 1$ можно использовать типовые НПФ, исследованные в работе [14], параметры и показатели которых представлены в табл. 1. В данной таблице первая строка соответствует биномиальным системам с нормированной передаточной функцией $W(q) = (q+1)^n$. Вторая строка табл. 1 соответствует колебательным системам с НПФ вида

$$W(q) = \begin{cases} 1/(q^2 + 2\zeta q + 1)^{n/2}, \\ n - \text{четное}; \\ 1/(q+1)(q^2 + 2\zeta q + 1)^{(n-1)/2}, \\ n - \text{нечетное}, \end{cases} \quad (4)$$

Таблица 1
Table 1

Параметры и показатели типовых НПФ
Parameters and indicators of typical NTF

Вид НПФ, ее параметры	Показатели	n				
		2	3	4	5	6
Биномиальный	$\tau_{пп}$ σ	4,74 0	6,30 0	7,75 0	9,15 0	10,51 0
Колебательный с $\alpha_n = \beta_n = 1, \zeta = 0,7$	$\tau_{пп}$ σ	2,90 4,60	4,41 1,52	7,26 6,69	5,99 3,45	9,43 8,08
Колебательный с $\alpha_n = \beta_n = 1, \zeta = 0,75$	$\tau_{пп}$ σ	3,13 2,84	4,69 0,77	5,02 3,88	6,43 1,79	6,80 8,08
Оптимальный по Г. С. Поспелову, А. А. Красовскому	$\tau_{пп}$ σ	4,38 5,00	4,07 0,49	4,57 4,73	5,71 0,00	6,22 5,00

для которой параметры $\alpha_n = \beta_n = 1$, а коэффициент демпфирования $\zeta = 0,7$. Третья строка табл. 1 отвечает аналогичным динамическим системам со значением $\zeta = 0,75$.

В четвертой строке табл. 1 приводятся показатели систем, оптимальных по Г. С. Поспелову, А. А. Красовскому. Их передаточные функции имеют вид $W(q) = 1/M(q)$, причем нормированный полином $M(q)$ имеет комплексные корни с одинаковыми вещественными частями η и мнимыми частями, образующими арифметическую прогрессию с разностью и первым членом, равными γ . В работе [17] показано, что существует минимальное значение $\mu = \gamma/\eta$, при котором время регулирования системы минимально. Ниже в соответствии с этой работой приводятся характеристические полиномы для пяти значений степеней, начиная с $n = 2$, при оптимальных значениях μ :

$$\begin{aligned}
 n = 2: M_2(q) &= q^2 + 1,38q + 1; \\
 n = 3: M_3(q) &= q^3 + 2,05q^2 + 2,3q + 1; \\
 n = 4: M_4(q) &= q^4 + 2,6q^3 + 3,8q^2 + 2,8q + 1; \\
 n = 5: M_5(q) &= q^5 + 2,5q^4 + 5,3q^3 + 5,46q^2 + 3,64q + 1; \\
 n = 6: M_6(q) &= q^6 + 3,73q^5 + 8q^4 + 10,3q^3 + 8,56q^2 + 4,18q + 1.
 \end{aligned}$$

Данные табл. 1 подтверждают выводы вводной части: колебательные системы (см. строки 2—4) за счет наличия небольшого перерегулирования обеспечивают существенно меньшее относительное время $\tau_{пп}$ переходных процессов в сравнении с биномиальной системой (строка 1).

После выбора на основе данных табл. 1 НПФ определение ЖПФ синтезируемой системы управления осуществляется заменой переменной (3). При этом следует иметь в виду, что время регулирования ЖПФ и время регулирования НПФ связаны соотношением $t_{пп} = \alpha \tau_{пп}$. Поэтому время регулирования проектируемой системы можно подкорректировать до требуемого значения выбором параметра α при преобразовании НПФ в ЖПФ. При известной ЖПФ последующий синтез системы управления осуществляется согласно строго формализованной процедуре алгебраического метода [11, 13].

