

**А. А. Колесников**, д-р техн. наук, проф., [ankolesnikov@sfedu.ru](mailto:ankolesnikov@sfedu.ru),  
**А. А. Кузьменко**, канд. техн. наук, доц., [aakuzmenko@sfedu.ru](mailto:aakuzmenko@sfedu.ru),  
Институт компьютерных технологий и информационной безопасности  
Южного федерального университета, г. Таганрог

## Синтез законов разрывного управления на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий метода АКАР\*

*В инженерной практике востребовано широкое использование законов разрывного управления (SMC — sliding mode control) для обеспечения робастности к изменению параметров, внешним возмущениям и немоделируемой динамике объекта управления. Современные возможности теории адаптивного и робастного управления, теории нечетких систем, искусственных нейронных сетей и др., которые объединяются с SMC, не снимают имеющиеся проблемы при синтезе SMC — имеют место значительные трудности векторного синтеза и анализа устойчивости замкнутой системы с SMC. При этом в общем случае классическая задача синтеза SMC заключается в решении подзадач перевода объекта из произвольного начального положения на поверхность скольжения, обеспечения условий существования скользящего режима в любой точке поверхности скольжения, обеспечения устойчивого движения к желаемому состоянию. Традиционно эти подзадачи, как правило, решаются раздельно.*

*В данной статье представлена методика синтеза законов разрывного управления на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий, базирующаяся на методе аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) синергетической теории управления. Методика позволяет осуществлять синтез робастных законов управления и совместно решать классические подзадачи синтеза законов управления со скользящим режимом для нелинейных объектов. При этом также упрощается процедура анализа устойчивости замкнутой системы: условия устойчивости складываются из условий устойчивости решений функциональных уравнений метода АКАР и условий устойчивости финишной декомпозированной системы, размерность которой существенно меньше размерности исходной системы. Несмотря на то что в данной работе подробно изложена только методика синтеза скалярного разрывного управления, ее положения справедливы и для векторного синтеза: основное отличие заключается в числе инвариантных многообразий, вводимых на первом и последующих этапах синтеза.*

*Теоретические положения работы проиллюстрированы примерами синтеза для нелинейных технических систем, которые показывают выполнение поставленных задач управления: достижение целевых инвариантов, нечувствительность к возникающим параметрическим и внешним возмущениям.*

**Ключевые слова:** нелинейные системы управления, робастность, синтез управления, разрывное управление, поверхность скольжения, синергетическая теория управления, метод АКАР, инвариантное многообразие

### Введение

Предложенная в 60-х годах XX века теория разрывного управления (sliding mode control — SMC), заложенная в работах В. И. Уткина, С. В. Емельянова и др. [1–4], была активно воспринята учеными и инженерами-практиками для построения робастных законов управления различными техническими системами. Именно в инженерной практике востребовано широкое использование SMC для обеспечения робастности. Актуальность данной теории также под-

тверждает неумещающееся число научных работ, представленных в базах Scopus и Web of Science. Как всякая востребованная область науки, теория SMC также не стоит на месте — ее дополняют новыми возможностями теории адаптивного и робастного управления, теории нечетких систем, искусственных нейронных сетей и др. [5–11]. Развитие теории SMC привело к созданию и широкому использованию систем со скользящим режимом высокого порядка [12–15], с интегральным скользящим режимом [16, 17]. В ИПУ РАН В. А. Уткиным и С. А. Красновой был разработан принцип блочного управления. В ряде своих научных работ они рассматривают совместное использование

\*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-08-00366.

этого принципа и техники скользящих режимов высокого порядка, интегральных скользящих режимов для построения законов управления сложными системами [17–19].

Основное достоинство SMC в задачах управления техническими системами — обеспечение нечувствительности к изменению параметров объекта, внешним возмущениям и немоделируемой динамике объекта управления. Но указанные выше достоинства и современные достижения не снимают имеющиеся проблемы при синтезе SMC — имеют место значительные трудности векторного синтеза и анализа устойчивости замкнутой системы с SMC.

В общем случае задача синтеза SMC заключается в решении следующих подзадач [1–4]:

1) перевод изображающей точки (ИТ) объекта из произвольного начального положения (в определенной области фазового пространства) на некоторую поверхность скольжения  $s = 0$  (поверхность разрыва управления);

2) обеспечение условий существования скользящего режима в любой точке поверхности скольжения;

3) обеспечение устойчивого движения ИТ к желаемому конечному состоянию (в частном случае — началу координат) фазового пространства объекта.

Традиционно эти подзадачи, как правило, решаются отдельно. Этому недостатка лишен синерго-кибернетический подход, в рамках которого развивается метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) синергетической теории управления. Его использование позволяет преодолеть обозначенные выше трудности синтеза SMC [20, 21]. В данной работе нами предлагается методика аналитического синтеза SMC для нелинейных объектов, в которой перечисленные выше подзадачи решаются совместно. Важно отметить, что описание движения SMC на поверхности скольжения — это также отдельная задача, решение которой традиционно базируется на аксиоматическом подходе и методе эквивалентного управления [3]. В предлагаемой здесь методике проблема описания системы с SMC при ее движении в режиме скольжения таковой не является — для каждого этапа рассматривается своя декомпозированная система, размерность которой меньше размерности системы предыдущего этапа. Также необходимо отметить, что в классических SMC для организации скользящих режимов в пространстве состояния, как

правило, используются линейные поверхности скольжения в виде линейной комбинации переменных состояния объекта управления. Применение синерго-кибернетического подхода в общем случае позволяет использовать нелинейные поверхности скольжения.

### Описание метода

Ранее в работе [22] показано применение метода синтеза нелинейных SMC, в котором в соответствии с методом АКАР [20, 21] на первом этапе явно задавалось единственное многообразие, содержащее целевой инвариант в виде поверхности разрыва управления  $s = 0$ . Однако не всегда возможно сразу явно задать такое многообразие. Поэтому возникает идея применения для синтеза нелинейных SMC последовательной или параллельной совокупности инвариантных многообразий в фазовом пространстве систем, основанная на развитии в методе АКАР скалярном и векторном синтезе [20, 21]. При этом, в зависимости от способа формирования макропеременных  $\psi_k(x_1, \dots, x_{n-1}, s_k)$  функций поверхностей разрыва  $s_k$  можно построить различные процедуры синтеза SMC.

