

Е. Я. Рубинович, д-р техн. наук, проф., rubinvch@ipu.ru,
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

О расширении класса программных управлений уклонения в простейшей двухкритериальной игре преследования двух целей

Рассмотрены постановка и решение двухкритериальной игры преследования-уклонения на плоскости одного преследователя против двух целей, одна из которых является ложной. Ложная цель используется для отвлечения преследователя, позволяя истинной цели (в процессе отвлечения) максимизировать минимально возможное расстояние до преследователя. Специфика преследователя состоит в том, что он обладает круговой зоной классификации радиуса R , внутри которой он имеет возможность мгновенно классифицировать цель как ложную или истинную. Игра состоит в том, что преследователь минимизирует время, необходимое для сближения с одной из целей до расстояния, не превышающего R (R -встреча), а цели, действуя согласованно, максимизируют минимальное расстояние между преследователем и оставшейся целью. Игра продолжается до момента R -встречи преследователя с первой (ложной) целью, т. е. до момента классификации ложной цели. Предполагается, что то, что первая цель является ложной априори преследователю не известно. Стратегия использования ложной цели как раз и состоит в том, чтобы выпустить ее для отвлечения преследователя от истинной цели. В реальности ложная цель представляет собой мобильный беспилотный аппарат, управление которым осуществляется программно с помощью БЦВМ. В классе программных управлений рассматриваемая постановка исследовалась в 1984 г. М. Н. Ивановым и Е. П. Масловым. Возникает естественный вопрос, что даст расширение класса программных управлений ложной целью до класса позиционных, т.е. до класса управлений с обратной связью. Такой вопрос вполне уместен в связи с большим прогрессом в развитии микропроцессорной техники и повышением производительности БЦВМ, что дает возможность использовать все более сложные алгоритмы управления автономными подвижными объектами. В данной статье дается отрицательный ответ на поставленный выше вопрос, а именно, показывается, что расширение класса программных управлений ложной целью не улучшает качества управления. Доказывается, что в рассматриваемой игре имеет место равновесие по Нэшу в программных стратегиях игроков.

Ключевые слова: игра преследования-уклонения, мобильная ложная цель, программное управление, позиционное управление, равновесие по Нэшу

Введение

Первые постановки дифференциальных игр преследования с ложной целью относятся к началу 70-х годов прошлого века [1]. Эти игры подразделяются на дифференциальные игры совместного и поочередного преследования. При совместном преследовании в задачу преследователя входит сближение с группой целей и используется терминальный критерий типа "промах" (по истинной цели) [1, 4, 5]. При поочередном преследовании используется критерий типа "время". Требуется переловить все цели за минимальное время или минимизировать время поимки именно истинной цели [2, 3, 6]. При этом информация о том, с какой вероятностью та или иная цель является истинной, может быть задана априорно.

В последнее время активно развиваются постановки и решения задач, описывающих различные эпизоды динамического взаимодействия трех игроков типа Атакующий—Цель—Защитник (Attacker—Target—Defender или Missile—Target—Defender, соответственно ATD-или MTD-игры), в которых коалиция из двух

игроков (убегающей цели и мобильного защитника) выступает против атакующего преследователя [7—23]. В качестве защитника подразумевается ударный беспилотный аппарат или мобильная ложная цель. В этих постановках атакующий игрок стремится поймать (поразить) убегающую цель, в то время как задача мобильного защитника — успеть перехватить атакующего игрока. В упомянутых выше работах [7—23] постановки игр рассматриваются на плоскости, а задачи отличаются динамикой игроков (простые движения, движения с ограничениями на разворот и т. п.), критериями ("время", "промах") и условиями информируемости участвующих в конфликте сторон. Условия информируемости, в свою очередь, накладывают ограничения на классы стратегий (управлений) игроков (позиционные, программные, кусочно-программные и т. п.). В частности, в работе [22] рассматривается MTD-игра в программных стратегиях игроков при отсутствии у коалиции цель—защитник априорной информации о дистанции до преследователя.

В реальности выбор управления защитником в классе программных управлений обу-

словлен двумя причинами. Первая состоит в том, что возможности для получения объективной текущей информации о преследователе с борта защитника сильно затруднены или вообще отсутствуют в силу его чисто конструктивных особенностей. Второй причиной является, как правило, относительная "примитивность" БЦВМ-защитника. "Взрывной" прогресс в развитии микропроцессорной техники, который наблюдается в последние годы, позволяет ставить вопрос о разработке более сложных в интеллектуальном плане алгоритмов управления автономными подвижными объектами, в частности, переходить от программных управлений к позиционным.

