УДК 681.5:517.935 DOI: 10.17587/mau.20.461-471

С. А. Дубовик, д-р техн. наук, проф., duboviksa@gmail.com,
Севастопольский государственный университет

Асимптотическая семантизация данных в системах управления[1]

Асимптотические методы анализа больших уклонений в настоящей работе используются для преобразования информации о состоянии управляемого диффузионного процесса в вероятностные оценки о штатном или нештатном развитии процесса. Тем самым, над рефлексным контуром локальной стабилизации реализуется система глобального семантического контроля, своего рода вторая сигнальная система. В качестве аппарата анализа используется функционально-аналитический подход, аналогичный слабой сходимости вероятностных мер, позволяющий существенно расширить условия применения метода. Глобальный контроль сводится к решению задачи Лагранжа в форме Понтрягина для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (системы путей), функционала действия Вентцеля—Фрейдлина, который представлен здесь как интегрально-квадратичный критерий для функций управления в системе путей, и граничного условия в виде рассматриваемого критического состояния системы. Ограниченное решение задачи Лагранжа—Понтрягина на полупрямой, дающее прообраз квазипотенциала системы путей, в работе названо A-профилем критического состояния. A-профиль позволяет существенно упростить процедуру анализа больших уклонений, вплоть до ее осуществления в реальном времени и реализации контура глобального контроля (вторая сигнальная система). Полученная двухуровневая архитектура позиционируется как базовая для достижения функциональной устойчивости системы управления. Формулируется предположение, что такую роль аппарат больших уклонений может играть и в биологических эволюционирующих системах, в том числе в образовании языков и других атрибутов эволюции высшей нервной деятельности человека.

Ключевые слова: *функционал действия, большие уклонения, экстремаль, функциональная устойчивость, глобальный контроль, эволюция, язык*

Введение

Данную статью можно рассматривать как продолжение работы [1], что избавляет от необходимости детального вступления. Здесь, как и в работе [1], основным конструктивным методом остается асимптотический анализ больших уклонений (АБУ), но акцент смещается к следующей цели: с помощью АБУ сформировать в задаче управления предметную область, получив в итоге систему, основанную на знаниях и обеспечивающую функциональную устойчивость управления [2]. Расширение прикладного назначения метода потребовало перехода от чисто вероятностных его оснований [3] к функционально-аналитическому подходу [4], аналогичному слабой сходимости вероятностных мер. В результате получается, что собственно технологию синтеза составляют детерминированные уравнения динамики, квадратические задачи Лагранжа и классическая теория управляемости [5], правда, примененная не к управлениям, а к возмущениям, действующим на объект (и в этом смысле, скорее, теория контруправляемости). Это реализация идеи, которая сформулирована в заключении работы [2]: для построения функционально устойчивой системы (ФУС) нужно робастный регулятор (в смысле H^∞-синтеза) "расщепить" на части, выделяя в нем рефлексную систему локальной стабилизации и систему верхнего уровня, обеспечивающую реагирование на критические состояния (КС), обусловленные действием возмущений. Если вспомнить аналогию между первой сигнальной системой у живых организмов (и, прежде всего, у *Homo Sapiens*), то тут же возникает ассоциация между контуром глобального контроля (КГК) и второй сигнальной системой, присущей, как известно, только *Homo Sapiens*. Далее мы еще вернемся к этим аналогиям, которые, кстати, вполне естественны для кибернетики как науки об "управлении и связи в животном и машине". Порядок изложения следующий: сначала (п. 1) вместе с формулировкой проблемы и основных компонентов ее решения представлен и основной результат — алгоритм ФУС, формирующий при необходимости сигналы опасного превышения вероятностями КС некоторых заданных уровней (в *SCADA*-системах такие сигналы известны как "алармы"). Вероятностный анализ начинается с простейшего дискретного случая (п. 2), а затем задача рассматривается в п. 3 с позиций сходимости в смысле больших уклонений. В п. 4 рассмотрены применения к синтезу ФУС и даны некоторые достаточные условия. В полной мере

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01220)

алгоритм синтеза ФУС, основанный на явном определении профилей, удается реализовать в линейном случае (п. 5).

1. Постановка задачи, основные понятия и алгоритм управления

Основное уравнение, которое нас будет интересовать как объект АБУ, является возмущенным, т. е. содержит $\varepsilon > 0$ — малый параметр:

$$\dot{\tilde{x}} = a(\tilde{x}) + \varepsilon\sigma(\tilde{x})\dot{w};\ \ \tilde{x}(t_0) = x_0, \qquad (1)$$

где $\dot{w}$ — k-мерный вектор "белого шума"; a, σ — гладкие матричные функции.

Наряду с этим рассмотрим две порождающие системы:

невозмущенную

$$\dot{x} = a(x);\ \ x(t_0) = x_0 \qquad (1a)$$

и систему путей

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + \sigma(\varphi)v;\ \ \varphi(t_0) = x_0, \qquad (1b)$$

где v — суммируемая функция, такая что на решениях ($1b$) определен функционал действия [3]:

$$S_{t_0 t_K}(\varphi, v) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_K} v^{\mathrm{T}} v dt, \qquad (2)$$

который конечен, если решение φ на $[t_0, t_K]$ абсолютно непрерывно, и равен бесконечности в противном случае (т. е., если φ не абсолютно непрерывна, или не удовлетворяет ($1b$)). Далее будут использованы следующие обозначения:

$R_+ = \{t : 0 \leqslant t < \infty\}$, $\quad R_- = \{t : t_0 \geqslant t > -\infty\}$ — множества действительных чисел; множества целых чисел (и производных от них рациональных чисел), обозначения которых используют аналогичные индексы, вводятся в п. 2;

$\|x\| = \sqrt{(x^{\mathrm{T}}x)}$ — евклидова норма вектора или соответствующая ей норма, если x — матрица;

$\|x\|_2^2 = \int_{R_\pm} \|x\|^2 dt$; $\|x\|_\infty = \sup_{R_\pm}\|x\|$ (знак в $R_\pm$ определяется индексом числовой мажоранты: $c_+ > 0$ или $c_- > 0$);

$a_x(x) = \{\partial a_i(x)/\partial x_j\}$ — матрица частных производных от вектора $a(x)$ по вектору x;

$C_b^+(E)$ — множество R_+-значных ограниченных непрерывных функций на E;

$C^1(D)$ — множество R^n-значных функций, имеющих непрерывные частные производные в $D \subset R^n$;

$0_{k\times m}$, I_k — матрицы (соответственно) $(k \times m)$-мерная нулевая и $(k \times k)$-мерная единичная;

$a \vee b$, $a \wedge b$ — соответственно максимум, минимум чисел a и b.