Перейдем к рассмотрению метода аналитического конструирования SMC на основе применения последовательной совокупности инвариантных многообразий. Пусть исходные дифференциальные уравнения объекта управления имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, \dots, x_n) + a_{j+1}x_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1}; \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, \dots, x_n) + u, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$  — вектор переменных состояния,  $\dim \mathbf{x} = n \times 1$ ;  $u = u(\mathbf{x})$  — скалярное управление;  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , — непрерывные дифференцируемые функции.

Для системы (1) ставится задача синтеза SMC: требуется определить такое управление  $u(\mathbf{x})$  в функции переменных состояния объекта (1), которое обеспечивает перевод ИТ объекта из произвольного исходного состояния (в некоторой допустимой области) в заданное состояние, определяемое желаемым инвариантом — целью управления.

На первом этапе синтеза будем рассматривать многообразие

$$\psi_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k |x_k| + |s_1| = 0, \quad (2)$$

где  $s_1$  — это подмногообразие вида

$$s_1 = x_n + u_2(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0, \quad (3)$$

в котором  $u_2(x_1, \dots, x_{n-1})$  — неизвестная на данном этапе непрерывная функция, играющая роль "внутреннего" управления для декомпозированной системы следующего этапа:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, \dots, x_j) + a_{j+1}x_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-2}; \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) - a_n u_2(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned} \quad (4)$$

На основе основного функционального уравнения метода АКАР

$$T_1 \dot{\psi}_1(t) + \psi_1 = 0, \quad (5)$$

в силу исходных уравнений объекта (1), многообразий (2) и (3) находится искомое управление

$$\begin{aligned} u &= \\ &= - \left( \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k (f_k(x_1, \dots, x_n) + a_{k+1}x_{k+1}) \operatorname{sign} x_k \right) \operatorname{sign} s_1 - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} (f_k(x_1, \dots, x_n) + a_{k+1}x_{k+1}) - \\ &\quad - \frac{1}{T_1} \psi_1 \operatorname{sign} s_1 - f_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (6)$$

Это управление переводит ИТ из произвольного начального состояния на многообразии  $\psi_1 = 0$  (2). Поскольку движение относительно  $\psi_1 = 0$  асимптотически устойчиво при  $T_1 > 0$ , это означает, что ИТ неизбежно попадает на подмногообразие (3), т. е. на поверхность скольжения. Устойчивое движение вдоль  $s_1 = 0$  можно организовать, используя подмногообразия  $s_2 = 0, \dots, s_m = 0$ :

$$\begin{aligned} s_2 &= x_{n-1} + u_3(x_1, \dots, x_{n-2}) = 0; \\ &\dots \\ s_m &= x_2 + u_{m+1}(x_1) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

и синтезируя промежуточные управления  $u_2, \dots, u_{m+1}$  на основе функциональных уравнений:

$$T_i \dot{s}_i(t) + s_i = 0, \quad i = \overline{2, m}; \quad T_i > 0. \quad (8)$$

Так, например, управление  $u_2$  находится из уравнения

$$T_2 \dot{s}_2(t) + s_2 = 0, \quad T_2 > 0$$

с учетом (7) в силу уравнений декомпозированной системы (4), описывающих движение вдоль подмногообразия  $s_1 = 0$ .

Аналогично, управление  $u_3$  находится из уравнения

$$T_3 \dot{s}_3(t) + s_3 = 0, \quad T_3 > 0,$$

соответствующего подмногообразия из (7) и уравнений следующей декомпозированной системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, \dots, x_j) + a_{j+1}x_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-3}; \\ \dot{x}_{n-2}(t) &= f_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) - a_{n-1}u_3(x_1, \dots, x_{n-2}), \end{aligned}$$

описывающей движение вдоль подмногообразия  $s_2 = 0$ .

Аналогично рассуждая, получаем, что управление  $u_k$  переводит ИТ на подмногообразии  $s_k = 0$  из (7), движение вдоль которого описывается своей декомпозированной системой, чья размерность на единицу меньше размерности предыдущей.

Очевидно, что исходное управление (6) имеет переменную структуру, а "внутренние" (промежуточные) управления  $u_2, \dots, u_{m+1}$  будут представлять собой некоторые непрерывные функции переменных состояния соответствующей декомпозированной системы. Процедура синтеза закона управления (6) завершается после синтеза или выбора последнего "внутреннего" управления, обеспечивающего выполнение желаемого целевого инварианта. Так, например, если целевой инвариант для системы (1) связан с обеспечением желаемого значения переменной  $x_1$ , то последним "внутренним" управлением будет управление  $u_{m+1}(x_1)$  — управление последнего этапа движения, описываемого дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1) - a_2 u_{m+1}(x_1).$$

Выражение для  $u_{m+1}(x_1)$  выбирается или находится методом АКАР либо другим методом. Затем полученное выражение  $u_{m+1}(x_1)$  подставляется в предыдущее управление  $u_m(x_1, x_2)$ , которое, в свою очередь, подставляется в  $u_{m-1}(x_1, x_2, x_3)$  и т. д., вплоть до управления  $u_2(x_1, \dots, x_{n-1})$ , непосредственно входящего в закон управления (6).

Отметим, что условия устойчивости замкнутой системы согласно методу АКАР [20, 21] складываются из условий устойчивости решений функциональных уравнений (5), (8) и

условий устойчивости финишной декомпозированной системы, размерность которой существенно меньше размерности исходной системы.

Приведенная выше методика синтеза скалярного SMC справедлива и для векторного управления: в этом случае на первом этапе синтеза по числу каналов управления вводятся многообразия вида (2), а последующие этапы идентичны этапам, описанным выше.

Проиллюстрируем представленную выше общую процедуру синтеза для нелинейного объекта третьего порядка.