В настоящей статье рассматривается плоская двухкритериальная АТД-игра одного преследователя (атакующего игрока) против двух целей, одна из которых является ложной и играет роль защитника. Задача защитника — отвлечь на себя атакующего игрока, дав тем самым истинной цели возможность совершить маневр уклонения, максимизировав минимально возможное расстояние до преследователя, которое реализуется в процессе его сближения с ложной целью. Конструктивные особенности атакующего игрока таковы, что он обладает круговой зоной классификации радиуса R , внутри которой он имеет возможность мгновенно классифицировать цель как ложную или истинную. Игра состоит в том, что преследователь минимизирует время, необходимое для сближения с одной из целей до расстояния, не превышающего R (R -встреча), а цели, действуя согласованно, максимизируют минимальное расстояние между преследователем и оставшейся целью. Игра продолжается до момента R -встречи преследователя с первой (ложной) целью, т. е. до момента классификации ложной цели (время до этого момента атакующий игрок минимизирует). Предполагается, что тот факт, что первая по порядку преследования цель является ложной, априори преследователю не известен.

При программных управлениях ложной целью подобная постановка рассматривалась в работе [23]. В свете вышесказанного вполне уместен вопрос: что даст расширение класса программных управлений ложной целью до класса позиционных, т. е. до класса управлений с обратной связью?

В данной работе дается отрицательный ответ на этот вопрос, а именно, показывается, что расширение класса программных управлений

ложной целью не улучшает качества управления. Доказывается, что в рассматриваемой игре имеет место равновесие по Нэшу в программных стратегиях игроков.

Постановка задачи

Три игрока: преследователь (атакующий игрок) P и две цели E_1 и E_2 , обладавая ограниченными линейными скоростями, перемещаются на плоскости, имея возможность в каждый момент изменять направления своих движений (совершают так называемые "простые движения", рис. 1).

Уравнения относительного движения (здесь и далее $i = 1, 2$)

$$\dot{Z}_i(t) = v_i(t) - u(t), Z_i(0) = Z_i^0, \quad (1)$$

где $Z_i(t)$ — двумерный вектор, направленный от P к цели E_i в текущий момент t ; $u(t)$, $v_i(t)$ — двумерные векторы скоростей (управлений) игроков P и E_i соответственно, временные реализации которых подчинены следующим ограничениям:

$$P: |u(t)| \leq 1, E_i: |v_i(t)| \leq \beta < 1. \quad (2)$$

Игрок P осуществляет R -встречу с целью E_1 , решая задачу преследования с критерием (платежным функционалом)

$$G_1 = T \rightarrow \min_u, \quad (3)$$

при начальных и терминальных условиях

$$0 \leq |Z_1(T)| = R \leq |Z_1^0| \leq |Z_2^0|. \quad (4)$$

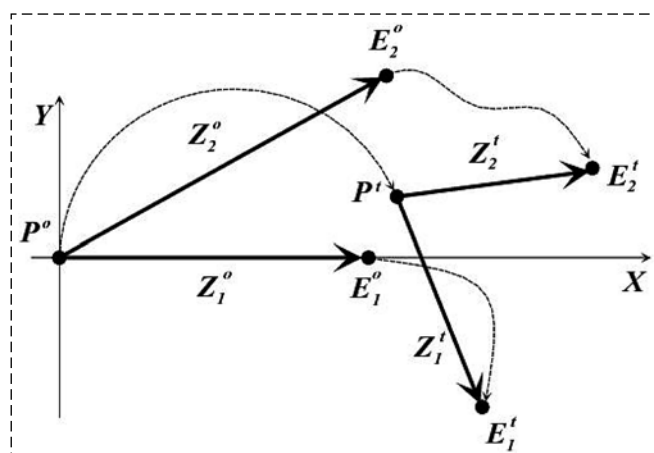


Рис. 1. Геометрия движения игроков

Fig. 1. The players motion geometry

Коалиция целей решает задачу уклонения
с критерием

$$G_2 = \min_t |Z_2(t)|^2 \rightarrow \min_{v_1, v_2}, \quad t \leq T. \quad (5)$$

Здесь T — время окончания игры.

Решение игры в программных стратегиях

В предположении о программности управления цели E_1 , которое известно игрокам P и E_2 , был найден оптимальный ответ коалиции $\{E_1, E_2\}$ в смысле критерия G_1 на интервале $[0, T]$ [23]. А именно, при любом программном управлении $v_1(t)$ игрока E_1 для преследователя P оптимальным является движение с максимальной скоростью в точку R -встречи с целью E_1 . Направления движений игроков зависят от начального положения E_2^0 цели E_2 (здесь и далее верхними индексами 0 и T отмечены положения игроков в начальный и конечный моменты времени). Область возможных начальных положений E_2^0 цели E_2 (верхняя полуплоскость в декартовой системе координат XOY , начало O которой совпадает с начальным положением P^0 преследователя P (т. е. $O = P^0$), а ось OX направлена вдоль линии визирования $P^0 E_1^0$ цели E_1 в начальный момент времени) разбивается двумя параллельными прямыми L_1, L_2 на три зоны: A, B и C (детали см. в работе [23]). В зоне A игра физического смысла не имеет. В случае $E_2^0 \in B$ преследователь P движется по прямой $P^0 P^T$, касательной к овалу Декарта (в полярной системе координат $\{\rho, \varphi\}$ с полюсом O и полярной осью OX , отсчет φ — по часовой стрелке):

$$(1 - \beta^2)\rho^2 + 2(\beta^2 R - x_1^0 \cos \varphi)\rho + (x_1^0)^2 - \beta^2 R^2 = 0, \quad (6)$$

который дает описание геометрического места точек R -встречи игроков P и E_1 (рис. 2). Здесь x_1^0 — абсцисса начального положения E_1^0 цели E_1 , т. е. $x_1^0 = |Z_1^0|$.