3. Параметры и показатели быстродействующих НПФ

Последующие исследования показали, что за счет определенного выбора параметров колебательных звеньев возможно дальнейшее увеличение быстродействия систем управления. В основе нахождения новых НПФ быстродействующих систем лежит использование необходимых условий максимального быстродействия, сформулированных в работе [19] в форме следующей **теоремы**: линейная динамическая система четного порядка с передаточной функцией вида $W(p) = K/A(p)$, в которой перерегулирование не должно превышать заданное значение σ^* , а сигнал управления — ограничения $|u(t)| \leq u_{\max}$, может иметь минимальное время переходных процессов, определяемое с использованием зоны $\Delta = \sigma^*$, если

1) ее полюса, в общем случае комплексные, расположены на окружности

$$|p_1| = |p_2| = \dots = |p_n| = R, \quad (6)$$

радиус R которой выбирается из условия выполнения ограничения на значение сигнала управления;

2) расположение полюсов вдоль окружности обеспечивает системе перерегулирование, равное заданному значению

$$\sigma = \sigma^*. \quad (7)$$

Подчеркнем, что для некоторого класса систем условия теоремы являются не только необходимыми, но и достаточными условиями быстродействия. К данному классу, например, относятся системы с переходными процессами монотонного характера, для которых $\sigma = 0$ и,

соответственно, имеющие только действительные отрицательные полюсы [16, 17]. Для этих систем условие (6) и ограничение $|u(t)| \leq u_{\max}$ однозначно задают параметры K_0 , $T_0 = 1/R$ оптимальной передаточной функции

$$W(p) = K_0 / (T_0 p + 1)^n,$$

которой соответствует биномиальная НПФ.

Применяя условия теоремы к колебательным системам, указанным в табл. 1, отметим, что для систем с передаточной функцией (4) (вторая и третья строки) условие (6) выполняется ($p_i = 1/T_i = \beta_i = 1$), а условие (7) нарушается. Поэтому быстродействие данных систем можно увеличить, если для них соответствующим выбором значений коэффициентов демпфирования обеспечить выполнение равенства (7) — $\sigma = \sigma^* = 4,321\%$. Этот вывод подтверждают результаты моделирования систем, представленные во второй строке табл. 2.

Дополнительное увеличение быстродействия системы можно получить, если вместо колеба-

тельных звеньев с одинаковыми коэффициентами демпфирования использовать звенья с различными значениями ζ_i (см. строку 3 табл. 2). Примечательно, что последние колебательные системы, как правило, превосходят по быстродействию системы, описываемые передаточными функциями оптимальными по Г. С. Поспелову, А. А. Красовскому (строка 1). Исключения составляют только системы четвертого порядка. Результаты дополнительного исследования этих колебательных систем четвертого порядка представлены в табл. 3. При моделировании указанные в ней значения ζ_2 задавались изначально, а значения ζ_1 подбирались такими, чтобы система имела требуемое значение перерегулирования $\sigma^* = e^{-\pi} \cdot 100\% = 4,321\%$. Так как результаты табл. 3 получены при изменении коэффициентов демпфирования практически во всем возможном диапазоне значений $0 < \zeta_1, \zeta_2 \leq 1$, то они свидетельствуют, что быстродействие системы увеличивается при $\zeta_2 \rightarrow 1$ и, соответственно, максимальное быстродействие имеет динамическая система, описываемая передаточной функцией

$$W(q) = 1 / (q + 1)^2 (q^2 + 2\zeta q + 1) \quad (8)$$

при $\zeta = 0,46313$.

Несколько большее время переходных процессов $\tau_{\text{пп}} = 4,7432$ этой системы в сравнении с системой, оптимальной по Г. С. Поспелову, А. А. Красовскому ($\tau_{\text{пп}} = 4,57$), можно объяснить с использованием указанной теоремы различными значениями перерегулирования сравниваемых систем.