*Пример 1.* Пусть уравнения объекта имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1) + a_2x_2; \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2) + a_3x_3; \\ \dot{x}_3(t) &= f_3(x_1, x_2, x_3) + u. \end{aligned} \quad (9)$$

Цель управления — обеспечить целевой инвариант  $x_1 = 0$ .

На первом этапе синтеза задаем инвариантное многообразие вида (2):

$$\psi_1 = \beta_1|x_1| + \beta_2|x_2| + |s_1| = 0, \quad (10)$$

где  $s_1 = x_3 + u_2(x_1, x_2)$ .

Подставляя соотношение (10) в функциональное уравнение (5), получаем в силу уравнений объекта (9) искомый закон управления:

$$\begin{aligned} u &= -(\beta_1(f_1(x_1) + a_2x_2)\text{sign}x_1 + \\ &+ \beta_2(f_2(x_1, x_2) + a_3x_3)\text{sign}x_2)\text{sign}s_1 - \\ &- \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(f_1(x_1) + a_2x_2) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(f_2(x_1, x_2) + a_3x_3) \right) - \\ &- \frac{1}{T_1}(\beta_1|x_1| + \beta_2|x_2| + |x_3 + u_2(x_1, x_2)|)\text{sign}s_1 - \\ &- f_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (11)$$

Под действием закона управления (11) ИТ системы (9) попадает в окрестность многообразия (10), движение вдоль которого описывается декомпозированной системой:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1) + a_2x_2; \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2) - a_3u_2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (12)$$

В выражение (11) входит неизвестное на данном этапе "внутреннее" управление  $u_2(x_1, x_2)$ , а также его частные производные. Для нахождения  $u_2(x_1, x_2)$  согласно (7) вводим подмногообразие

$$s_2 = x_2 + u_3(x_1) = 0. \quad (13)$$

Из функционального уравнения вида (8) при  $i = 2$  в силу уравнений декомпозированной системы (12) и подмногообразия (13) находим:

$$\begin{aligned} u_2(x_1, x_2) &= \\ &= \frac{1}{a_3} \left[ f_2(x_1, x_2) + (f_1(x_1) + a_2x_2) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{T_2}(x_2 + u_3(x_1)) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Управление (14) переводит ИТ системы (12) в окрестность подмногообразия  $s_2 = 0$ , движение вдоль которого описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1) - a_2u_3(x_1). \quad (15)$$

Выбрав для системы (15) промежуточное управление, например, вида

$$u_3(x_1) = \frac{1}{a_2}(\alpha x_1 + f_1(x_1)), \quad (16)$$

находим уравнение движения ИТ вдоль  $s_2 = 0$ :

$$\dot{x}_1(t) = -\alpha x_1. \quad (17)$$

Условие асимптотической устойчивости в целом этого уравнения и, следовательно, движения вдоль  $s_2 = 0$  имеет весьма простой вид:  $\alpha > 0$ . Как видим, в этом случае достигается целевой инвариант  $x_1 = 0$ .

Подставим выражение (16) в управление (14) и определим "внутреннее" управление (14) в явном виде, с учетом которого запишем выражение поверхности переключения:

$$\begin{aligned} s_1 &= x_3 + u_2(x_1, x_2) = \\ &= x_3 + \frac{1}{a_3} \left[ f_2(x_1, x_2) + (f_1(x_1) + a_2x_2) \frac{1}{a_2} \left( \alpha + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{a_3 T_2} \left( x_2 + \frac{1}{a_2} (\alpha x_1 + f_1(x_1)) \right) = 0. \end{aligned}$$

Для проверки выполнения условия возникновения скользящего режима

$$s_1 \dot{s}_1(t) < 0 \quad (18)$$

выразим  $\dot{s}_1(t)$  из функционального уравнения (5), записанного с учетом соотношений (10) и (9):

$$\begin{aligned} \dot{s}_1(t) &= -(\beta_1(f_1(x_1) + a_2x_2)\text{sign}x_1 + \\ &+ \beta_2(f_2(x_1, x_2) + a_3x_3)\text{sign}x_2)\text{sign}s_1 - \frac{1}{T_1}\psi_1\text{sign}s_1. \end{aligned}$$

Подставив полученные выше выражения для  $s_1$  и  $\dot{s}_1(t)$  в (18), можно убедиться, что условие (18) выполняется при  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$  и  $\beta_1 \gg \beta_2$ .

Согласно методу АКАР [20, 21] условие устойчивости замкнутой системы (9) с синтезированным управлением (11) складывается из условия устойчивости финишной декомпозированной системы (17), в нашем случае это  $\alpha > 0$ , и условий устойчивости движения к введенным многообразиям (10), (13), которые определяются условиями устойчивости решений функциональных уравнений (5), (8), в нашем случае это  $T_1 > 0$ ,  $T_2 > 0$ .

Итак, вычислив частные производные  $u_2(x_1, x_2)$  и подставив их в управление (11), получим итоговое выражение для искомого закона управления объектом (9), обеспечивающего устойчивость замкнутой системы, скользящий режим и выполнение целевого инварианта  $x_1 = 0$ .

Как видим, управление (11) имеет переменную структуру, а "внутренние" (промежуточные) управления (14), (16) представляют собой непрерывные функции переменных состояния системы (9).

*Пример 2.* Рассмотрим пример синтеза SMC математическим маятником в верхнем неустойчивом положении [23]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2; \\ \dot{x}_2(t) &= \sin x_1 + x_3; \\ \dot{x}_3(t) &= u. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $x_1$  — угол отклонения маятника от вертикали;  $x_2$  — скорость отклонения;  $x_3$  — момент, приложенный к маятнику.

Ставится задача стабилизации маятника моментом, приложенным к нему на оси подвеса. Указанный момент развивается исполнительным механизмом, который представлен интегрирующим звеном. Требуется найти SMC  $u(x_1, x_2, x_3)$  на входе исполнительного механизма, которое стабилизирует маятник в верхнем положении равновесия, т. е. обеспечивает целевой инвариант  $x_1 = 0$  и асимптотическую устойчивость системы.