Условие касания прямой P^0P^T овала Декарта (P^0P^T — направление движения игрока P) имеет вид

$$\cos \varphi_0 = \beta^2 \sigma_0 + \sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta^2 \sigma_0^2)}, \quad (7)$$

где $\sigma_0 = R/x_1^0 < 1$.

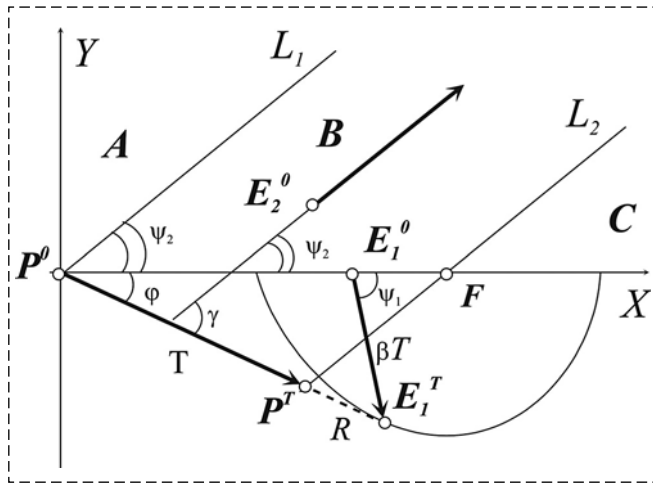


Рис. 2. Решение игры в программных стратегиях
Fig. 2. The game solution with open-loop controls

Углы ψ_1 и ψ_2 разбегания целей (вдоль прямых с максимально возможными скоростями, равными β) задаются следующими равенствами:

- для цели E_1 :

$$\cos \psi_1 = \beta \sigma_0; \quad (8)$$

- для цели E_7 :

$$\psi_2 = \gamma - \varphi, \quad (9)$$

где $\varphi = \varphi_0$ из соотношения (7), а γ такое, что $\cos \gamma = \beta$.

Радиус-вектор $P^0 E_1^T$ терминальной точки E_1^T имеет длину

$$\rho_T = \sqrt{\frac{1 - \beta^2 \sigma_0^2}{1 - \beta^2}}. \quad (10)$$

Время существования игры

$$T = \rho_T - R. \quad (11)$$

В зоне C цель E_2 уклоняется вдоль прямой, проходящей через точки P^T и E_2^0 .

Позиционный выбор управлений

Во введении был поставлен вопрос: "Может ли коалиция целей $\{E_1, E_2\}$ улучшить значение своего платежного функционала G_2 , перейдя к позиционным управлениям игрока E_1 ?" и был анонсирован отрицательный ответ. Для обоснования этого ответа обратим внимание на то, что игрок P и коалиция $\{E_1, E_2\}$ решают свои задачи с разными критериями. Следова-

тельно, тот факт, что отказ от программности не улучшает значения критериев G_1 и G_2 , равносильно тому, что в задаче имеет место равновесие по Нэшу на траекториях, удовлетворяющих (6)–(11), т. е. выполняются условия:

а) игрок P не может улучшить свой платежный функционал G_1 при условии, что игроки E_1 и E_2 движутся оптимально в соответствии с (6)–(11);

б) коалиция $\{E_1, E_2\}$ не может улучшить G_2 , если P избирает стратегию преследования, соответствующую (6)–(11).

Условие а) выполняется в силу того, что игрок P движется оптимально при программном движении E_1 , что соответствует (6)–(11). Далее показывается, что условие б) также выполняется.

Действительно, игрок P выбирает свое управление позиционно. Позиционный выбор означает, что в текущий момент времени t , принимая момент t за начальный, игрок P решает задачу (1)–(5) в предположении программности последующего движения игрока E_1 , т. е. считая, что с этого момента t игрок E_1 будет двигаться оптимально, а именно, под углом $\psi_1(t)$ к вектору $Z_1(t)$ в соответствии с (8) (где σ_0 заменяется на $\sigma_t \triangleq R/|Z_1(t)| \leq R$). Из этого следует, что управление $u(t)$ игрока P в каждый момент времени t направлено под углом $\varphi(t)$ к вектору $Z_1(t)$ (где $\varphi(t)$ из соотношения (7) с заменой φ_0 на $\varphi(t)$ и σ_0 на σ_t), т. е.