Все указанные выше системы будем считать стабилизированными в том смысле, что

$$a(x) = \alpha(x, U),$$

где управления $U(t)$ формируются в виде обратной связи

$$U = Kx \qquad (3)$$

таким образом, чтобы обеспечить устойчивое состояние равновесия χ (аттрактор) невозмущенной системы ($1a$) с областью притяжения O_χ. Далее будем считать, что $\chi = 0$, а стабилизирующее управление (3) определяется линеаризованной (невозмущенной) системой:

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 U;\ y = C_0 x, \qquad (4)$$

где матрицы A_0, B_0 суть матрицы частных производных $\alpha(x, U)$ по аргументам (соответственно) в нуле, а y — вектор выходных координат; критерий качества стабилизации:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_K} y^{\mathrm{T}} y dt + R_{t_0 t_K},\ \ R_{t_0 t_K} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_K} U^{\mathrm{T}} RU dt,$$

где $R = R^{\mathrm{T}} > 0$.

В предположении управляемости (пара (A_0, B_0)) и наблюдаемости (пара (A_0, C_0)) системы (4) получаем:

$$K = -R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P, \qquad (5)$$

где $P > 0$ удовлетворяет матричному уравнению

$$0 = -PA_0 - A_0^{\mathrm{T}}P - C_0^{\mathrm{T}}C_0 + PB_0R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P.$$

В результате система (4), замкнутая управлением (3), (5), оказывается асимптотически устойчивой, а матрица

$$A = A_0 + B_0K = A_0 - B_0R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P$$

— гурвицевой.

Глобальные свойства системы (1) будем описывать с помощью системы путей, учитывая, прежде всего, возможность отклонений состояния системы (1) от нуля в направлении границы ∂_D эксплуатационной области $D \subset O_\chi$ (D — открытое множество), относительно которой будем считать, что при достаточно малом $\mu > 0$

$$B_\mu(0) \subset D,$$

где $B_r(c)$ — открытый шар радиуса r с центром в $c \in R^n$.

Пусть $\partial_D = \bigcup_j \partial_j$ и имеется конечная совокупность $\Lambda = \{Y_j\}$ таких критических состояний (КС):

$$Y_j(t) = c_j \tilde{x}(t);\, Y_j \in \partial_j.$$

Предположим, что в каждый момент времени $t = t_K$ может возникать опасность только одного КС $Y_K \in \partial_K$, любого из данной совокупности. Тогда можно считать, что $Y = Y_K$, и поставить вопрос о прогнозе КС, полагая

$$t_K = \inf\{t : Y(t) \in \partial_K,\ t > t_0,\ \tilde{x}(t_0) \in D\}. \quad (6)$$

Сформулируем следующую задачу оптимального управления (Лагранжа—Понтрягина (ЛП)): на решениях (1*b*) минимизировать функционал действия (шума) (2) при дополнительном условии

$$Y(t_K) = c_K \varphi(t_K) \in \partial_K, \quad (7)$$

где c_K — матрица полного ранга.

Определение 1. *Потенциалом КС* будем называть взятое со знаком минус минимальное значение критерия (2):

$$-\hat{S}_{t_0 t_K}(\hat{\varphi}, \hat{v}) = -\inf S_{t_0 t_K}(\varphi, v),$$

а *профилем КС* — экстремаль $(\hat{\varphi}, \hat{v})$ в решении задачи ЛП.

Существование профиля $(\hat{\varphi}, \hat{v})$ в наших предположениях и в силу выпуклости (2) следует из работы [6] (глава 3, теорема 4.1).

Эвристический *алгоритм глобального контроля* (АГК) может быть основан на следующем простом и естественном наблюдении: мерой близости текущего состояния $\tilde{x}(t) \in D$ и КС $Y_K \in \partial_K$ является потенциал КС, а сигналом (алармом) к антикризисной коррекции — превышение потенциалом КС некоторого порога $-\pi_K < 0$. Иными словами, процедура контроля в момент t сводится к операции сравнения π_K с $S_{t_0 t_K}$, где $t_0 = t$.

Обозначим правую часть выражения (1*b*):

$$\gamma(x, u) = a(x) + \sigma(x)u,$$

а также ее производные в нуле ($(x, u) = (0, 0)$):

$$A = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right)_0;\, G = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial u}\right)_0 = \sigma(0). \quad (8)$$

Введем в рассмотрение еще $M(T)$ — множество точек для (1*в*) (множество достижимости (1*b*)), которые достижимы из $\varphi(t_0) = \chi = 0$ за время T посредством допустимых управлений $\|v\| < L$ в (1*b*) на $[t_0, t_0 + T]$.

Определение 2. Будем говорить, что *система путей (1b) невырождена*, если

$$M(T) \supset B_\mu(0)$$

при достаточно малом $\mu > 0$.

Следующий результат важен в вероятностном анализе для диффузионного процесса (1), представленном ниже.

Лемма 1 ([7], proposition 3.3). Если пара (A, G) управляема, то (1*b*) невырождена.

Переходя к стохастической задаче, рассмотрим сначала существенно более простой случай линейной дискретной системы.

2. Асимптотика больших уклонений для дискретной системы

Пусть случайная величина ξ_i, принимающая значения +1, −1 с вероятностями (соответственно) p_+, p_-, задает для частицы на прямой случайное блуждание длительностью n [8, 9], а именно: смещения ξ_i на каждом шаге являются независимыми одинаково распределенными обозначенным образом случайными величинами, так что значения смещений в числах шагов в положительном (+1), и отрицательном (−1) направлениях суть соответственно N_+, N_-, так что $N_+ + N_- = n$.