Аналогичным моделированием в системе компьютерной математики MathCAD 14 получены результаты строки 3 табл. 2 для нормированных передаточных функций пятого и шестого порядков.

На основе представленных данных при синтезе быстродействующих систем управления, допускающих наличие перерегулирования $\sigma \leq 4,321\%$, можно рекомендовать использование нормированных передаточных функций из табл. 2. Указанные в ней НПФ одного порядка относительно мало различаются как по времени переходных процессов, так и по перерегулированию. Однако из них более предпочтительными являются НПФ колебательных звеньев, имеющих различные значения коэффициентов демпфирования.

Таблица 2
Table 2

Параметры и показатели быстродействующих НПФ
Parameters and indicators of high-speed NTF

Вид НПФ, ее параметры	Показатели	n				
		2	3	4	5	6
Оптимальный по Г. С. Поспелову, А. А. Красовскому	$\tau_{\text{пп}}$ σ	4,38 5,00	4,07 0,49	4,57 4,73	5,71 0,00	6,22 5,00
Колебательный с $\sigma = 4,321\%$	$\tau_{\text{пп}}$ ζ	2,974 0,7071	3,9236 0,5916	4,9975 0,7411	5,8743 0,6799	6,6819 0,6134
Колебательный с $\sigma = 4,321\%$ и различными ζ_i	$\tau_{\text{пп}}$ ζ_1 ζ_2	2,974 0,7071	3,9236 0,5916	4,7432 0,4631 0,9999	5,4375 0,3207 0,9999	6,1824 0,2490 0,920

Таблица 3
Table 3

Результаты моделирования систем 4-го порядка
Results of modeling systems of the 4th order

	ζ_1	ζ_2	$\zeta_1 + \zeta_2$	$\sigma, \%$	$t_{\text{пп}}$
1	0,96487	0,5	1,46487	4,321004	4,7949
2	0,873915	0,6	1,473915	4,32108	4,9184
3	0,74108	0,74108	1,48216	4,32118	4,9975
4	0,68038	0,8	1,48038	4,32136	4,9814
5	0,57107	0,9	1,47107	4,32101	4,8870
6	0,47340	0,99	1,46340	4,32117	4,7570
7	0,46313	0,9999	1,46303	4,32126	4,7432

4. Синтез быстродействующих линейных систем управления

Определив желаемую ПФ быстродействующей системы и соответствующие ей полюсы с использованием метода модального управления, относительно легко осуществить синтез регулятора, обеспечивающего минимальное время переходных процессов проектируемой системе. Необходимо подчеркнуть, что данный метод в отличие от алгебраического метода синтеза применим ко всем объектам с ПФ (2): как минимально-фазовым, так и не минимально-фазовым, как содержащим нули, так и нет. Изложим его в варианте, вытекающем непосредственно из работ [16, 19].

Для обеспечения требуемого порядка n_a астатизма проектируемой системе в качестве нового управления $U(t)$ будем рассматривать сигнал, подаваемый на вход дополнительного n_a -кратного интегратора, включенного последовательно с исходным объектом. В этом случае "расширенный" объект управления будет описываться ПФ:

$$W(p) = \frac{L[x(t)]}{L[U(t)]} = \frac{B_m(p)}{p^{n_a} A_n(p)} \equiv \frac{B_m(p)}{A_N(p)}, \quad (9)$$

$$N = n + n_a.$$

Используя физические сведения об управляемом объекте или теорию решения задач о построении динамической реализации системы, описанию объекта в форме передаточной функции (9) поставим в соответствие его математическое описание в пространстве состояний [20]:

$$\dot{Z}(t) = A_1 Z(t) + B_1 U(t), \quad (10)$$

где $Z(t)$ — вектор фазовых координат объекта в выбранном пространстве; A_1, B_1 — матрицы его параметров, имеющие размерности $N \times N, N \times 1$.