$$\cos \varphi(t) = \beta^2 \sigma_t + \sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta^2 \sigma_t^2)}. \quad (12)$$

Замечание 1. Заметим, что вид максимизируемого функционала $\min_t Z_2^2(t)$ таков, что в некоторый момент времени θ функция $Z_2^2(t)$ достигает минимума по t , а после момента θ оптимальными уже будут любые траектории, на которых $Z_2^2(t) \geq Z_2^2(\theta)$. Таких траекторий бесконечно много. Далее будет показано, что достаточным условиям оптимальности удовлетворяют только траектории движения вдоль прямых, т. е. при $v_i = \text{const}$, $u = \text{const}$, причем этот факт не зависит от вида терминального условия в момент θ . Следовательно, можно считать функцию $Z_2^2(t)$ гладкой в точке θ , откуда

$$\frac{dZ_2^2(t)}{dt} = 2Z_2(t) \cdot \frac{dZ_2(t)}{dt} = 0, \quad t = \theta. \quad (13)$$

Здесь и далее точка между векторами обозначает скалярное произведение. Поэтому мо-

мент θ можно определить как момент окончания игры для зоны B , в который $0 < t \leq \theta$, а выбор управления $u(t)$ в соответствии с соотношением (12) обеспечивает траекторию следующей R -встречи.

Изложенное выше Замечание 1 позволяет сформулировать на отрезке $[0, \theta]$ следующую вспомогательную игру при позиционном управлении игрока P , считая все векторы вектор-столбцами и выбирая для упрощения масштаб $R = 1$:

- уравнения движения

$$\dot{Z}_i(t) = v_i(t) - u(t), \quad Z_i(0) = Z_i^0, \quad i = 1, 2; \quad (14)$$

- ограничения на управления

$$|v_i(t)| \leq \beta < 1, \quad |u(t)| = 1; \quad (15)$$

- фазовое ограничение

$$u(t) \cdot Z_1(t) = \beta^2 + \sqrt{(1 - \beta^2)(Z_1^2(t) - \beta^2)}; \quad (16)$$

- терминальное условие (см. (13))

$$Z_2(\theta) \cdot \dot{Z}_2(\theta) = 0; \quad (17)$$

- критерий

$$G = -Z_2^2(\theta) \rightarrow \min_{v_1, v_2} \max_u. \quad (18)$$

В ограничении (16) скалярное произведение $u(t) \cdot Z_1(t) = |Z_1(t)| \cos \varphi(t)$, где угол $\varphi(t)$, отсчитываемый от вектора $Z_1(t)$ к вектору $u(t)$, положителен.

Теорема 1. Решение задачи в постановке (14)–(18) совпадает с решением задачи (1)–(5) вплоть до момента θ . Иными словами, движения игроков происходят вдоль прямых под углами $\varphi_0, \psi_1, \psi_2, \gamma$ (рис. 2).

Доказательство основано на достаточных условиях Кротова для задач с критериями типа

$$G = F(Z(0), Z(\theta)) \rightarrow \min_{v \in V_v(t)} \max_{u \in V_u(t, Z(t))}, \quad t \in [0, T],$$

для систем вида $\dot{Z}_i = f_i(t, Z, u, v)$, где $f_i(\cdot)$ — кусочно-гладкая функция [24, стр. 36].

Решение игры (1)–(5), удовлетворяющее (6)–(11), назовем *предполагаемым*. Согласно методике работы [24] выберем функцию Кротова ϕ , например, в виде

$$\phi = \lambda_1(t) \cdot Z_1 + \lambda_2(t) \cdot Z_2 + C(t) \quad (19)$$

с неопределенными пока функциями $\lambda_i(t)$, $C(t)$. Тогда, следуя методу Кротова, находим в нашем случае

$$\Phi = \Phi(t, Z, u, v) \triangleq \sum_i \phi'_{Z_i} f_i + \phi'_t = \lambda_1 \cdot (v_1 - u) + \\ + \lambda_2 \cdot (v_2 - u) + \dot{\lambda}_1 \cdot Z_1 + \dot{\lambda}_2 \cdot Z_2 + \dot{C} \rightarrow \min_{v_1, v_2} \max_{u, Z}$$

Для сокращения записи здесь и далее аргумент t опущен.