Как видим, уравнения объекта (19) соответствуют виду (9) при  $a_2 = a_3 = 1$ ,  $f_1(x_1) = f_3(x_1, x_2, x_3) = 0$ ,  $f_2(x_1, x_2) = \sin x_1$ . Тогда, повторяя этапы синтеза Примера 1, получаем из (16):  $u_3(x_1) = \alpha x_1$  из (14):  $u_2(x_1, x_2) = \sin x_1 + \alpha x_2 + \frac{1}{T_2}(x_2 + \alpha x_1)$ ; а из (11):

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= -(\beta_1 x_2 \operatorname{sign} x_1 + \beta_2 (\sin x_1 + x_3) \operatorname{sign} x_2) \operatorname{sign} s_1 - \\ &- \left( \left( \cos x_1 + \frac{\alpha}{T_2} \right) x_2 + \left( \alpha + \frac{1}{T_2} \right) (\sin x_1 + x_3) \right) - \\ &- \frac{1}{T_1} (\beta_1 |x_1| + \beta_2 |x_2| + |s_1|) \operatorname{sign} s_1, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $s_1 = x_3 + u_2(x_1, x_2)$ .

Условие (18) в нашем случае принимает вид

$$\begin{aligned} &\left[ -(\beta_1 x_2 \operatorname{sign} x_1 + \beta_2 (\sin x_1 + x_3) \operatorname{sign} x_2) \times \right. \\ &\quad \left. \times \operatorname{sign} s_1 - \frac{1}{T_1} \psi_1 \operatorname{sign} s_1 \right] \times \\ &\times \left[ x_3 + \sin x_1 + \alpha x_2 + \frac{1}{T_2} (x_2 + \alpha x_1) \right] < 0 \end{aligned}$$

и выполняется при  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$  и  $\beta_1 \gg \beta_2$ , а условия асимптотической устойчивости замкнутой системы (19), (20):  $\alpha > 0$ ,  $T_1 > 0$ ,  $T_2 > 0$ .

*Пример 3.* В работе [22] был подробно описан синтез SMC энергосистемой с одним синхронным генератором (СГ), работающим на шины большой (бесконечной) мощности, на основе заданного инвариантного многообразия. Рассмотрим теперь синтез SMC на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий, обеспечивающего стабилизацию частоты вращения СГ  $\omega = \omega_0$ . Математическая модель объекта управления, представленная в работе [22], имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= \omega - \omega_0; \\ \dot{\omega}(t) &= a_0 - a_1 E'_q \sin \delta - a_2 (\omega - \omega_0); \\ \dot{E}'_q(t) &= -a_3 E'_q - a_4 \cos \delta + a_3 E_f, \end{aligned} \quad (21)$$

здесь  $\delta$  — синхронный угол СГ;  $\omega$  — частота вращения ротора СГ;  $\omega_0$  — синхронная частота СГ;  $E'_q$  — переходная ЭДС СГ по оси  $q$ ;  $E_f$  — напряжение возбуждения СГ (сигнал управления);  $a_i$ ,  $i = 0, 4$ , — постоянные коэффициенты.

На первом этапе синтеза задаем инвариантное многообразие вида (2):

$$\psi_1 = \beta_1 |\delta - \delta_0| + \beta_2 |\omega - \omega_0| + |s_1| = 0, \quad (22)$$

где  $s_1 = a_1 E'_q \sin \delta + u_2(\delta, \omega)$ . Как видим, в этом случае выражение для  $s_1$  отличается от выражения (3).

Подставляя (22) в функциональное уравнение (5), получаем в силу уравнений объекта (21) закон управления

$$E_f = -\frac{1}{a_1 a_3 \sin \delta} \times \left( \begin{aligned} &\beta_1(\omega - \omega_0) \text{sign}(\delta - \delta_0) + \\ &+ \beta_2(a_0 - a_1 E'_q \sin \delta - \\ &- a_2(\omega - \omega_0)) \text{sign}(\omega - \omega_0) \end{aligned} \right) \text{sign} s_1 + E'_q + \frac{a_4}{a_3} \cos \delta - \frac{1}{a_1 a_3 \sin \delta} \times \left( \begin{aligned} &a_1 E'_q (\omega - \omega_0) \cos \delta + \frac{\partial u_2}{\partial \delta} (\omega - \omega_0) + \\ &+ \frac{\partial u_2}{\partial \omega} (a_0 - a_1 E'_q \sin \delta - a_2 (\omega - \omega_0)) + \\ &+ \frac{1}{T_1} \psi_1 \text{sign} s_1 \end{aligned} \right). \quad (23)$$

Под действием закона управления (23) ИТ системы (21) попадает в окрестность многообразия (22), движение вдоль которого описывается декомпозированной системой

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= \omega - \omega_0; \\ \dot{\omega}(t) &= a_0 + u_2 - a_2(\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (24)$$

Выберем для системы (24) промежуточное управление, например, вида

$$u_2 = -(a_2 + \lambda_2)(\omega - \omega_0) - \lambda_1 \delta. \quad (25)$$

Тогда уравнение движения ИТ системы (24) с учетом (25) имеет вид

$$\ddot{\delta}(t) + \lambda_2 \dot{\delta}(t) + \lambda_1 \delta(t) = a_0.$$

Условие асимптотической устойчивости в целом этого уравнения имеет весьма простой вид:  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , а выбором значений этих параметров можно обеспечить желаемый вид переходного процесса по углу СГ. А условие возникновения скользящего режима (18) обеспечивается выбором параметров  $\lambda_i$ ,  $\beta_i$ .

На рис. 1, 2 показаны результаты моделирования замкнутой системы (21), (23) с номинальными параметрами СГ [22]:  $\omega_0 = 1$ ;  $a_0 = 0,128$ ;  $a_1 = 0,304$ ;  $a_2 = 0,571$ ;  $a_3 = 0,125$ ;  $a_4 = 0,452$  и параметрами закона управления:  $\beta_1 = 10$ ;  $\beta_2 = 20$ ;  $\delta_0 = 0,4$ ;  $T_1 = 2$ ;  $\lambda_1 = 100$ ;  $\lambda_2 = 20$ .