В целях решения сформулированной задачи синтеза методом модального управления проведем преобразование фазовых координат объекта $Z(t) = DX(t)$ с использованием такой невырожденной матрицы D , при которой описание объекта принимает каноническую форму Фробениуса (1) с матрицами следующей структуры:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{N-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Как известно, матрица перехода D , обладающая указанным свойством, может быть найдена разными способами. Один из способов основан на использовании матриц управляемости M_y, M_{ly} объекта в новом и старом базисах [20]:

$$D^{-1} = \|B, AB, A^2B, A^3B\| \times \\ \times \|B_1, A_1B_1, A_1^2B_1, A_1^3B_1\|^{-1} = M_y M_{ly}^{-1}. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что для полностью управляемого объекта (10) эта матрица является неособенной — $\det D \neq 0$.

Подчеркнем, что, во-первых, компоненты вектора состояния X объекта в канонической форме Фробениуса имеют ясный математический и физический смысл:

$$x_1(t) = x_z - x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t), \quad x_3(t) = \dot{x}_2(t), \dots, \\ \dots, x_N(t) = \dot{x}_{N-1}(t)$$

— смысл отклонения выходной переменной объекта от заданного режима и его производных. Во-вторых, данное каноническое описание объекта можно представить в форме дифференциального уравнения N -го порядка:

$$A(D)x(t) = bU(t), \quad (12)$$

где $A(D) = D^N + a_{2N-1}D^{N-1} + a_{2N-2}D^{N-2} + \dots + \dots + a_1D + a_0$ — полином от оператора дифференцирования $D = d/dt$.

Определим управление объектом (12) таким образом, чтобы характеристический полином замкнутой системы имел представление

$$G(p) = p^N + \alpha_{N-1}p^{N-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0 = \\ = \prod_{i=1}^N (p - p_i) \quad (13)$$

с заданными корнями p_i (или, что равносильно, с заданными коэффициентами α_i).

Задача модального управления (12), (13) решается известным методом [20]:

$$U(t) = \frac{-1}{b} \sum_{i=0}^{N-1} (\alpha_i - a_i) x^{(i)}(t) = \\ = - \sum_{i=1}^N k_i x_i(t) = -KX(t), \quad k_{i+1} = \frac{\alpha_i - a_i}{b}. \quad (14)$$

Таким образом, задача модального управления объектом (10) за счет преобразования фазовых координат, приводящего матрицу A_1 системы к канонической форме Фробениуса, сводится к задаче управления (12), (13), имею-

шей решение (14). На этом основании предлагается метод синтеза регулятора с минимальным временем переходных процессов, содержащий следующие операции (процедуры).

1. С использованием данных табл. 1 и 2 для синтезируемой системы управления объектом (9) порядка $N = n + n_a$, обеспечивающей заданное значение перерегулирования $\sigma = \sigma^*$, выбирается подходящая НПФ, характеризуемая коэффициентами демпфирования ζ_1, ζ_2 (они определяют желаемые полюса системы).

2. По значениям ζ_i рассчитываются коэффициенты $A_i, i = 1, \dots, N - 1$, нормированного характеристического полинома быстродействующей системы

$$(q+1)^{N-2k} \prod_{i=1}^k (q^2 + 2\zeta_i q + 1) = q^N + A_{2N-1} q^{N-1} + \dots + A_1 q + 1$$

и далее коэффициенты желаемого (ненормированного) полинома (13):

$$G(p) = p^N + \alpha_{N-1} p^{N-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0 = p^N + \frac{A_{N-1}}{\alpha} p^{N-1} + \dots + \frac{A_1}{\alpha^{N-1}} p + \frac{1}{\alpha^N},$$

где α — коэффициент связи переменных преобразования Лапласа $p = q/\alpha$ и, соответственно, реального и нормированного времени $t = \alpha t$.

3. По ПФ (9) определяем описание объекта в пространстве состояния (10).