В функции Φ управления u и v_i разделяются, не входят они одновременно и в ограничения. По этой причине функцию Φ можно независимо максимизировать по v_i и минимизировать по u . Максимум Φ , при учете ограничений (15), реализуется при

$$v_1 = \beta \lambda_1 |\lambda_1|^{-1}, v_2 = \beta \lambda_2 |\lambda_2|^{-1}. \quad (20)$$

Обозначим

$$D \triangleq \max_{v_1, v_2} \Phi = \beta(|\lambda_1| + |\lambda_2|) - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot u + \\ + \dot{\lambda}_1 \cdot Z_1 + \dot{\lambda}_2 \cdot Z_2 + \dot{C} \rightarrow \min_{u, Z}$$

где $Z = (Z_1, Z_2)$. Здесь, в силу фазового ограничения (16) и ограничения (15), управление u является заданной функцией фазовой координаты Z_1 , т. е. $u = u(Z_1)$. Введем угол ϑ между вектором u и осью OX , тогда

$$u = u(Z_1) \triangleq (\cos \vartheta(Z_1), \sin \vartheta(Z_1)).$$

Таким образом, задача минимизации функции D свелась к ее минимизации по фазовым переменным $Z = (Z_1, Z_2)$. Достаточными условиями минимума D по Z в некоторой точке $Z^* = (Z_1^*, Z_2^*)$ будут следующие условия:

$$D'_{Z_1}(Z^*) = 0, D'_{Z_2}(Z^*) = 0 \quad (21)$$

и положительная определенность квадратичной формы

$$Q \triangleq \sum_{i,j} D''_{Z_i Z_j}(Z^*) \eta_i \eta_j > 0, \forall \eta_i, \eta_j \neq 0. \quad (22)$$

Из условий (21) вытекает

$$\partial D / \partial Z_2 = \dot{\lambda}_2 = 0, \Rightarrow \lambda_2 = \text{const} \text{ и} \quad (23) \\ \partial D / \partial Z_1 = \dot{\lambda}_1 - (\lambda \cdot u_{\perp}) \nabla \vartheta = 0,$$

где $u_{\perp} \triangleq (-\sin \vartheta, \cos \vartheta)$, $\lambda \triangleq \lambda_1 + \lambda_2$ и обозначено $\nabla \vartheta \triangleq (\vartheta'_x, \vartheta'_y)$, $Z_1 \triangleq (x, y)$.

Далее, дифференцируя (16) по Z_1 , получаем

$$u + (u_{\perp} \cdot Z_1) \nabla \vartheta = B Z_1, B \triangleq \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{Z_1^2 - \beta^2}}. \quad (24)$$

Из соотношений (23) и (24) находим

$$\dot{\lambda} = \frac{\lambda \cdot u_{\perp}}{u_{\perp} \cdot Z_1} (B Z_1 - u), \lambda = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (25)$$

Легко показать, что в (25)

$$\lambda \cdot u_{\perp} = 0. \quad (26)$$

Действительно, вычисление вторых производных функции D при условии (26) дает

$$Q = (\lambda \cdot u)(A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2)^2,$$

т. е. $Q > 0$, если $\lambda \cdot u > 0$ и $A_1, A_2 \neq 0$, где

$$A_1 \triangleq \frac{Bx - \cos \vartheta}{Z_1 \cdot u_{\perp}}, A_2 \triangleq \frac{By - \sin \vartheta}{Z_1 \cdot u_{\perp}}, Z_1 \triangleq (x, y).$$

Таким образом, D достигает $\min$ по Z_1 на любом решении, удовлетворяющем (26), неравенству

$$\lambda \cdot u > 0 \quad (27)$$

и условию $A_1, A_2 \neq 0$. Оказывается, предполагаемое решение удовлетворяет этим условиям. Для доказательства этого факта, прежде всего, заметим, что

$$A \triangleq \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{B Z_1 - u}{Z_1 \cdot u_{\perp}} \neq 0$$

в силу

$$A \cdot u_{\perp} = \frac{B Z_1 \cdot u_{\perp}}{Z_1 \cdot u_{\perp}} = B > 0.$$

Поскольку в (20) λ_i еще не определены, выберем их так, чтобы они соответствовали предполагаемому решению, т. е. положим по определению

$$\lambda_i \triangleq k_i v_i^* |v_i^*|^{-1}, \quad (28)$$

где константы $k_i > 0$ пока произвольны, а звездочкой отмечено предполагаемое решение. За-

метим, что из (28) следует, что λ_i неколлинеарны. Далее выберем константы k_i так, чтобы выполнялось условие (26) для u^* , которое равносильно условию коллинеарности

$$\lambda \|u^*\| \quad (29)$$

или равенству $\lambda |\lambda|^{-1} \triangleq u^*$. После этого выбираем $\dot{C}(t)$ в функции Φ , положив

$$\dot{C}(t) \triangleq -(\lambda_1 \cdot (v_1^* - u^*) + (\lambda_2 \cdot (v_2^* - u^*))).$$

Тогда на предполагаемом решении получаем $\Phi(t) = 0$. Это условие 1° Кротова для функции Φ [24, стр. 36]). Условие 2° Кротова — терминальное [24, стр. 36]. В нашем случае оно имеет вид

$$-Z_2^2(\theta) + \lambda_1 \cdot Z_1(\theta) + \lambda_2 \cdot Z_2(\theta) \rightarrow \max_{Z_1, Z_2} \quad (30)$$

где максимум вычисляется при терминальном условии (17), которое с учетом (14) при $i = 2$ дает:

$$Z_2 \cdot (v_2 - u) = 0, \quad t = \theta. \quad (31)$$

Это условие также является терминальным и определяет момент θ наряду с ограничением (16).