При моделировании замкнутой системы в СГ рассматриваются параметрические возму-

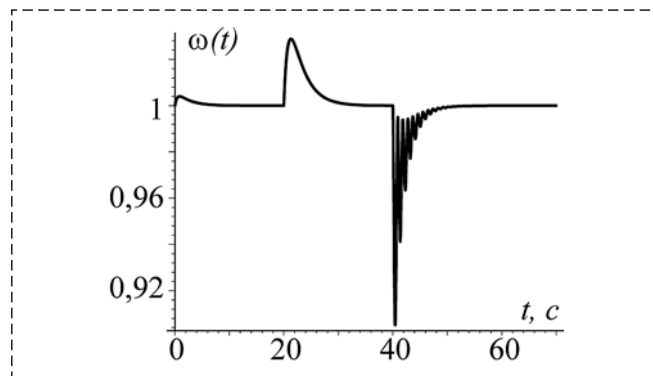


Рис. 1. График изменения частоты вращения  
Fig. 1. Dynamics of rotation speed

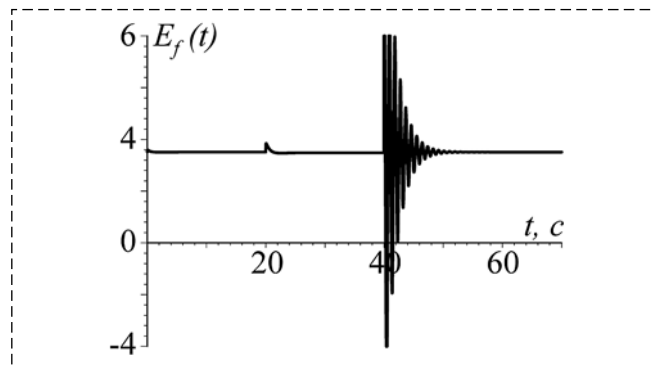


Рис. 2. График изменения управления  
Fig. 2. Dynamics of excitation control

щения: в момент  $t = 20$  с в десять раз увеличивается эквивалентное индуктивное сопротивление линии электропередачи, а в момент  $t = 40$  с на 30 % уменьшается механическая мощность, поступающая на СГ. Из результатов моделирования видно, что закон управления (23) обеспечивает робастность к этим возмущениям и выполнение целевого инварианта  $\omega = \omega_0$ .

*Пример 4.* Рассмотрим применение методики синтеза SMC на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий для решения задачи обеспечения робастности при синхронизации двух хаотических систем с аттрактором Спротта (Sprott's jerk system).

Математическая модель объекта управления с двумя системами Спротта согласно работе [24] представлена:

- моделью ведущей системы (master system)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2; \\ \dot{x}_2(t) &= x_3; \\ \dot{x}_3(t) &= -ax_1 + x_2^2 - bx_3, \end{aligned}$$

где  $x_i$  — переменные состояния ведущей системы;  $a > 0$ ,  $b > 0$  — постоянные параметры;

- моделью ведомой системы (slave system)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2; \\ \dot{y}_2(t) &= y_3; \\ \dot{y}_3(t) &= -ay_1 + y_2^2 - by_3 + u, \end{aligned}$$

где  $y_i$  — переменные состояния ведомой системы;  $u$  — управление.

Вводя новые переменные — ошибки синхронизации  $e_i(t) = y_i(t) - x_i(t)$ ,  $i = \overline{1,3}$ , совместную динамику ведущей и ведомой систем согласно работе [24] представим следующей системой:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= e_2; \\ \dot{e}_2(t) &= e_3; \\ \dot{e}_3(t) &= -ae_1 + y_2^2 - x_2^2 - be_3 + u. \end{aligned} \quad (26)$$

Для системы (26) ставится задача построения разрывного закона управления, обеспечивающего синхронизацию ведущей и ведомой систем и робастность к внешнему возмущению, действующему на ведущую систему.

На первом этапе синтеза задаем инвариантное многообразие вида (2):

$$\psi_1 = \beta_1 |e_1| + \beta_2 |e_2| + |s_1| = 0, \quad (27)$$

где  $s_1 = e_3 + u_2(e_1, e_2)$ .

Подставляя соотношение (27) в функциональное уравнение (5), получаем в силу уравнений объекта (26) закон управления

$$\begin{aligned} u &= -(\beta_1 e_2 \text{sign} e_1 + \beta_2 e_3 \text{sign} e_2) \text{sign} s_1 + \\ &+ ae_1 - y_2^2 + x_2^2 + be_3 - \\ &- \frac{\partial u_2}{\partial e_1} e_2 - \frac{\partial u_2}{\partial e_2} e_3 - \frac{1}{T_1} \psi_1 \text{sign} s_1. \end{aligned} \quad (28)$$

Под действием закона управления (28) ИТ системы (26) попадает в окрестность многообразия (27), движение вдоль которого описывается декомпозированной системой:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= e_2; \\ \dot{e}_2(t) &= -u_2(e_1, e_2). \end{aligned} \quad (29)$$

Выберем для системы (29) промежуточное управление, например, вида

$$u_2(e_1, e_2) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2. \quad (30)$$

Тогда движение ИТ системы (29) будет описываться уравнением

$$\ddot{e}_1(t) + \lambda_2 \dot{e}_1(t) + \lambda_1 e_1 = 0.$$

Условие асимптотической устойчивости в целом этого уравнения имеет весьма простой вид:  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , а выбором значений этих параметров можно обеспечить желаемый вид переходного процесса. Условие возникновения скользящего режима (18) обеспечивается выбором параметров  $\lambda_j$ ,  $\beta_j$ . Таким образом, подставляя управление (30) в закон (28), получим итоговое выражение для управления.