4. Вычисляем матрицу перехода D , связывающую матричное описание исходного объекта (10) с ее каноническим представлением Фробениуса. Данная матрица может быть найдена, например, с использованием соотношения (11).

5. В соответствии с формулами (14) находим матрицу-строку K коэффициентов модального регулятора в преобразованном базисе:

$$U(X) = -\sum_{i=1}^N k_i x_i = -KX, \quad (15)$$

$$k_i = (A_{i-1}/\alpha^{N-(i-1)} - a_{i-1})/b.$$

6. Возвращаясь к исходным фазовым координатам z_i , определяем для объекта управления (10) искомый закон управления:

$$U(Z) = -\bar{K}Z, \quad \bar{K} = KD^{-1}, \quad (16)$$

обеспечивающий максимальное быстродействие проектируемой системе. Заметим, что согласно уравнениям (15), (16) элементы матрицы \bar{K} являются функциями коэффициента α .

7. Проверка правильности синтеза регулятора осуществляется расчетом собственных чисел матрицы $A_1 - B_1 \bar{K}$, которые должны совпадать с корнями характеристического полинома системы (см. п. 1), или нахождением характеристического полинома указанной матрицы, который должен равняться ЖПФ (13).

8. Моделированием замкнутой системы управления (10), (16) определяем значение коэффициента α , обеспечивающее отработку задания x_z со значениями сигнала управления, равными или меньшими, чем u_{\max} .

Пример. Пусть передаточная функция объекта имеет вид

$$W_0(p) = 1/(0,1p^3 + 0,8p^2 + 1,7p + 1), \quad (17)$$

а управление подчиняется ограничению $|u(t)| \leq u_{\max} = 10$ [11]. Требуется определить линейный регулятор с максимальным быстродействием, обеспечивающий системе переходный процесс с перерегулированием $\sigma^* = \Delta = 4,321\%$ и нулевой статической ошибкой регулирования.

Выполняем процедуры предложенного метода синтеза.

1. Так как ПФ объекта третьего порядка (17) не содержит нулевой полюс, то для того чтобы статическая ошибка проектируемой системы управления была равна нулю, положим порядок астатизма $n_a = 1$, и тогда $N = n + n_a = 3 + 1 = 4$. Поэтому в дальнейшем используется НПФ колебательного звена четвертого порядка (8), параметры и показатели качества которого указаны в табл. 2.

2. При коэффициенте демпфирования $\zeta^* = 0,46313$ (см. табл. 2) рассчитываем коэффициенты $A_i, i = 1, 2, 3$, нормированного характеристического полинома $(q+1)^2(q^2 + 2\zeta^*q + 1) = q^4 + A_3q^3 + A_2q^2 + A_1q + 1$ быстродействующей системы:

$$A_3 = 2(1 + \zeta^*) = 2,92626;$$

$$A_2 = 2(1 + 2\zeta^*) = 3,85252;$$

$$A_1 = 2(1 + \zeta^*) = 2,92626.$$

Далее находим коэффициенты желаемого (ненормированного) характеристического полинома (13):

$$G(p) = p^4 + \alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 = p^4 + \frac{A_3}{\alpha} p^3 + \frac{A_2}{\alpha^2} p^2 + \frac{A_1}{\alpha^3} p + \frac{1}{\alpha^4}. \quad (18)$$

3. По передаточной функции "расширенного" объекта

$$W_0(p) = 1/p(0,1p^3 + 0,8p^2 + 1,7p + 1)$$

порядка $N = n + n_a = 4$ определяем его описание в пространстве состояний. С учетом того, что интегратор, обеспечивающий астатизм системы, стоит перед исходным объектом (17) и описывается уравнением $\dot{u}(t) = U(t)$, введем следующие фазовые координаты $z_i(t)$ для "расширенного" объекта:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x_z - x(t), & z_2(t) &= \dot{z}_1(t), \\ z_3(t) &= \dot{z}_2(t), & z_4(t) &= u(t). \end{aligned}$$