В условии (30) переменные Z_1 и Z_2 разделены, и при заданном векторе u они не связаны и через ограничения (16), (17), т. е. допустима раздельная максимизация по переменным Z_1 и Z_2 . Иными словами, максимизируемую функцию в (30) можно представить в виде суммы $F(Z_1, Z_2) = F_1(Z_1) + F_2(Z_2)$, где

$$F_2(Z_2) \triangleq -Z_2^2 + \lambda_2 \cdot Z_2 \rightarrow \max_{Z_2} \quad (32)$$

при ограничении (31).

Для нахождения условного максимума в (32) составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} \triangleq -Z_2^2 + \lambda_2 \cdot Z_2 + \mu Z_2 \cdot (v_2 - u) \rightarrow \max_{Z_2, \mu}$$

где μ — множитель Лагранжа, соответствующий ограничению (31).

Необходимые условия экстремума:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z_2} &= -2Z_2 + \lambda_2 + \mu(v_2 - u) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} &= (v_2 - u) \cdot Z_2 = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Проверим, удовлетворяет ли условиям (33) предполагаемое решение.

На предполагаемом решении угол $\gamma^* \triangleq \widehat{v_2^*, u^*}$ такой, что $\cos \gamma^* = \beta$. Это влечет $v_2^* \cdot (v_2^* - u^*) = 0$ и, следовательно, $v_2^* \perp (v_2^* - u^*)$. Но в силу (14) и (17) имеем $Z_2 \perp (v_2^* - u^*)$ при $t = \theta$, т. е. векторы Z_2 , v_2^* , λ_2 коллинеарны, причем Z_2 сонаправлен с λ_2 . Пропорциональным подбором коэффициентов k_i добиваемся равенства

$$k_2 = |\lambda_2| = 2|Z_2(\theta)|.$$

Тогда в (33) $-2Z_2 + \lambda_2 = 0$, и при $\mu = 0$ необходимые условия экстремума (33) на предполагаемом решении выполняются.

Рассмотрим вторые производные $F_2(Z_2)$. Имеем для $Z_2 = (x_2, y_2)$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial Z_2^2} = \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} \right) = -2(1, 1), \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial y_2} = 0.$$

Тогда соответствующая квадратичная форма

$$Q = -2(\eta_1^2 + \eta_2^2) < 0$$

для любых ненулевых η_1, η_2 , т. е. отрицательно определена. Следовательно, F_2 достигает максимума по Z_2 на предполагаемом решении.

Рассмотрим теперь $F_1 = -\lambda_1 Z_1$. Направление вектора Z_1 задается однозначно равенством (16). Момент θ определен в (31), $|Z_1|$ определен интегрированием уравнений движения. Следовательно, максимизация F_1 осуществляется на единственном векторе Z_1^* , и F_1 достигает максимума на Z_1^* .

Таким образом, предполагаемое решение удовлетворяет достаточным условиям оптимальности Кротова и является решением задачи (14)–(18). Теорема доказана.

Далее, в силу Замечания 1 данное предполагаемое решение, продленное до момента времени T , в который осуществляется R -встреча игроков P и E_1 , является решением задачи (14)–(16), (18) с терминальным условием (4): $|Z_1(T)| = R$. Таким образом, доказано, что коалиция целей $\{E_1, E_2\}$ не может увеличить свой платежный функционал G_2 , отклоняясь от программных прямолинейных траекторий (6)–(9), если игрок P выбирает свою стратегию, удовлетворяющую (12). В то же время для игрока P оптимальным является движение

по прямой под углом φ_0 из (7) к оси OX при прямолинейном движении E_1 и E_2 в соответствии с (7)–(9). Иными словами, ни игроку P , ни игрокам E_1 и E_2 не выгодно отклоняться от оптимальных прямолинейных движений (7)–(11). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Для задачи (1), (5) решением являются траектории, удовлетворяющие (7)–(9), и на этих траекториях имеет место равновесие по Нэшу.

Заключение

В статье исследуется возможность повышения эффективности применения ложной цели путем перехода от программных к позиционным управлениям в задаче ее применения в роли защитника для перехвата преследователя в двухкритериальной дифференциальной игре на плоскости типа Атакующий—Цель—Защитник при простых движениях игроков и заданной круговой зоне классификации целей у атакующего игрока (преследователя). Показано, что в рассмотренной постановке расширение класса программных управлений не улучшает качества управления. Доказано существование равновесия по Нэшу.