Случайные блуждания по точкам множества Z всех целых чисел описываются последовательностью:

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n = N_+ - N_-,\ n = 1, 2, \ldots, \quad (9)$$

или эквивалентным рекуррентным уравнением:

$$S_k - S_{k-1} = \xi_k,\ k = 1, 2, \ldots, S_0 = 0. \quad (10)$$

Как всякий случайный процесс, кроме такого определения в виде последовательности случайных величин $\{S_i\}$, он может быть представлен и как некоторое распределение вероятностей на множестве путей [9], т. е. ломаных, выходящих из точки (0, 0) с вершинами в точках (i, X_i), где X_i — множество значений случайной величины S_i, $i = 1, 2, \ldots$ Пути — это решения φ уравнения

$$\varphi_i - \varphi_{i-1} = v_i, \quad (11)$$

в котором элементы последовательности $\{v_i\}$ принадлежат паре {+1, −1}, причем каждая траектория своей последовательностью из $\{+1, -1\}$ определяется однозначно.

Для последовательности (9) (или (10)) рассмотрим вероятность КС:

$$p_n(A, B) = P(A \leqslant S_n \leqslant B)$$

для любого отрезка $[A, B]$, не содержащего среднее значение S_n. Для простоты будем считать, что A, B, S_n — одинаковой четности. Далее обозначим:

$$\mu_+ = N_+/n,\ \mu_- = N_-/n,\ a = A/n,\ b = B/n,$$

и тогда для эмпирического среднего имеем:

$$S_n/n = \mu_+ - \mu_- \to p_+ - p_-,\ n \to \infty,$$

(закон больших чисел), а для вероятности КС $P_n(a, b) = P(a \leqslant S_n/n \leqslant b)$:

$$P_n(a,b) = \sum_{a<\frac{N_+-N_-}{n}<b} \frac{n!}{N_+!\,N_-!} p_+^{N_+} p_-^{N_-} = \\ = \sum_{a<\frac{N_+-N_-}{n}<b} \frac{n!}{N_+!\,N_-!} \mathbf{e}^{N_+ \ln p_+ + N_- \ln p_-}. \quad (12)$$

Отсюда, с учетом формулы Стирлинга и ее различных следствий [9]: $\ln n! = n(\ln n - 1) + o(n)$, $n! \approx n^n \mathbf{e}^{-n}\sqrt{2\pi n},\ n \to \infty$, имеем:

$$\frac{n!}{N_+!\,N_-!} \approx \frac{n^n \mathbf{e}^{-n}}{N_+^{N_+} N_-^{N_-} \mathbf{e}^{-n}} = \frac{1}{\mu_+^{N_+}\mu_-^{N_-}} = \\ = \mathbf{e}^{-(N_+ \ln \mu_+ + N_- \ln \mu_-)}.$$

С учетом этого из соотношения (12) следует:

$$P_n(a,b) = \\ = \sum_{a<\frac{N_+-N_-}{n}<b} \mathbf{e}^{-(N_+ \ln \mu_+ + N_- \ln \mu_-) + N_+ \ln p_+ + N_- \ln p_- + o(1)},$$

где, вводя обозначение для относительной (Кульбака—Лейблера—Санова) энтропии [8, 10]

$$H(\mu, p) = \mu_+ \ln \frac{\mu_+}{p_+} + \mu_- \ln \frac{\mu_-}{p_-}, \quad (13)$$

имеем:

$$P_n(a,b) = \sum_{a<\frac{N_+-N_-}{n}<b} \mathbf{e}^{-nH(\mu,p)+o(1)}. \quad (14)$$

Для симметричного блуждания на прямой, когда $p_+ = p_- = 1/2$, обозначим $\mu = \mu_+$, $p = p_+ = 1/2$. Тогда для энтропии (13) имеем

$$H(\mu, p) = \mu \ln(2\mu) + (1-\mu)\ln[2(1-\mu)].$$

Воспользуемся разложением по Тейлору функции

$$h(x) = H(1/2 + x, 1/2) \quad (15)$$

в нуле, учитывая, что

$$h(0) = 0,\ h'(x) = \ln\frac{1/2 + x}{1/2 - x},\ h'(0) = 0,$$

$$h''(x) = \frac{1}{1/4 - x^2},\ h''(0) = 4.$$

В результате получим

$$h(x) = \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2). \quad (16)$$

Так как по определению (15) в соотношении (16) $x = \mu - 1/2$, и

$$S_n = N_+ - N_- = N - (n - N) = 2N - n,$$

то в выражении (10) имеем:

$$2x = 2\mu - 1 = S_n/n. \quad (17)$$

Представление (16), (17) справедливо только при достаточно малом $x = \mu - 1/2$, поэтому представим блуждание как

$$S_n = S_{n-k} + S_{n-k,\,n},$$

где

$$S_{n-k,\,n} = \xi_{n-k+1} + \ldots + \xi_n.$$

Тогда при некотором k из соотношения (17) имеем

$$2x \approx S_{n-k,\,n}/n,\ n \to \infty,$$

и при дополнительном условии $n - k \to \infty$:

$$(2x)^2 \approx (\xi_{n-k+1}^2 + \ldots + \xi_n^2)/n^2. \quad (18)$$

Возвращаясь к исходной записи искомой вероятности $p_n(A, B)$ и к уравнению пути (11), получаем, что с точностью до $1/n$ минимизация относительной энтропии (13) для симметричного блуждания эквивалентна дискретной задаче оптимального управления для уравнения (11) с граничным условием

$$A \leqslant \varphi_n \leqslant B \quad (19)$$

и (в силу выражений (16), (18)) функционалом действия (ФД)

$$I = \frac{\gamma}{2} \sum_{i=n-k}^{n} v_i^2, \qquad (20)$$

где $\gamma = \frac{n-k}{n}$.