В данном фазовом пространстве матрицы A_1, B_1 объекта принимают вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & -17 & -8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

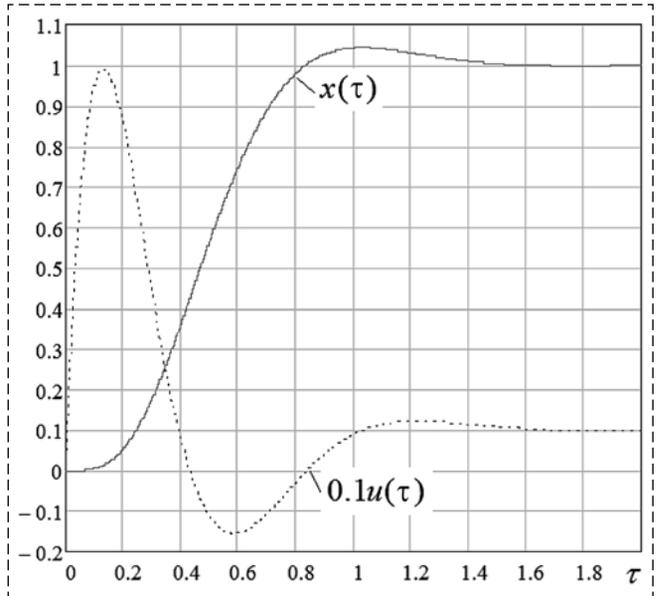
4. Вычисляем матрицу перехода D с использованием матриц управляемости M_y, M_{1y} объекта в новом и старом базисах (11):

$$D^{-1} = M_y M_{1y}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ -1 & -1,7 & -0,8 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & 17 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. В соответствии с формулами (15), (16) при $\alpha = 0,156$ находим вектор коэффициентов модального (одновременно быстродействующего) регулятора $KK = (158,093 \ 57,788 \ 5,523 \ 10,757)$. Проверка подтвердила, что при этом замкнутая система имеет желаемый характеристический полином (18).

При данных параметрах регулятора, как показало дальнейшее моделирование системы (см. рисунок), обеспечивается максимальное по модулю значение управляющего сигнала, равное 10 при обработке задания $x_z = 1$.



Переходные процессы быстродействующей системы четвертого порядка

Transients responses of a high-speed system of the fourth order

Из данного рисунка также следует, что исследуемая система управления четвертого порядка имеет нулевую статическую ошибку, заданное перерегулирование $\sigma = 4,321\%$ и время переходных процессов $\tau_{\text{пп}} = 0,738$, которое меньше, чем в системе [11] ($\tau_{\text{пп}} = 0,878$). Данные результаты полностью отвечают исходным данным синтеза быстродействующего регулятора.

Список литературы

1. Ловчаков В. И. К проблеме быстродействия систем управления по одной (нескольким) координатам // Системы управления электротехническими объектами. Тр. 3-й Всеросс. Науч.-практ. конф. Тула, Известия ТулГУ, 2005. С. 111–113.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961. 302 с.
3. Атанс М., Фалб П. Л. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
4. Техническая кибернетика. Теория автоматического управления. Кн. 3. Часть II. Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регулирования / Под ред. проф. В. В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1969. 368 с.
5. Иванов В. А., Фалдин Н. В. Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1981. 336 с.
6. Ключев А. С., Колесников А. А. Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.
7. Колесников А. А., Гельфгат А. Г. Проектирование многокритериальных систем управления промышленными объектами. М.: Энергоатомиздат, 1993. 304 с.
8. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Гибридная схема решения задачи линейного быстродействия на основе формализма полиэдральной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7. С. 3–9.

9. Каюмов О. Р. Глобально управляемые механические системы. М.: Физматлит, 2007. 168 с.

10. Ловчаков В. И. Функции переключения оптимального по быстродействию регулятора для четырехкратного интегратора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 9. С. 3–5.