В работе [24] на основе бэкстеппинга для системы (26) был получен следующий закон управления:

$$u = (a - 3)e_1 - 5e_2 + (b - 3)e_3 - y_2^2 + x_2^2. \quad (31)$$

На рис. 3–5 показаны результаты моделирования замкнутой системы (26), (28) с номинальными параметрами системы Спротта [24]:  $a = 1$ ;  $b = 2,02$  и параметрами закона управления:  $T_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0,2$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ . На рис. 6–8 показаны результаты моделирования замкнутой системы (26), (31) с такими же параметрами системы Спротта. При этом в обоих слу-

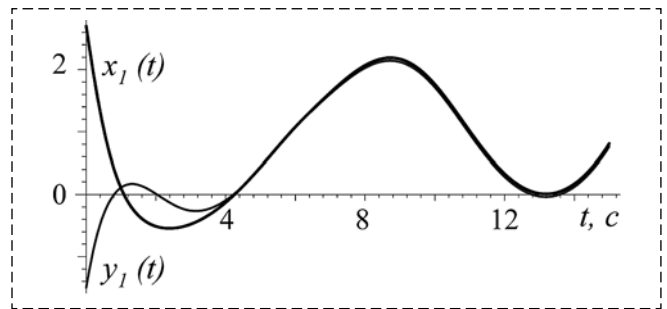


Рис. 3. График изменения переменных  $x_1$ ,  $y_1$  с законом (28)  
Fig. 3. Synchronization of the states  $x_1$ ,  $y_1$  with control (28)

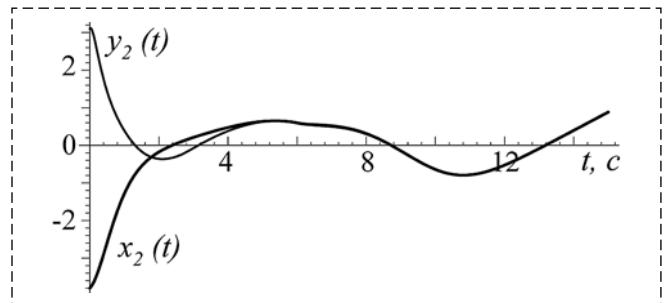


Рис. 4. График изменения переменных  $x_2$ ,  $y_2$  с законом (28)  
Fig. 4. Synchronization of the states  $x_2$ ,  $y_2$  with control (28)

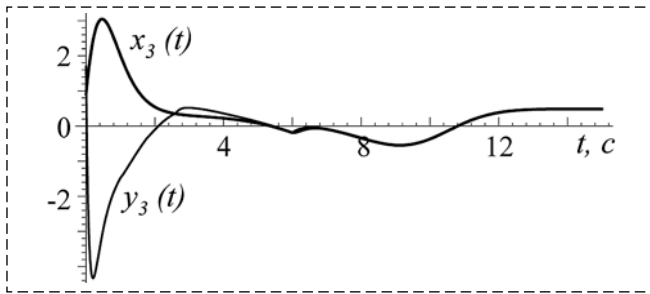


Рис. 5. График изменения переменных  $x_3, y_3$  с законом (28)  
Fig. 5. Synchronization of the states  $x_3, y_3$  with control (28)

чаях ведущая система подвержена внешнему возмущению

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 6 < t < 10; \\ 0, & t > 10, \end{cases} \quad (32)$$

которое аддитивно входит в третье уравнение.

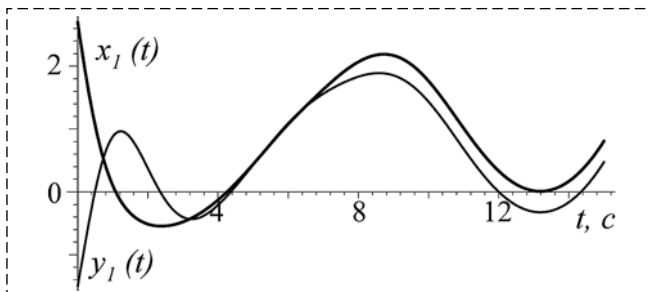


Рис. 6. График изменения переменных  $x_1, y_1$  с законом (31)  
Fig. 6. Synchronization of the states  $x_1, y_1$  with control (31)

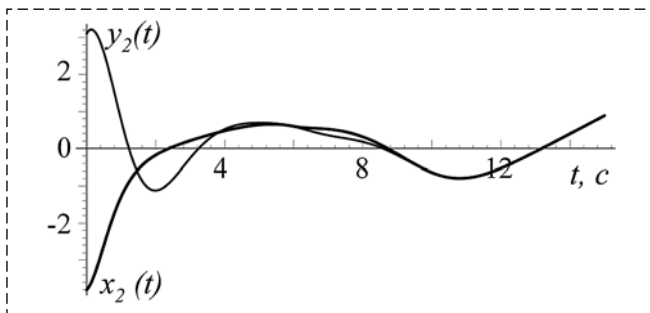


Рис. 7. График изменения переменных  $x_2, y_2$  с законом (31)  
Fig. 7. Synchronization of the states  $x_2, y_2$  with control (31)

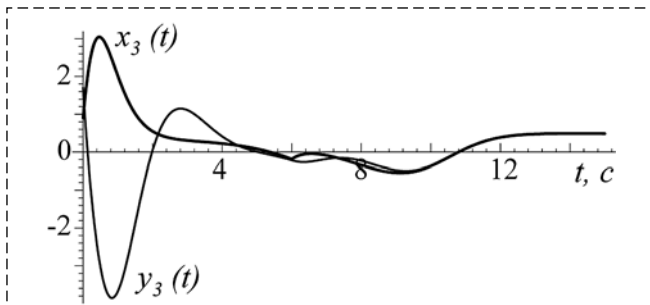


Рис. 8. График изменения переменных  $x_3, y_3$  с законом (31)  
Fig. 8. Synchronization of the states  $x_3, y_3$  with control (31)

Из рис. 3—5 видно, что под действием управления (28) переменные состояния ведущей системы синхронизируются с переменными состояниями ведомой системы и они оказываются нечувствительными к внешнему возмущению (32). При этом по переменной  $x_1$  наблюдаются незначительные колебания, вызванные скользящим режимом. А согласно рис. 6—8 при действии управления (31) часть переменных также синхронизируется — ошибки  $e_i(t) \rightarrow 0$ ,  $i = 2, 3$ , но на их поведение влияет внешнее возмущение — появляется ненулевая ошибка синхронизации  $e_1(t)$ , что видно из рис. 6.