Усложним систему (10), дополнив правую часть линейной компонентой ($\alpha \in R^1$):

$$X_{i+1} - X_i = \alpha X_i + \xi_{i+1},\ i = \overline{0, n},\ X_0 = x. \qquad (21)$$

Эти соотношения, учитывая (10), эквивалентным образом можно представить следующим образом:

$$X_{i+1} = x + \alpha \sum_{j=0}^{i} X_j + S_{i+1},\ S_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} \xi_{j+1},$$
$$i = \overline{0, n},$$

или в форме уравнения путей:

$$\varphi_{i+1} = x + \alpha \sum_{j=0}^{i} \varphi_j + \psi_{i+1},\ \psi_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} u_{j+1}, \qquad (22)$$
$$i = \overline{0, n}.$$

Иными словами, на множестве Z всех целых чисел определено непрерывное отображение

$$a_x : \{\psi_k\} \to \{\varphi_k\},$$

для которого существует обратное:

$$a_x^{-1} : \{\varphi_k\} \to \{\psi_k\},$$

а именно

$$\psi_{i+1} = \varphi_{i+1} - \alpha \sum_{j=0}^{i} \varphi_j - x,$$

причем для последовательностей $\{\psi_k\}$ в выражении (22) определен ФД (20). Следовательно, для уравнения (21) и преобразования a_x выполнены условия *принципа сжатия* [11], гарантирующего существование ФД для семейства последовательностей (21) при $n \to \infty$ равномерно относительно начальной точки x:

$$J(\varphi) = I(a_x^{-1}(\varphi)). \qquad (23)$$

Возвращаясь к исходной разностной форме (21) для уравнения путей (22), имеем

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = \alpha\varphi_i + v_{i+1},$$
$$i = n-k,\ n-k+1, \ldots, n, \qquad (24)$$
$$\varphi_{n-k} = x,$$

для ФД (23) на множестве $n - k \leqslant i \leqslant n$ — особенно простой вид (20), а в качестве дополнительного нужно сохранить условие (19).

Таким образом, оценка вероятности КС $p_n(A, B) = P(A \leqslant X_n \leqslant B)$ для стохастического уравнения (21) сводится к решению дискретной задачи оптимального управления (19), (20), (24) (дискретная задача ЛП).

Замечание 1. Систему (21) в случае $\alpha < 0$ можно интерпретировать как результат использования управления u в (10) (и в (11)): если это управление искать в форме обратной связи $u_i = \alpha\varphi_i$, то и получатся системы (21) и (24). При выборе α можно руководствоваться следующими гипотезами:

1) типичная ситуация, когда влиянием ξ_i можно пренебречь и синтез осуществить, минимизируя критерий $\rho = \frac{1}{2}\sum_i^n (\varphi_i^2 + ru_i^2),\ r > 0$;

2) ситуация "возможных больших уклонений", когда контроль больших уклонений отсутствует, но априорно предполагается возможность их появления в результате действия возмущений: в этом случае учет v_i осуществим только в рамках рефлексной системы, что приводит к игровой задаче гарантирующего управления:

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = u_i + v_{i+1}$$

с критерием

$$\eta(q) = \rho - q\frac{1}{\gamma}I = \frac{1}{2}\sum_i^n (\varphi_i^2 + ru_i^2 - qv_i^2),\ r > 0,\ q \geqslant 0,$$

т. е. такой учет возмущений также опирается на ФД (20); понятно также, что гипотеза 1 — это частный случай второй гипотезы: $\rho = \eta(0)$.

Сравним теперь указанные варианты рефлексного управления с тем, что дает явный контроль больших уклонений в (10), сводящийся в нашем случае к решению дискретной задачи ЛП. Получающиеся в этой простой задаче экстремали — это совокупность точек (также назовем их профилем КС), лежащих на кратчайшем отрезке, ведущем из начальной точки (НТ) в конечную (КТ). При этом вероятность КС (в соответствии с оценкой (14)) будет стремиться к единице по мере приближения текущей точки к КТ. В результате управление может быть организовано следующим образом: пока все штатно, $u_i = 0$ и на каждом шаге отклонение X_i соизмеряется с профилем КС, соответствующим образом смещенным по времени; когда текущее состояние оказывается близким к КТ, включается управление u_i, возвращающее состояние в окрестность НТ; как только состояние оказывается в достаточно малой окрестности НТ (малая вероятность в (14)), управление обнуляется. Конечно, такое антикризисное управление можно сочетать с рефлексной стабилизацией, как описано в замечании 1, и в этом случае для построения профиля нужно решать задачу ЛП.

3. Контроль больших уклонений в системе (1)

Покажем теперь, что и в случае системы (1) задача ЛП и АГК являются результатом вероятностного анализа, благодаря чему оказывается возможным данные о состоянии управляемого диффузионного процесса трансформировать в суждения о текущих ситуациях управления. Как и в дискретном случае, ключевым является принцип сжатия (только в более общей форме) и построение ФД по принципу (23) на основе аналогичного функционала, построенного для процесса с независимыми приращениями; в случае (1) — это винеровский процесс. Подчеркивая роль ФД в построении оценок, нужно заметить, имея в виду вышеизложенную дискретную схему, что для любого множества A, находящегося на положительном расстоянии от нуля, можно записать

$$P_n(A) \approx \mathbf{e}^{-n\hat{S}(A)}$$

в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_n(A) = -\hat{S}(A),$$

причем

$$\hat{S}(A) = \inf S(A),$$

где минимум вычисляется по всем путям, ведущим из нуля в A. Таким образом, можно говорить о некотором свойстве макситивности АБУ [4]: если B — еще одно событие такого же рода, причем $A \cap B$ — пустое множество, то, с одной стороны,

$$P_n(A \cup B) = P_n(A) + P_n(B),$$

а с другой,

$$P_n(A \cup B) \approx \mathbf{e}^{-n\{\hat{S}(A)\wedge\hat{S}(B)\}} = P_n(A) \vee P_n(B).$$

Это значит, что вероятностный анализ, основанный, естественно, на аддитивной мере, с точностью до малых ошибок грубых оценок АБУ может быть заменен анализом, основанным на некоторой макситивной мере — *идемпотентности* μ [4], для которой

$$\mu(A) = \sup_{\omega\in A} \mu(\omega),$$

где ω — элементарный исход (атом) события A.

В работе [4] строится именно такая теория, содержащая разделы интегрирования по идемпотентностям, идемпотентным процессам (в том числе аналогу винеровского) и дифференциальным уравнениям Ито. В более ранней работе [14] отмечено сходство принципа больших уклонений с определением слабой сходимости вероятностных мер. На этой основе в работах [4, 14] и в некоторых других разработана теория сходимости в смысле больших уклонений (БУ-сходимость), позволившая получить оценки в рамках АБУ, свободные от многих ограничений классической вероятностной методики [3]. В частности, очень важным для практики инженерных расчетов оказывается снятие условия равномерной невырожденности матрицы диффузии в уравнении (1).