11. Ким Д. П. Синтез оптимальных по быстродействию непрерывных линейных регуляторов // АиТ. 2009. № 3. С. 5–16.

12. Ким Д. П. Синтез неминимально-фазовых систем управления с заданным временем регулирования // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 4. С. 5–10.

13. Ким Д. П. Алгебраический метод синтеза линейных непрерывных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 9–15.

14. Ким Д. П. Определение желаемой передаточной функции при синтезе систем управления алгебраическим методом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 5. С. 15–21.

15. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М.: Наука, 1987. 304 с.

16. Пупков К. А. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т. / К. А. Пупков. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. Т. 2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления. 736 с.

17. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. М.: Гостехиздат, 1962.

18. Рубинчик А. М. Приближенный метод оценки качества регулирования в линейных системах. Сборник: Устройства и элементы теории автоматики и телемеханики. М.: Машгиз, 1952.

19. Ловчаков В. И. Необходимые условия максимального быстродействия линейных динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. № 6. С. 376–382.

20. Александров А. Г. Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989. 264 с.

The Solution of a Problem of Speed of Response on Output Coordinate for Linear Dynamic Systems

V. I. Lovchakov, lovvi50@mail.ru, O. A. Shibyakin, yutiop@gmail.com,
Tula State University, Tula, 300600, Russian Federation

Corresponding author: Lovchakov Vladimir I., Full Professor,
Tula State University, department of electrical engineering and electrical equipment,
Tula, 300600, Russian Federation, e-mail: lovvi50@mail.ru

Accepted on May 15, 2019

Abstract

The solution of the so-called problem of speed of response in one coordinate, which has important theoretical and practical importance, is investigated. It is formulated with reference to linear one-dimensional high-order control objects described by a system of ordinary differential equations in a certain phase space. The transient time t_{mn} of the system designed is understood in a sense of the classical control theory in reference to one (output) coordinate of the object and is determined by using the zone $\Delta = \sigma^* = 4.321\%$, which equals the given (desirable) value of the overshoot of the system synthesized. This overshoot corresponds with the speed of response oscillating second-order element with a damping coefficient $\zeta = \sqrt{2}/2 = 0,7071$. It is indispensable to mention here that the equation $\Delta = \sigma$ is one of the necessary conditions for the maximum speed of response of the system with the oscillating character of transient processes. In accordance to this for the task of the speed of response by one coordinate can be described by the following generalized formulation: one must find the linear algorithm of the feedback signal, which provides a preset order of the astaticism n_a for the closed-loop control system and converts the control object from a zero state into a final state, which is determined by the constant signal of the input, with a minimal time value of the transient processes of the system t_{mn} and the preset value of the overshoot $\sigma \leq \sigma^*$ while fulfilling the constraint of the control signal $|u(t)| \leq u_{max}$. Nowadays the task mentioned is approximately solved by the algebraic method of the synthesis of linear control systems with the determination of a desirable transfer function of the designed closed-loop system based on model normalized transfer functions (NTF). In the works by Kim D. P. there was carried out the analysis of four types of normalized transfer functions characterized by the increased speed of response. In this work two additional types of normalized transfer functions are suggested, in comparison with mentioned NTF they have the increased speed of response in case of the preset value of the overregulation $\sigma^* = 4.321\%$. On their basis and using the methodology of the modal control the method of the synthesis of the controller is suggested; this method ensures the transient time of the designed system to be close to the minimum in case of the preset constraint of the overregulation and the value of the control signal. It needs to be emphasized that in contrast to the algebraic method of the synthesis, this method is applied to a wider range of control objects: as to minimal-phased objects as to non-minimum-phased ones; as to the objects containing zeros as to those without them. The method is illustrated by an example of synthesis of control system speed of response of the fourth order, containing the results of its modeling.

Keywords: linear one-dimensional object, criterion of speed of response, overregulation, astaticism, the pole of the optimal system, modal control

For citation:

Lovchakov V. I., Shibyakin O. A. The Solution of a Problem of Speed of Response on Output Coordinate for Linear Dynamic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 9, pp. 532—541.

DOI: 10.17587/mau.20.532-541

References

1. **Lovchakov V. I.** *Sistemy upravleniia elektrotekhnicheskimi ob'ektami: Trudy 3-i Vserossiiskoi nauchno-praktich. konf.* [Control systems of electrical objects: proceedings of the 3d All-Russian scientific-practical conference], Tula, *Izvestiia TulGU*, 2005, pp. 111—113 (in Russian).

2. **Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.** *Mathematical theory of optimal processes*, Moscow, Fizmatlit Publ., 1961, 302 p (in Russian).

3. **Atans M., Falb P. L.** *Optimal control*, Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968, 764 p (in Russian).

4. **Solodovnikov V. V.** ed. *Control theory*, vol. 3, part 2. The theory of nonstationary, non-linear and self-adjusting control systems, Moscow, Mashinostroenie Publ., 1969, 368 p (in Russian).

5. **Ivanov V. A., Faldin N. V.** *The theory of optimal control systems*, Moscow, Nauka Publ., 1981, 336 p (in Russian).

6. **Kliuev A. S., Kolesnikov A. A.** *The optimization of control systems by speed of response*, Moscow, Energoizdat Publ., 1982, 240 p (in Russian).

7. **Kolesnikov A. A., Gel'fgat A. G.** *The design of multiobjective control systems of industrial facilities*, Moscow, Energoatomizdat Publ., 1993, 304 p (in Russian).

8. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 7, pp. 3—9 (in Russian).

9. **Kayumov O. R.** *Globally controlled mechanical systems*, Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 168 p (in Russian).

10. **Lovchakov V. I.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no.9, pp. 3—5 (in Russian).

11. **Kim D. P.** *AiT*, 2009, no.3, pp. 5—16 (in Russian).

12. **Kim D. P.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2010, no. 4, pp. 5—10 (in Russian).

13. **Kim D. P.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2011, no. 1, pp. 9—15 (in Russian).

14. **Kim D. P.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2011, no. 5, pp. 15—21 (in Russian).

15. **Krut'ko P. D.** *The inverse tasks of the dynamics of controlled systems. Linear models*, Moscow, Nauka, 1987, 304 p (in Russian).

16. **Pupkov K. A.** *Methods of classical and modern control theory: 3 vol.*, Moscow, MG TU im. N. E. Bauman Publ., 2000, 736 p (in Russian).

17. **Krasovskii A. A., Pospelov G. S.** *and technical cybernetics fundamentals*, Moscow, Gostekhizdat, 1962 (in Russian).

18. **Rubinchik A. M.** *Approximate method of the quality evaluation of the control process in linear systems, Ustroistva i elementy teorii avtomatiki i telemekhaniki*, Moscow, Mashgiz, 1952 (in Russian).

19. **Lovchakov V. I.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, no. 6, pp. 376—382 (in Russian).

20. **Aleksandrov A. G.** *Optimal and adaptive systems*, Moscow, Vysshiaia shkola, 1989, 264 p (in Russian).



25—27 мая 2020 г. в Санкт-Петербурге
на базе ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор"
состоится



XVII Санкт-Петербургская Международная конференция по интегрированным навигационным системам

Тематика конференции

- Инерциальные датчики, системы навигации и ориентации;
- Интегрированные системы навигации и управления движением;
- Глобальные навигационные спутниковые системы;
- Средства гравиметрической поддержки навигации.

В рамках каждого направления рассматриваются:

- схемы построения и конструктивные особенности;
- методы и алгоритмы;
- особенности разработки и применения для различных подвижных объектов и условий движения (аэрокосмические, морские, наземные, подземные);
- испытания и метрология.

Контактная информация:

Тел.: + 7 (812) 499 82 10 + 7 (812) 499 81 57
Факс: + 7 (812) 232 33 76 E-mail: icins@eprib.ru