### Заключение

Итак, в данной работе представлена методика синтеза законов разрывного управления на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий метода АКАР. Данная методика позволяет осуществлять синтез робастных законов управления и совместно решать классические подзадачи синтеза SMC для нелинейных объектов, а также упрощает процедуру анализа устойчивости замкнутой системы. В общем случае возможно использование нелинейных выражений для поверхностей скольжения.

Изложенная методика проиллюстрирована примерами синтеза для нелинейных технических систем, которые показывают выполнение поставленных задач управления.

В последующих работах будет показано применение рассмотренной в статье методики для векторного синтеза законов разрывного управления нелинейными системами.

### Список литературы

1. Уткин В. И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974. 272 с.
2. Utkin V. Variable structure systems with sliding modes // IEEE Transactions on Automatic Control. 1977. Vol. 22, N. 2. P. 212—222.
3. Utkin V., Guldner J., Shi J. Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. 2nd ed. Boca Raton, London: CRC Press, Taylor and Francis, 2009. 503 p.
4. Теория систем с переменной структурой / Под ред. С. В. Емельянова. М.: Наука, 1970. 592 с.
5. Park B. S., Yoo S. J., Park J. B., Choi Y. H. Adaptive Neural Sliding Mode Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots with Model Uncertainty // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2009. Vol. 17, N. 1. P. 207—214.
6. Al-Holou N., Lahdhiri T., Joo D. S., Weaver J., Al-Abbas F. Sliding mode neural network inference fuzzy logic control for active suspension systems // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2002. Vol. 10, N. 2. P. 234—246.



7. Yu X. H., Man Z. H. Model reference adaptive control systems with terminal sliding modes // International Journal of Control. 1996. Vol. 64, N. 6. P. 1165—1176.
8. Palm R. Robust-control by fuzzy sliding mode // Automatica. 1994. Vol. 30, N. 9. P. 1429—1437.
9. Huang Y.-J., Kuo T.-C., Chang S.-H. Adaptive sliding-mode control for nonlinear systems with uncertain parameters // IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics: Part B — Cybernetics. 2008. Vol. 38, N. 2. P. 534—539.
10. Tong S. C., Li H. X. Fuzzy adaptive sliding-mode control for MIMO nonlinear systems // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2003. Vol. 11, N. 3. P. 354—360.
11. Nekoukar V., Erfanian A. Adaptive fuzzy terminal sliding mode control for a class of MIMO uncertain nonlinear systems // Fuzzy Sets and Systems. 2011. Vol. 179. P. 34—49.
12. Bartolini G., Pisano A., Punta E., Usai E. A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems // International Journal of Control. 2003. Vol. 76, N. 9—10. P. 875—892.
13. Emelyanov S. V., Korovin S. K., Levant A. Higher-order sliding modes in control systems // Differential Equations. 1993. Vol. 29. P. 1627—1647.
14. Levant A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control // International Journal of Control. 2003. Vol. 75, N. 9—10. P. 924—941.
15. Cavallo A., Natale C. High-order sliding control of mechanical systems: Theory and experiments // Control Engineering Practice. 2004. Vol. 12. P. 1139—1149.
16. Laghrouche S., Plestan F., Glumineau A. Higher order sliding mode control based on integral sliding mode // Automatica. 2007. Vol. 43. P. 531—537.
17. Loukianov A. G., Espinosa-Guerra O., Castillo-Toledo B., Utkin V. A. Integral sliding mode control for systems with time delay // Proceedings of the 2006 International workshop on variable structure systems, VSS'06. 2006. P. 256—261.
18. Кочетков С. А., Краснова С. А., Уткин В. А. Метод регуляризации скользящих движений по обратной связи // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 1, № 4. С. 67—77.
19. Уткин В. А., Loukianov A. G. Управление ветряной энергосистемой на скользящих режимах // Сборник трудов XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014). М.: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. С. 2257—2267.
20. Колесников А. А. Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994. 344 с.
21. Колесников А. А. Синергетические методы управления сложными системами: теория системного синтеза. 2-е изд. М.: Либроком, 2012. 240 с.
22. Кузьменко А. А., Попов А. Н., Радионов И. А. Нелинейное робастное управление возбуждением синхронного генератора: синергетическая система с переменной структурой // Информатика и системы управления. 2014. № 3(41). С. 130—139.
23. Колесников А. А., Колесников Ал. А., Кузьменко А. А. Методы АКАР и АКОР в задачах синтеза нелинейных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 10. С. 657—669.
24. Vaidyanathan S., Idowu B. A., Azar A. T. Backstepping controller design for the global chaos synchronization of Sprott's jerk systems // Studies in Computational Intelligence. 2015. Vol. 581. P. 39—58.

## Sliding Mode Control Laws Design by the ADAR Method with Subsequent Invariant Manifolds Aggregation

A. A. Kolesnikov, [ankolesnikov@sfedu.ru](mailto:ankolesnikov@sfedu.ru), A. A. Kuz'menko, [aakuzmenko@sfedu.ru](mailto:aakuzmenko@sfedu.ru),  
Southern Federal University, Taganrog city, 347922, Russian Federation

Corresponding author: **Kuz'menko Angrew A.**, Associated Professor,  
Southern Federal University, Taganrog city, 347922, Russian Federation, e-mail: [aakuzmenko@sfedu.ru](mailto:aakuzmenko@sfedu.ru)