Здесь представим только то, что позволит сформулировать необходимый нам результат. Детали теории БУ-сходимости и методов идемпотентного анализа можно найти в работе [4], где также приведена и обширная библиография по вопросу.

Среди прочего, эта теория позволяет построить АБУ в максимальной для практики общности — для систем с непрерывной и дискретной компонентами. Например, вместо последовательностей (как в п. 2) можно сразу говорить о направленностях $\{P_\phi,\ \phi \in \Phi\}$ вероятностных мер на топологическом пространстве E с борелевской σ-алгеброй $\beta(E)$ и шкалой r_ϕ (направленности) неотрицательных чисел $\{r_\phi,\ \phi \in \Phi\}$ такой, что $r_\phi \to \infty$ при $\varphi \in \Phi$, где Φ — направленное множество. Тогда дискретному варианту соответствует $r_\phi = n$ с натуральным рядом в качестве Φ, а для (1) $r_\phi = 1/\varepsilon$ из множества R_+ и $\Phi = R_+$. В следующем определении ([4], определение 3.1.1) можно усмотреть некоторую аналогию с определением слабой сходимости ([10], с. 332, определение 2), если учесть, что интеграл по идемпотентной мере Π от функции $z(s)$ на E есть $\bigvee_E z(s)d\Pi(s)$ ([4], параграф 1.4); при этом Z — система замкнутых подмножеств E.

Определение 3. Направленность $\{P_\phi,\ \phi \in \Phi\}$ БУ сходится со скоростью r_ϕ к Z-идемпотентности Π на E, если для любой функции $h \in C_b^+(E)$

$$\lim_{\phi\in\Phi}\left(\int_E h(s)^{r_\phi} dP_\phi(s)\right)^{1/r_\phi} = \vee_E h(s) d\Pi(s),$$

что короче обозначается как $P_\phi \xrightarrow[r_\phi]{ld} \Pi$.

Условием, при котором для (1) имеет место (при $r_\phi = 1/\varepsilon$) БУ-сходимость, является условие линейного роста (УЛР) ([4], параграфы 2.6, 2.8, гл. 5) на функции $a(x)$ и $c(x) = \sigma(x)\sigma(x)^\text{т}$:

УЛР: существует локально интегрируемая R_+-значная функция, такая что

$$\|a(x(t))\| \leqslant l(t)(1 + \sup_{s\leqslant t}\|x(s)\|);$$

$$\|c(x(t))\| \leqslant l(t)(1 + \sup_{s\leqslant t}\|x(s)\|^2).$$

Теорема 1 ([4], теоремы 2.6.18—23, 2.8.9, 2.8.10 и 5.1.13, 5.4.2). Если при некотором $c_+ > 0$ для управления в (1*b*) выполнено УЛР и

$$\|v\|_2^2 \leqslant c_+,$$

то при условии невырожденности (определение 2) системы (1*b*) имеем:

$$P_\phi \xrightarrow[r_\phi]{ld} \Pi.$$

Этот результат опирается, в частности, на свойство системы (1*b*) ([4], определение 2.6.14 для системы (2.6.3)), которое назовем здесь *продолжаемостью вправо* (т. е. при $t \to \infty$) и которое выполнено при наших предположениях (система (1*b*) — это в работе [4] система (2.6.3)).

Таким образом, для оценки вероятности события ∂_D, связанного с процессом (1), получаем задачу оптимального управления Лагранжа—Понтрягина (ЛП) (1*в*), (2), (7).

Замечание 2. В соответствии с традицией АБУ [3] в работе [4] для характеризации предельной точки вместо аппарата оптимального управления для уравнения путей используется вариационное исчисление, в результате чего ФД записывается в следующем виде ([4], теорема 2.8.10):

$$S(x) = -\ln\Pi(x) = \\ = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_K}(\dot{x}_t - a(x_t))^\text{т} c(x_t)^\oplus (\dot{x}_t - a(x_t))dt, \quad (25)$$

где $c^\oplus$ — операция псевдообращения матрицы ([15], с. 492—496). Покажем, что это эквивалентно нашему рассмотрению через уравнение путей и оптимальное управление. Пусть σ в уравнении (1) — матрица полного ранга, тогда представим ее в виде

$$\sigma = J\rho,\ J = (0_{k\times(n-k)}\ \ I_k)^\text{т}, \quad (26)$$

где ρ — симметричная положительно определенная $(k \times k)$-мерная матрица. Учитывая [15], что в выражении (25)

$$c^\oplus = (\sigma\sigma^\text{т})^\oplus = \sigma(\sigma^\text{т}\sigma)^{-2}\sigma^\text{т},$$

и подставляя сюда соотношение (26) (учитывая при этом, что $J^\text{т}J = I_k$), получаем

$$c^\oplus = J\rho^{-2}J^\text{т}.$$

Подставляя теперь это в выражение (25) и обозначая

$$v = \rho^{-1}J^\text{т}(\dot{x} - a(x)), \quad (27)$$

получаем в (25) критерий (2). Умножая последнее равенство слева на ρ, с учетом $J^\text{т}J = I_k$ имеем:

$$J^\text{т}J\rho v = J^\text{т}(\dot{x} - a(x)).$$

Учитывая (26), получаем здесь уравнение (1*b*).

Замечание 3. Преобразование (27) позволяет воспользоваться принципом сжатия и определить ФД на решениях (1) по ФД для винеровского процесса по аналогии с (23) в дискретном случае. Но для того чтобы это имело смысл, требуется невырожденность уравнения пути. В данном случае это эквивалентно управляемости пары (A, J); в работе [4] используется такой вариант достаточного условия (теорема 2.8.10): "$\dot{x} - a(x)$ принадлежит множеству значений матрицы c".

4. Функциональная устойчивость и А-профили КС

Исходя из постановки проблемы управления в п. 1 мы можем теперь определить *функционально устойчивой* такую систему (ФУС) управления, в которой обеспечены:

а) устойчивость состояния равновесия (будем говорить также о локальной устойчивости) с заданным качеством;

б) выполнение на заданном вероятностном уровне всех условий принадлежности текущего состояния эксплуатационной области.

Детализируем последний пункт в этом определении: будем считать заданным для каждого условия (7) число π_K, $0 < \pi_K \ll 1$ такое, что

$$P(Y_K \in \partial_K) \leqslant \pi_K,\ Y_K = Y(t_K),\ K = 1, 2, \ldots, N,$$

где N — общее число критических состояний. Данное определение сводит синтез ФУС к решению задачи классификации (выбор между гипотезами "штатно" или "кризис").

Результатом решения задачи ЛП является тройка $(\hat{v}, \hat{\varphi}, \hat{t}_K)$, т. е. экстремаль $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(t)$, $t \in [t_0, t_K]$, определяющая минимальное значение (6) и ФД: $\hat{I} = I_{t_0 \hat{t}_K}(\hat{\varphi}, \hat{v}) = \varepsilon^{-2} \hat{S}_{t_0 \hat{t}_K}(\hat{\varphi}, \hat{v})$. По ФД определяется *квазипотенциал* [3] системы (1*b*) — функция точки x и состояния равновесия:

$$V(\chi, x) = \inf\{S_{t_0 t_K}(\varphi) : \varphi \in C_{t_0 t_K}(R^n),$$
$$\varphi_{t_0} = \chi,\ \varphi_{t_K} = x\}.$$

Определение 4. Экстремаль $\hat{\varphi}$, удовлетворяющую (1*b*), если она является единственным прообразом квазипотенциала $V(0, x)$, будем называть *А-профилем* КС [12].

Значение А-профиля КС для синтеза ФУС состоит в том, что он позволяет осуществить ГК по текущим данным о состоянии (1) в реальном времени, т. е. реализовать контур ГК над системой ЛС. Приведем некоторые достаточные условия существования А-профиля. Для этого нам потребуется понятие *конвергенции* [13] для системы (1*b*). Кроме того, для (1*b*) наряду с продолжаемостью вправо в случае $v = \hat{v}$ на $[t_0, \hat{t}_K]$ это потребует *продолжаемости влево*, т. е. при $t_0 \to -\infty$. Предположим, что в (1) и (1*b*) $\sigma(x)$ не зависит от x, т. е.

$$\sigma(x) = \sigma.$$

В этом случае для задачи ЛП можно записать прямое и сопряженное уравнения с соответствующими им условиями справа:

$$\dot{\varphi}_t = a(\varphi_t) + \sigma v_t,\ c_K \varphi(t_K) = Y_K, \tag{28}$$

$$\dot{\psi}_t = -a_x^{\mathrm{T}}(\hat{\varphi}_t)\psi_t,\ \psi(t_K) = \psi_K, \tag{29}$$

$$v_t = \hat{v}_t = \sigma^{\mathrm{T}}\psi_t. \tag{30}$$

Обозначим соответствующую матрице $a(x)$ в (1) симметризованную якобиеву матрицу

$$J_a(x) = (a_x(x) + a_x(x)^{\mathrm{T}})/2$$

и предположим

П1: $a(x) \in C^1(D)$ и наибольший характеристический корень $\Lambda(x)$ матрицы $J_a(x)$ для любого x удовлетворяет неравенству

$$\Lambda(x) \leqslant \lambda < 0,$$

а матрица $a_x(x)$ для любого x — гурвицева.

Теорема 2. При условии П1 и невырожденности системы (1*b*) существует А-профиль для

$$Y(t_K) \subset B_\mu(0)$$

при достаточно малом $\mu > 0$.

Доказательство следует из того, что в условиях теоремы из (П1) имеем

$$\|\psi\|_\infty \leqslant c_-$$

что, в свою очередь, влечет

$$\|v\|_\infty \leqslant c_-$$

на R_-. Уравнение (1*b*), следовательно, является системой с конвергенцией [13] и имеет единственное ограниченное на всей прямой (предельное) решение (продолжаемое влево), которое и есть А-профиль.

Проверка условия П1 может быть сложной задачей. Тем более интересен линейный вариант задачи, где этой проблемы нет.

5. А-профили для линейных систем

Переходя к рассмотрению асимптотически устойчивых линейных систем, стоит отметить, во-первых, что проблема больших уклонений возникает при нахождении критического множества на любом положительном расстоянии от аттрактора, а также тот факт, что линейное рассмотрение актуально и для нелинейных систем, поскольку штатное функционирование управляемого объекта, как правило, происходит в зоне почти линейности. Так, во многих случаях эксплуатационные изменения угла крена судна или угла атаки летательного аппарата принадлежат интервалу ±10...15°. Вместе с тем линейность дает возможность получить несколько больше.

В линейном случае уравнения (28), (29) имеют следующий вид [2]:

$$\dot{\varphi}_t = A\varphi_t + \sigma v_t,\ c_K \varphi(t_K) = Y_K, \tag{31}$$

$$\dot{\psi}_t = -A^{\mathrm{T}}\psi_t,\ \psi(t_K) = \psi_K, \tag{32}$$

а управление (минимизирующее (2)) по-прежнему определяется соотношением (30). Относительно системы путей предположим

П2: матрица A — гурвицева, а система (31) — невырождена, т. е. пара (A, σ) — управляема.

В рассматриваемом линейном случае, говоря об А-профиле, можно ставить вопрос о тройке объектов: экстремаль $\hat{\varphi}(t)$, оптимальное управление $\hat{v}(t)$ и квазипотенциал $V(0, x)$. Управление $\hat{v}(t)$, в соответствии с (30), определяется вектором сопряженных переменных $\psi_t = \psi(t)$. Оказывается, что $\hat{\varphi}(t)$ также определяется вектором ψ_t.

Теорема 3. При условии П2 для системы (31) существуют А-профиль, определяемый соотношением

$$\hat{\varphi}(t) = D\psi(t), \tag{33}$$

соответствующий этому профилю квазипотенциал

$$V(0,x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}D^{-1}x \tag{34}$$

и оптимальное управление, определяемое формулой (30), где вектор сопряженных переменных $\psi(t)$ имеет вид

$$\psi(t) = \mathbf{e}^{A^{\mathrm{T}}(t_K - t)}c_K^{\mathrm{T}}(c_K D c_K^{\mathrm{T}})^{-1}Y_K,$$

а D — единственное положительно определенное решение матричного уравнения:

$$\sigma\sigma^{\mathrm{T}} = -AD - DA^{\mathrm{T}}.$$

Следствие 1. Если $\varphi(t_0, x_0; t)$ — профиль КС, т. е. решение уравнения (31) с управлением (30), (33) и с дополнительным условием $\varphi(t_0, x_0; t_0) = x_0$, то для $t_0 < t' < t_K$

$$\lim_{t_0 \to -\infty} \|\varphi(t_0, x_0;\, t) - \hat{\varphi}(t)\| = 0$$

равномерно по $\{t : t' \leqslant t \leqslant t_K\}$.

Доказательство следует из П2 и того факта, что разность $\varphi(t_0, x_0;\, t) - \hat{\varphi}(t)$ удовлетворяет однородной системе, соответствующей (31).

Из соотношения (34) имеем

$$\hat{S}_{t_0 t_K} = V(0, x_K) - V(0, \hat{\varphi}(t_0)).$$

Полагая

$$P_{t_0 t_K} = P\{x_0 = \hat{\varphi}(t_0) \in D;\ \tilde{x}_{t_K} \in R^n \backslash D\}$$

и обозначая F — множество путей, ведущих из $x_0 \in D$ в $R^n \backslash D$, согласно работе [3] (теорема 1.2, с. 145) получаем при $\varepsilon \to 0$:

$$\varepsilon^2 \ln P_{t_0 t_K} \approx -\hat{S}_{t_0 t_K} = -\min_{\varphi \in F} S_{t_0 t_K}(\varphi, v).$$

В силу следствия очевидна определяющая роль А-профиля в построении алгоритма КГК: текущее состояние системы (1) необходимо сравнивать с А-профилем $\hat{\varphi}(t)$, фиксируя при этом $\hat{S}_{t_0 t_K}$, $P_{t_0 t_K}$, и в тот момент, когда приближение к $\hat{\varphi}(t)$ выразится в превышении потенциалом КС (определение 1) значения порога, должно включиться управление КГК. Здесь нет возможности остановиться на конкретной форме этого управления. Не приводим мы и примеров синтеза конкретных ФУС, их можно найти в работе [2].

Замечание 4. Следствие 1 показывает, что структура окрестности А-профиля аналогична окрестности аттрактора: соседние решения сходятся к А-профилю так же, как это происходит в окрестности аттрактора. Говорят, что окрестность аттрактора соответствует типичным траекториям в том смысле, что подавляющее число реализаций в устойчивой системе принадлежит этому классу траекторий (сходящихся к аттрактору). Тогда с учетом следствия 1 можно говорить об *условной типичности* (для данного КС) траекторий, сходящихся к А-профилю КС, учитывая при этом, что частота попадания траекторий в окрестность А-профиля КС как редкого события существенно меньше, чем частота попаданий в окрестность аттрактора.

Замечание 5. Как уже отмечалось во введении, ФУС, в принципе, строится из тех же элементов, что и робастный H^{∞}-регулятор. И наоборот, из элементов АГК (п. 1) можно сформировать критерий H^{∞}-оптимизации. Аналогично дискретному случаю (замечание 1) имеем

$$\eta(q) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_K} y^{\mathrm{T}}y\,dt + R_{t_0 t_K} - q\,S_{t_0 t_K}, \tag{35}$$

где $R_{t_0 t_K}$ и $S_{t_0 t_K}$ — затраты (соответственно) управления и шума (ФД):

$$R_{t_0 t_K} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_K} U^{\mathrm{T}}RU\,dt,\ S_{t_0 t_K}(\varphi, v) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_K} v^{\mathrm{T}}v\,dt,$$

и для критерия (35) имеем задачу синтеза (рефлексного) управления.

6. Комментарий по поводу структуры ФУС

Структура ФУС, т. е. системы, с заданной вероятностью обеспечивающей жизненный цикл управляемого объекта, определяется наличием второго, глобального контура — КГК, который возникает на основе АБУ. Конечно, для формирования этого второго уровня (второй сигнальной системы) могут быть использованы и другие асимптотические методы, не только АБУ. Хорошо известна роль методов регулярных и сингулярных возмущений в задачах синтеза и оптимизации систем управления [16, 17, 2]. Но, по-видимому, методам АБУ в этом принадлежит особая роль — они формируют семантический базис ФУС, язык (или протоязык), основу которого составляет набор критических состояний и соответствующих им А-профилей.

Замечание 6. Учитывая, что первая сигнальная система многих организмов (в том числе и *Homo Sapiens*) является результатом биологической адаптации (в условиях эволюционной типичности), естественной представляется гипотеза об аналогичном механизме, связанном с условной КС-типичностью: по-видимому, именно так образовались первые лексемы (как соответствующие КС-алармы) первого протоязыка. Так же, как закон больших чисел и центральная предельная теорема в эволюции приводят к первой сигнальной системе и рефлексам, большие уклонения от равновесных режимов формируют (на значительно более протяженных временах) вторую сигнальную систему, в том числе лексемы (сигнификаты) протоязыка.

Заключение

Вероятностный анализ для управляемых стохастических систем, как это хорошо известно ([3], гл. 4, параграф 1), включает: 1) закон больших чисел (теоремы о среднем), 2) центральные предельные теоремы (о нормальных уклонениях) и 3) АБУ. Говоря формально, если нас интересуют процессы с подавляющей вероятностью или с вероятностью, близкой к единице, первых двух типов часто оказывается вполне достаточно, и на этом основано большинство теорий локальной и робастной стабилизации и оптимизации. Существует даже убеждение (или вера), что теорема разделения обеспечивает обычный детерминированный подход к оптимизации, т. е. что шумами вообще можно пренебречь, если предусмотреть дополнительно фильтр или наблюдатель. В действительности, то, чем мы пренебрегаем, при длительном функционировании может приводить к плохо прогнозируемым явлениям, связанным с нелинейностью реальных моделей динамики. Но дело в том, что это, оказывается, далеко не главное. Существо дела состоит именно в том, что, отбрасывая АБУ, мы лишаем систему контура глобального контроля и всего, что с этим связано: семантики, языка и функциональной устойчивости, и искусственно ограничиваем наши возможности рефлексным контуром. Такое ограничение приемлемо в тех случаях, когда функции КГК берет на себя человек (пилот, оператор и т. п.), способный вмешиваться в процесс управления, или когда вся задача управления ограничена по времени. Понятно, что этого нет во многих ситуациях беспилотного, либо длительного и абсолютно автономно управляемого движения. В таких задачах, особенно и при отсутствии возможности обучения, полноценная двухуровневая ФУС-архитектура может быть вполне рациональным решением.

Список литературы

1. **Дубовик С. А.** Использование квазипотенциалов для контроля больших уклонений управляемых процессов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 5. С. 301—307.
2. **Дубовик С. А., Кабанов А. А.** Функционально устойчивые системы управления: асимптотические методы синтеза. М.: ИНФРА-М, 2019. 249 с.
3. **Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.** Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
4. **Пухальский А. А.** Большие уклонения стохастических динамических систем. Теория и приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 512 с.
5. **Габасов Р., Кириллова Ф.** Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 508 с.
6. **Флеминг У., Ришел Р.** Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978. 316 с.
7. **Nijmeijer H., A. van der Schaft**. Nonlinear dynamical control systems. New York: Springer-Verlag, 1990. 467 p.
8. **Соболевский А. Н.** Теория вероятностей и основы математической статистики для физиков. М.: Физ. фак. МГУ им. М. В. Ломоносова, 2007. 46 с.
9. **Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.** Введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1982. 160 с.
10. **Ширяев А. Н.** Вероятность. М.: Наука, 1989. 640 с.
11. **Pham H.** Large deviations in mathematical finance. Univers. Paris, 2010. 58 p.
12. **Дубовик С. А., Кабанов А. А.** Profiles of critical states in diagnostics of controlled processes // ICMTMTE 2018, MATEC Web of Conferences 224. 04024 (2018).
13. **Демидович Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
14. **Пухальский А. А.** К теории больших уклонений // Теория вероятн. и ее применен. 1993. Т. 38. С. 490—497.

15. **Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.** Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
16. **Первозванский А. А., Гайцгори В. Г.** Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М.: Наука, 1979. 344 с.
17. **Васильева А. Б., Дмитриев М. Г.** Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления. М.: ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Мат. анализ. Т. 20. 1982.

Asymptotic Semantization of Data in Control Systems

S. A. Dubovik, duboviksa@gmail.com,
Sevastopol State University, Sevastopol, 299053, Russian Federation

Corresponding author: **Dubovik Sergei A.,** PhD, Head of Department of Informatics and Control in Technical Systems, Sevastopol State University, Sevastopol, 299053, Russian Federation, e-mail: duboviksa@gmail.com

Accepted on April 17, 2019

Abstract

Asymptotic methods for analyzing large deviations in this work are used to convert information about the state of a controlled diffusion process into probabilistic estimates of the normal or abnormal development of the process. Thus, over the reflex contour of local stabilization a system of global semantic control is implemented, a kind of second signal system. A functional analytical approach similar to the weak convergence of probabilistic measures is used as an analysis tool, which makes it possible to significantly expand the conditions for applying the method. Global control is reduced to solving the Lagrange problem in the form of Pontryagin for the system of ordinary differential equations (system of paths), the Ventzel-Freidlin action functional (or "rate function" in some English literature), which is presented here as an integral-quadratic criterion for control functions in the system of paths, and the boundary condition in the form of the critical state of the system. A bounded solution of the Lagrange — Pontryagin problem on the half-line, which gives a prototype of the quasipotential of the system of paths, is called the A-profile of the critical state. The A-profile makes it possible to significantly simplify the procedure for analyzing large deviations, up to its implementation in real time and the implementation of the global control loop (2nd signaling system). The resulting two-tier architecture is positioned as a baseline to achieve the functional stability of the control system. It is speculated that this role of the apparatus of large deviations takes place in biological evolving systems, including the formation of languages and other attributes of the evolution of higher human nervous activity.

Keywords: *action functional, large deviations, extremal, functional stability, global control, evolution, language*

Acknowlegements: The study was carried out by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 17-11-01220).

For citation:

Dubovik S. A. Asymptotic Semantization of Data in Control Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2019, vol. 20, no. 8, pp. 461—471.

DOI: 10.17587/mau.20.461-471

References

1. **Dubovik S. A.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 5, pp. 301—307 (in Russian).
2. **Dubovik S. A., Kabanov A. A.** Functionally stable control systems: asymptotic synthesis methods, Moscow, INFRA-M, 2019, 249 p. (in Russian).
3. **Freidlin M. I., Wentzell A. D.** Random Perturbations of Dynamical Systems. Berlin, Springer-Verlag, 2012, 453 p.
4. **Puhalskii A.** Large deviations and idempotent probability, New York, Chapman & Hall, 2001, 493 p.
5. **Gabasov R.** Qualitative theory of optimal processes, Moscow, Nauka, 1971, 508 p. (in Russian).
6. **Fleming W. H., Rishel R. W.** Deterministic and Stochastic Optimal Control, New York, Springer-Verlag, 1975, 316 p.
7. **Nijmeijer H., van der Schaft A.** Nonlinear dynamical control systems. New York, Springer-Verlag, 1990, 467 p.
8. **Sobolevskij A.** Probability theory and basic mathematical statistics for physicists, Moscow, Phis. phak. MGU, 2007, 46 p. (in Russian).
9. **Kolmogorov A.** Introduction to probability theory, Moscow, Nauka, 1982, 160 p. (in Russian).
10. **Shirjayev A. N.** Probability, Berlin, Springer—Verlag, 1995, 640 p.
11. **Pham H.** Large deviations in mathematical finance, Univers. Paris, 2010, 58 p.
12. **Dubovik S. A., Kabanov A. A.** *ICMTMTE 2018, MATEC Web of Conferences* 224, 04024 (2018).
13. **Demidovitch B. P.** Lectures on the mathematical theory of sustainability, Moscow, Nauka, 1967, 472 p. (in Russian).
14. **Puhalskii A.** *Th. Prob. Appl.*, vol. 38. no. 3, pp. 490—497.
15. **Liptser R., Shiryayev A**. Statistics of Random Processes, New York, Springer-Verlag, 1977, 696 p.
16. **Pervosvanskij A.** Decomposition, aggregation and approximate optimization, Moscow, Nauka, 1979, 344 p. (in Russian).
17. **Vasilyeva A. B., Dmitriev M. G.** Singular perturbations in optimal control problems, Moscow, VINITI, Itogi nauki I techniki, math. analiz, 1982, v. 20 (in Russian).