Список литературы

1. Ольшанский В. К., Рубинович Е. Я. Простейшие дифференциальные игры преследования системы из двух объектов // Автоматика и телемеханика. 1974. № 1. С. 24–34.
2. Абрамянц Т. Г., Маслов Е. П., Рубинович Е. Я. Простейшая дифференциальная игра поочередного преследования // Автоматика и телемеханика. 1980. № 8. С. 5–15.
3. Breakwell J. V., Hagedorn P. Point Capture of two Evaders in Succession // J. Opt. Theory and Appl. 1979. Vol. 27. N. 1. P. 89–97.
4. Рубинович Е. Я. Дифференциальная игра преследования-уклонения двух целей с ограничением на разворот преследователя // Известия ЮФУ. Технические науки. 2018. № 1 (195). С. 117–128.
5. Rubinovich E. Ja. Two targets pursuit-evasion differential game with a restriction on the targets turning // Preprints, 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization. Yekaterinburg, Russia, October 15–19, 2018. P. 503–508. IFAC PapersOnLine 51-32 (2018) 503–508.
6. Петросян Л. А., Ширяев В. Д. Групповое преследование одним преследователем нескольких преследуемых // Вестн. ЛГУ. 1980. № 13. С. 50–57.
7. Boyell R. L. Defending a Moving Target against Missile or Torpedo Attack // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 1976. Vol. AES-12. P. 582–586.
8. Boyell R. L. Counterweapon Aiming for Defence of a Moving Target // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 1980. Vol. AES-16, P. 402–408.
9. Shneydor N. A. Comments on Defending a Moving Target against Missile or Torpedo Attack // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 1977. Vol. AES-13. P. 321.
10. Eloy Garcia, David W. Casbeer, Khanh Pham, Meir Pachter. Cooperative aircraft defense from an attacking missile // Proc. 53th IEEE Conference Decision and Control (CDC). 2014. Dec. 15–17, Los Angeles, USA, P. 2926–2931.
11. Pachter M., Garcia E., Casbeer D. W. Active target defense differential game // 52nd Annual Allerton Conf. Communication, Control, and Computing. IEEE. 2014. P. 46–53.
12. Perelman A., Shima T., Rusnak I. Cooperative differential games strategies for active aircraft protection from a homing missile // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2011. Vol. 34(3). P. 761–773.
13. Rusnak I., Weiss H., Hexner G. Guidance laws in target-missile-defender scenario with an aggressive defender // Proc. of the 18th IFAC World Congress, Milano, Italy, 2011.
14. Rusnak I. The lady, the bandits and the body-guards — a two team dynamic game // Proc. of the 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic. 2005. Vol. 36(1). P. 441–446.
15. Shima T. Optimal cooperative pursuit and evasion strategies against a homing missile // AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2011. Vol. 34(2). P. 414–425.
16. Yamasaki Takeshi, Balakrishnan Sivasubramanya N. Terminal intercept guidance and autopilot for aircraft defense against an attacking missile via 3d sliding mode approach // Proc. of the American Control Conference (ACC). 2012. P. 4631–4636.
17. Yamasaki Takeshi, Balakrishnan Sivasubramanya N., Takano Hiroyuki. Modified command to line-of-sight intercept guidance for aircraft defense // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2013. Vol. 36(3). P. 898–902.
18. Yanfang Liu, Naiming Qi, Jinjun Shan. Cooperative interception with doubleline-of-sight-measuring // In AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference, Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences. American Institute of Aeronautics and Astronautics, August. 2013.
19. Naiming Qi, Qilong Sun, Jun Zhao. Evasion and pursuit guidance law against defended target // Chinese Journal of Aeronautics. 2017. Vol. 30(6). P. 1958–1973.
20. Weissyand M., Shimazand T., Rusnak I. Minimum effort intercept and evasion guidance algorithms for active aircraft defense // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2016. Vol. 39(10). P. 2297–2311.
21. Garcia E., Casbeer David W., Pachter M. Active Target Defense Differential Game with a Fast Defender // IET Control Theory and Applications. 2017. Vol. 11(17). P. 2985–2993.
22. Rubinovich E. Ja. Missile-Target-Defender Problem with Incomplete a priori Information // Dynamic Games and Applications (Special Issue). 2019. N. 1 (Yan). P. 1–7. On open access: <https://rdcu.be/bhvyh>. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13235-019-00297-0>.
23. Маслов Е. П., Иванов М. Н. Об одной задаче уклонения // Автоматика и телемеханика. 1984. № 8. С. 56–62.
24. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973.

On the Expansion of a Class of Open-Loop Evasion Control in the Simplest Two-Criteria Pursuit-Evasion Game of Two Purposes

E. Ya. Rubinovich, rubinvch@ipu.ru,

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, 65, Profsoyuznaya str., Moscow, 117997, Russian Federation

Corresponding author: **Rubinovich Evgeny Ya.**, Professor, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, 117997, Russian Federation, e-mail: rubinvch@ipu.ru

Accepted on February 25, 2019

Abstract

The article is devoted to the formulation and solution of the two-criterion pursuit-evasion game on the plane of one pursuer against two targets, one of which is false. A false target is used to distract the pursuer, allowing the true target (in the process of diverting) to maximize the minimum possible distance to the pursuer. The specificity of the pursuer is that it has a circular classification zone of radius R , within which it has the ability to instantly classify the target as false or true. The game is that the pursuer minimizes the time required to approach one of the targets to a distance not exceeding R (R -encounter), and the targets, acting in concert, maximize the minimum distance between the pursuer and the remaining target. The game continues until the R -meeting of the pursuer with the first (false) target, i.e. until the classification of the false target. It is assumed that the first target is false a priori the persecutor is not known. The strategy of using a false target is precisely to release it to distract the pursuer from the true target. In reality, the false target is a mobile drone, which is controlled programmatically by the on-Board computer. In the class of open-loop controls the staging was investigated in 1984 by Ivanov M. N. and Maslov E. P. There is a natural question: what will give an extension of a class of open-loop controls of the false targets to the class of closed-loop controls, i.e. to the class of controls with a feedback? This question is quite appropriate in connection with the great progress in the development of microprocessor technology and improving the performance of on-Board computers, which makes it possible to use more complex algorithms for controlling Autonomous mobile objects. This article gives a negative answer to the above question, namely, it is shown that the extension of the class of open-loop controls by a false target does not improve the quality of control. It is proved that in this game there is a Nash equilibrium in the program strategies of the players.

Keywords: pursuit-evasion game, mobile false target, open-loop control, closed-loop control, Nash equilibrium

For citation:

Rubinovich E. Ya. On the Expansion of a Class of Open-Loop Evasion Control in the Simplest Two-Criteria Pursuit-Evasion Game of Two Purposes, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 9, pp. 524–531.

DOI: 10.17587/mau.20.524-531

References

1. Ol'shansky V. K., Rubinovich E. Ya. *Automation and Remote Control*, 1974, 35:1, 19–28.
2. Abramyan T. G., Maslov E. P., Rubinovich E. Ya. *Automation and Remote Control*, 1981, 41:8, 1043–1052.
3. Breakwell J. V., Hagedorn P. J. *Opt. Theory and Appl.*, 1979, vol. 27, no 1, pp. 89–97.
4. Rubinovich E. Ya. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2018, no. 1 (195), pp. 117–128 (in Russian)
5. Rubinovich E. Ja. Two targets pursuit-evasion differential game with a restriction on the targets turning, *Preprints, 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization*, Yekaterinburg, Russia, October 15–19, 2018, pp. 503–508, IFAC PapersOnLine 51-32 (2018) 503–508.
6. Petrosyan L. A., Shiryayev V. D. *LGU Bulletin: Mathematics, Mechanics and Astronomy*, 1980, no. 13, pp. 50–57 (in Russian)
7. Boyell R. L. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 1976, vol. AES-12, pp. 582–586.
8. Boyell R. L. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 1980, vol. AES-16, pp. 402–408.
9. Shneydor N. A. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 1977, vol. AES-13, pp. 321.
10. Garcia E., Casbeer D. W., Pham K., Pachter M. *Proc. 53th IEEE Conference Decision and Control (CDC)*, 2014, Dec. 15–17, Los Angeles, USA, pp. 2926–2931.
11. Pachter M., Garcia E., Casbeer D. W. *52nd Annual Allerton Conf. Communication, Control, and Computing. IEEE*, 2014, pp. 46–53.
12. Perelman A., Shima T., Rusnak I. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, vol. 34(3), pp. 761–773.
13. Rusnak I., Weiss H., Hexner G. *Proc. of the 18th IFAC World Congress*, Milano, Italy, 2011.
14. Rusnak I. *Proc. of the 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005, vol. 36(1), pp. 441–446.
15. Shima T. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, vol. 34(2), pp. 414–425.
16. Yamasaki Takeshi, Balakrishnan Sivasubramanya N. *Proc. of the American Control Conference (ACC)*, 2012, pp. 4631–4636.
17. Yamasaki Takeshi, Balakrishnan Sivasubramanya N., Takano Hiroyuki. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, vol. 36(3), pp. 898–902.
18. Yanfang Liu, Naiming Qi, Jinjun Shan. *AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference, Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, August, 2013.
19. Naiming Qi, Qilong Sun, Jun Zhao. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2017, vol. 30(6), pp. 1958–1973.
20. Weissyand M., Shimazand T., Rusnak I. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, vol. 39(10), pp. 2297–2311.
21. Garcia E., Casbeer D. W., Pachter M. *IET Control Theory and Applications*, 2017, vol. 11(17), pp. 2985–2993.
22. Rubinovich E. Ja. *Dynamic Games and Applications (Special Issue)*, 2019, on open access: <https://rdcu.be/bhvyh>. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13235-019-00297-0>.
23. Maslov E. P., Ivanov M. N. *Automation and Remote Control*, 1984, 45:8, 1008–1014 (in Russian).
24. Krotov V. F., Gurman V. I. *Variational Problems of Mechanics and Control*, Moscow, Nauka, 1973 (in Russian).