Accepted on March 26, 2019

### **Abstract**

*Sliding mode control (SMC) laws are commonly used in engineering to make a system robust to parameters change, external disturbances and control object unmodeled dynamics. State-of-the-art capabilities of the theory of adaptive and robust control, the theory of fuzzy systems, artificial neural networks, etc., which are combined with SMC, couldn't resolve current issues of SMC design: vector design and stability analysis of a closed-loop system with SMC are involved with considerable complexity. Generally the classical problem of SMC design consists in solving subtasks for transit an object from an arbitrary initial position onto the sliding surface while providing conditions for existence of a sliding mode at any point of the sliding surface as well as ensuring stable movement to the desired state. As a general rule these subtasks are solved separately. This article presents a methodology for SMC design based on successive aggregation of invariant manifolds by the procedure of method of Analytical Design of Aggregated Regulators (ADAR) from the synergetic control theory. The methodology allows design of robust control laws and simultaneous solution of classical subtasks of SMC design for nonlinear objects. It also simplifies the procedure for closed-loop system stability analyze: the stability conditions are made up of stability criteria for ADAR method functional equations and the stability criteria for the final decomposed system which dimension is substantially less than dimension of the initial system. Despite our paper presents only the scalar SMC design procedure in details, the ideas are also valid for vector design procedure: the main difference is in the number of invariant manifolds introduced at the first and following stages of the design procedure. The methodology is illustrated with design procedure examples for nonlinear engineering systems demonstrating the achievement of control goals: hitting to target invariants, insensitivity to emerging parametric and external disturbances.*

**Keywords:** nonlinear systems, control systems, system synthesis, robustness, sliding mode control, sliding surface, synergetic control theory, ADAR method, invariant manifold, synchronous generator, chaos synchronization

**Acknowledgements:** The study was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research in the framework of the research project No. 19-08-00366.

For citation:

**Kolesnikov A. A., Kuz'menko A. A.** Sliding Mode Control Laws Design by the ADAR Method with Subsequent Invariant Manifolds Aggregation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 8, pp. 451–460.

DOI: 10.17587/mau.20.451-460

### References

1. **Utkin V. I.** Sliding modes and their application in systems with variable structure, Moscow, Nauka, 1974, 272 p. (in Russian).
2. **Utkin V.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 212–222.
3. **Utkin V., Guldner J., Shi J.** Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. 2nd ed., Boca Raton, London, CRC Press, Taylor and Francis, 2009, 503p.
4. **Emel'janov S. V.** ed. Theory of systems with variable structure, Moscow, Nauka, 1970, 592 p.
5. **Park B. S., Yoo S. J., Park J. B., Choi Y. H.** *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009, vol. 17, no. 1, pp. 207–214.
6. **Al-Holou N., Lahdhiri T., Joo D. S., Weaver J., Al-Abbas F.** *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2002, vol. 10, no. 2, pp. 234–246.
7. **Yu X. H., Man Z. H.** *International Journal of Control*, 1996, vol. 64, no. 6, pp. 1165–1176.
8. **Palm R.** *Automatica*, 1994, vol. 30, no 9, pp. 1429–1437.
9. **Huang Y.-J., Kuo T.-C., Chang S.-H.** *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics: Part B — Cybernetics*, 2008, vol. 38, no. 2, pp. 534–539.
10. **Tong S. C., Li H. X.** *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2003, vol. 11, no. 3, pp. 354–360.

11. **Nekoukar V., Erfanian A.** *Fuzzy Sets and Systems*, 2011, vol. 179, pp. 34–49.
12. **Bartolini G., Pisano A., Punta E., Usai E.** *International Journal of Control*, 2003, vol. 76, no. 9–10, pp. 875–892.
13. **Emelyanov S. V., Korovin S. K., Levant A.** *Differential Equations*, 1993, vol. 29, pp. 1627–1647.
14. **Levant A.** *International Journal of Control*, 2003, vol. 75, no. 9–10, pp. 924–941.
15. **Cavallo A., Natale C.** *Control Engineering Practice*, 2004, vol. 12, pp. 1139–1149.
16. **Laghrouche S., Plestan F., Glumineau A.** *Automatica*, 2007, vol. 43, pp. 531–537.
17. **Loukianov A. G., Espinosa-Guerra O., Castillo-Toledo B., Utkin V. A.** *Proceedings of the 2006 International workshop on variable structure systems, VSS'06*, 2006, pp. 256–261.
18. **Kochetkov S. A., Krasnova S. A., Utkin V. A.** *Ufimskij Matematicheskij Zhurnal*, 2010, vol. 1, no. 4, pp. 67–77 (in Russian).
19. **Utkin V. A., Loukianov A. G.** *Sbornik trudov XII Vserossijskogo soveshhanija po problemam upravlenija (VSPU-2014)*, Moscow, Institut problem upravlenija im. V. A. Trapeznikova, 2014, pp. 2257–2267 (in Russian).
20. **Kolesnikov A. A.** Synergetic control theory, Moscow, Jenergoatomizdat, 1994, 344 p. (in Russian).
21. **Kolesnikov A. A.** Synergetic methods of complex systems control: theory of system synthesis, Moscow, Librokom, 2012, 240 p. (in Russian).
22. **Kuz'menko A. A., Popov A. N., Radionov I. A.** *Informatika I Sistemy Upravlenija*, 2014, no. 3(41), pp. 130–139 (in Russian).
23. **Kolesnikov A. A., Kolesnikov A. A., Kuz'menko A. A.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 10, pp. 657–669 (in Russian).
24. **Vaidyanathan S., Idowu B. A., Azar A. T.** *Studies in Computational Intelligence*, 2015, vol. 581, pp. 39–58.



### ИНФОРМАЦИОННОЕ ПИСЬМО

С 30 октября по 1 ноября 2019 года в Санкт-Петербургском государственном электротехническом университете «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) (Россия, Санкт-Петербург) состоится III Международная научная конференция по проблемам управления в технических системах (ПУТС-2019).

#### ОРГАНИЗАТОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ

- Министерство науки и высшего образования
  - Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»)
  - ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электрон»
  - Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН (СПИИРАН)
  - Российская Северо-Западная секция IEEE
  - ООО «Мицубиси электрик (рус)»
  - АО «НПФ «Система-Сервис»
  - ООО «Амтел»
- Конференция проходит при поддержке Комитета по науке и высшей школе Правительства Санкт-Петербурга.

#### СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ

1. СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
3. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ
4. МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В УПРАВЛЕНИИ
5. РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЛЕКСЫ