УДК 531.36; 62-50 DOI: 10.17587/mau.20.398-404

В. И. Воротников, д-р физ.-мат. наук, проф., vorotnikov-vi@rambler.ru,
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург

К задаче устойчивости по части переменных функционально-дифференциальных систем с последействием

Развитие теории и качественных методов исследования нелинейных систем функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием) представляет значительный интерес для современной нелинейной теории управления и многочисленных приложений. Важной в теоретическом и прикладном плане является задача исследования устойчивости процессов, описываемых системами уравнений данного класса.

В данной статье для нелинейной нестационарной системы функционально-дифференциальных уравнений с последействием общего вида рассматривается задача устойчивости нулевого положения равновесия по отношению не ко всем переменным, определяющим состояние указанной системы, а только по отношению к их некоторой части. Формально-математическая трактовка такой устойчивости восходит к работам А. М. Ляпунова и В. В. Румянцева с соответствующим уточнением применительно к рассматриваемому классу систем. Данная постановка задачи естественным образом возникает в приложениях как исходя из требований нормального функционирования, так и при оценке возможностей проектируемой системы, и позволяет лучше понять процессы, протекающие в сложных управляемых системах. Находятся условия на структурную форму рассматриваемой системы, при которых устойчивость по заданной части переменных нулевого положения равновесия означает его устойчивость по отношению к другой — бóльшей части переменных, включающих некоторую дополнительную группу переменных. Указанные условия включают в себя условие равномерной асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия подсистемы, "приведенной" по дополнительной группе переменных, а также ограничение на связь "приведенной" подсистемы с другими частями изучаемой системы. Дается приложение к задаче стабилизации по отношению к части переменных управляемых систем.

Ключевые слова: *нелинейная система функционально-дифференциальных уравнений с последействием, устойчивость по части переменных*

Введение

Теория систем функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием) является бурно развивающимся разделом современной математики, который находит применение при проектировании сложных систем автоматического управления, а также в процессе анализа различных математических моделей. При этом важной в теоретическом и прикладном плане является задача устойчивости процессов, описываемых системами уравнений данного класса [1—8].

Подчеркнем, что в большинстве работ устойчивость анализируется по всем переменным, определяющим состояние системы. Однако для многих важных в приложениях случаев представляют интерес более общие задачи: об устойчивости не по всем, а только по заданной части фазовых переменных [3, 9—14], а также по отношению к некоторой заданной функции ("по выходу" системы) [15—17]. Основополагающими для данного направления являются публикации В. В. Румянцева [18] (для систем обыкновенных дифференциальных уравнений), а также А. Халаная [19] и К. Кордуняну [20] для систем функционально-дифференциальных уравнений.

В контексте этих исследований небезынтересно проанализировать структуру изучаемой системы функционально-дифференциальных уравнений, в которой устойчивость по части переменных нулевого положения равновесия означает его устойчивость по отношению к другой — бóльшей части переменных, включающих некоторую дополнительную группу переменных. Указанная задача рассматривается далее в данной статье.

1. Постановка задачи

Пусть $\tau > 0$ — заданное действительное число, R^n — линейное действительное пространство n-мерных векторов $\mathbf{x}$ с нормой $|\mathbf{x}| = \max|x_i|$ (x_i — i-я компонента вектора $\mathbf{x}$), C — банахово пространство непрерывных функций $\boldsymbol{\varphi}$: $[-\tau, 0] \to R^n$ с стандартной супремум-нормой $\|\boldsymbol{\varphi}\| = \sup|\boldsymbol{\varphi}(\theta)|$ ($\theta \in [-\tau, 0]$), $R_+ = [0, +\infty)$. Если t_0, $\beta \in R_+$, $\beta > t_0$, то для непрерывной функции $\mathbf{x}(t)$: $[t_0 - \tau, \beta) \to R^n$ определим функцию $\mathbf{x}_t \in C$ соотношением $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t + \theta)$ ($\theta \in [-\tau, 0]$); под $\mathbf{x}'(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Сделаем разбиение $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ ($^{\mathrm{T}}$ — знак транспонирования), где $\mathbf{y} \in R^m$, $\mathbf{z} \in R^{n-m}$ ($1 \leqslant m \leqslant n$).

В соответствии с этим разбиением положим $C = C^{\mathbf{y}} \times C^{\mathbf{z}}$, где $C^{\mathbf{y}}$ и $C^{\mathbf{z}}$ — банаховы пространства непрерывных функций $\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{y}$: $[-\tau, 0] \to R^m$ и $\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z}$: $[-\tau, 0] \to R^{n-m}$ с нормами $\|\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{y}\| = \sup|\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{y}(\theta)|$ и $\|\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z}\| = \sup|\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z}(\theta)|$ $(\theta \in [-\tau, 0])$. Для $\boldsymbol{\varphi} \in C$ имеем $\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ и $\|\boldsymbol{\varphi}\| = \max(\|\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{y}\|, \|\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z}\|)$.

Рассмотрим нелинейную нестационарную систему функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием)

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_t), \ \mathbf{X}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}. \qquad (1)$$

Допустим, что оператор $\mathbf{X}$: $R_+ \times C \to R^n$, определяющий правую часть системы (1), вполне непрерывен в области

$$G = R_+ \times S = \{t \geqslant 0, \|\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{y}\| < h, \|\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z}\| < \infty\} \qquad (2)$$

(h — достаточно малое положительное число) и на каждом компактном подмножестве K из области (2) выполняется условие Коши—Липшица: существует постоянная $l = l(K) > 0$ такая, что для любых $(t, \boldsymbol{\varphi}_1)$, $(t, \boldsymbol{\varphi}_2) \in K$ имеет место неравенство

$$|\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\varphi}_2) - \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\varphi}_1)| \leqslant l\|\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1\|.$$

Тогда [2] для каждой точки t_0, $\boldsymbol{\varphi}$ из области (2) существует единственное решение $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ системы (1), продолжимое до границы области S и непрерывно зависящее от t_0, $\boldsymbol{\varphi}$.

Следуя работе [3], обозначим $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})$ значение $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ в момент времени t и введем предположение о $\mathbf{z}$-продолжимости решений [3,9]: решения системы (1) определены при тех $t \geqslant t_0$, при которых $|\mathbf{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| < h$.

Учитывая специфику рассматриваемой далее задачи устойчивости по части переменных, сделаем разбиение $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, так что $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Соответственно, компоненту $\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{y}$ вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}$ также разобьем на две части $\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{y} = (\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}1}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, так что $\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}1}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

Определения [9]. Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1):

1) *равномерно* $\mathbf{y}$*-устойчиво* ($\mathbf{y}_1$*-устойчиво*), если для каждого $t_0 \geqslant 0$, а также для произвольного числа $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \delta$ следует неравенство $|\mathbf{y}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon$ $(|\mathbf{y}_1(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon)$ при всех $t \geqslant t_0$;

2) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво* ($\mathbf{y}_1$*-устойчиво*), если оно $\mathbf{y}$-устойчиво ($\mathbf{y}_1$-устойчиво) равномерно по t_0 и найдется число $\Delta > 0$ такое, что произвольное решение $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ системы (1) с $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \Delta$ равномерно по t_0, $\boldsymbol{\varphi}$ из области $t_0 \geqslant 0$, $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \Delta$ удовлетворяет предельному соотношению $\lim |\mathbf{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| = 0$, $t \to \infty$ $(\lim |\mathbf{y}_1(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| = 0$, $t \to \infty)$.

Задача. Требуется указать структурную форму нелинейной системы (1), для которой равномерная $\mathbf{y}_1$-устойчивость (равномерная асимптотическая $\mathbf{y}_1$-устойчивость) положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ означает его равномерную $\mathbf{y}$-устойчивость (равномерную асимптотическую $\mathbf{y}$-устойчивость).

2. Условия устойчивости по части переменных

В соответствии со сделанным разбиением $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ представим первую группу уравнений системы (1) в виде двух групп уравнений

$$\mathbf{y}_1'(t) = \mathbf{Y}_1(t, \mathbf{y}_{1t}, \mathbf{y}_{2t}, \mathbf{z}_t), \mathbf{y}_2'(t) = \mathbf{Y}_2(t, \mathbf{y}_{1t}, \mathbf{y}_{2t}, \mathbf{z}_t),$$

а оператор $\mathbf{Y}_2(t, \boldsymbol{\varphi})$ представим следующим образом

$$\mathbf{Y}_2(t, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{Y}_2^0(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}) + \mathbf{R}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}, \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z})$$
$$(\mathbf{R}(t, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{Y}_2(t, \boldsymbol{\varphi}) - \mathbf{Y}_2^0(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}),$$
$$\mathbf{R}(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{R}(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}).$$

Система функционально-дифференциальных уравнений

$$\mathbf{y}_2'(t) = \mathbf{Y}_2^0(t, \mathbf{y}_{2t}) \qquad (3)$$

будет "приведенной" (по переменным $\mathbf{y}_2$) подсистемой системы (1).

Допустим, что оператор $\mathbf{Y}_2^0(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2})$ вполне непрерывен в области $t \geqslant 0$, $\|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}\| < h$ и на каждом компактном подмножестве из этой области удовлетворяет условию Коши—Липшица.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*:

1) *найдется вполне непрерывный оператор* $\mathbf{Y}_2^*(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2})$, $\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}) \equiv \mathbf{Y}_2^*(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ *такой, что в области* (2) *имеет место неравенство*

$$|\mathbf{R}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}, \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z})| \leqslant |\mathbf{Y}_2^*(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2})|; \qquad (4)$$

2) *положение равновесия* $\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$ *"приведенной" подсистемы* (3) *равномерно асимптотически устойчиво по всем переменным.*

Тогда, если положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (1) $\mathbf{y}_1$*-устойчиво равномерно по* t_0, *то оно* $\mathbf{y}$*-устойчиво равномерно по* t_0.

Доказательство. При выполнении условий теоремы для системы (3) найдется [1] функционал $V(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2})$, определенный и непрерывный в области $t \geqslant 0$, $\|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}\| < h$ и удовлетворяющий условию ($k = \text{const} > 0$)

$$|V(t, \boldsymbol{\varphi}''_{\mathbf{y}2}) - V(t, \boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{y}2})| \leqslant k\|\boldsymbol{\varphi}''_{\mathbf{y}2} - \boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{y}2}\|, \quad (5)$$

для которого

$$a_1(\|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}\|) \leqslant V(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}) \leqslant a_2(\|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}\|), \quad (6)$$

$$V'_{(3)}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}) \leqslant -a_3(\|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}\|), \quad (7)$$

где $a_i(r)$, $a_i(0) = 0$ — непрерывные, монотонно возрастающие при $r \in R_+$ функции (функции типа Хана).

Под производной V' функционала V понимается величина [1, 2]

$$V' = \overline{\lim} \frac{1}{\delta}\{V[t + \delta, \mathbf{y}_{2t+\delta}] - V[t, \mathbf{y}_{2t}]\}, \ \delta \to 0^+,$$

и при сделанных предположениях относительно функционала V указанный предел определяется единственным образом.

Кроме того, при сделанных предположениях относительно функционала V аналогично [1] можно показать, что производные функционала V в силу систем (1) и (3) связаны соотношением

$$V'_{(1)}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}) \leqslant V'_{(3)}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}) + k|\mathbf{R}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}})|. \quad (8)$$

Учитывая неравенства (4), (5)—(7), заключаем, что соотношение (8) принимает следующий вид:

$$V'_{(1)}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}) \leqslant -a_3(a_2^{-1}(V(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}))) + k|\mathbf{Y}_2^*(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2})|. \quad (9)$$

(Нижний индекс под знаком V' означает номер системы, в силу которой вычисляется производная V-функционала.)

Если положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) $\mathbf{y}_1$-устойчиво равномерно по t_0, то для каждого $t_0 \geqslant 0$, произвольного числа $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \delta$ следует $\|\mathbf{y}_{1t}\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$.

Положим $\delta_1(\varepsilon) = b(\varepsilon)/k$, $b(\varepsilon) = a_3(a_2^{-1}(a_1(\varepsilon)))$. Можно указать $\delta_2(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия $\|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}1}\| < \delta_2$ следует $|\mathbf{Y}_2^*(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2})| < \delta_1$ для $\|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}\| < \varepsilon$. Вместе с тем, в силу равномерной $\mathbf{y}_1$-устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) имеем $\|\mathbf{y}_{1t}\| < \delta_2(\varepsilon)$ при всех $t \geqslant t_0$, если $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \delta$ и $\delta = \delta[\delta_2(\varepsilon)]$. Поскольку в области $t \geqslant 0$, $\|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}\| < \varepsilon$ при $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \delta$, где $\delta = \delta[\delta_2(\varepsilon)]$, выполнено условие $|\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{y}_{1t}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2})| < \delta_1$, то из неравенства (9) следует, что

$$V'_{(1)}(t, \mathbf{y}_{2t}) < 0 \text{ при } V(t, \mathbf{y}_{2t}) = a_1(\varepsilon). \quad (10)$$

Пусть $\delta^*(\varepsilon) = \min\{\delta(\varepsilon), \delta[\delta_2(\varepsilon)], \delta_3(\varepsilon)\}$, $\delta_3(\varepsilon) = a_2^{-1}(a_1(\varepsilon))$. Рассмотрим произвольное решение $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ системы (1) с $t_0 \geqslant 0$, $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \delta$, где $\delta = \delta^*(\varepsilon)$. В силу условий (6) в данном случае имеем $V(t_0, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}) \leqslant a_2(\delta_3(\varepsilon))$ и, следовательно, $V(t_0, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}) \leqslant a_1(\varepsilon)$. Покажем, что

$$V(t, \mathbf{y}_{2t}) < a_1(\varepsilon) \text{ для всех } t \geqslant t_0. \quad (11)$$

Предположим противное, что $V(t, \mathbf{y}_{2t}) < a_1(\varepsilon)$ при $t \in [t_0, t_1)$, но $V(t, \mathbf{y}_{2t}) = a_1(\varepsilon)$ при $t = t_1$. Тогда имеет место неравенство $V'_{(1)}(t, \mathbf{y}_{2t}) \geqslant 0$, которое противоречит условию (10). Значит неравенство (11) справедливо для всех $t \geqslant t_0$ и на основании условия $V(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}) \geqslant a_1(\|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}\|)$ заключаем, что $\|\mathbf{y}_{2t}\| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$, если $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \delta$ и $\delta = \delta^*(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1), 2) *теоремы* 1. *Тогда, если положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (1) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво, то оно равномерно асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво.*

Доказательство. Равномерная $\mathbf{y}_2$-устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) следует из теоремы 1: для каждого $t_0 \geqslant 0$, а также для произвольного числа $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, найдется число $\delta^*(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \delta$, где $\delta = \delta^*(\varepsilon)$, следует $\|\mathbf{y}_{2t}\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$. Покажем, что положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) является также равномерно $\mathbf{y}_2$-притягивающим. Это значит, что при заданном $\delta^*(\varepsilon) > 0$ для любого $\eta \in (0, \delta^*)$ существует число $T(\eta) > 0$ такое, что из $t_0 \geqslant 0$, $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \delta$, где $\delta = \delta^*(\varepsilon)$, следует $\|\mathbf{y}_{2t}\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0 + T(\eta)$.

В рассматриваемом случае предельное соотношение

$$|\mathbf{R}(t, \mathbf{y}_{1t}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}})| \to 0, \ t \to \infty \quad (12)$$

будет выполняться равномерно по $t_0 \geqslant 0$ и $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \Delta$ ($\Delta < \delta^*$), если $\Delta > 0$ определяет область равномерного $\mathbf{y}_1$-притяжения нулевого положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1).

Положим $\eta \in (0, \Delta)$; в этом случае $\eta < \delta^*(\varepsilon) < a_2^{-1}(a_1(\varepsilon)) < \varepsilon$. В силу условий (8), (9) при $a_2^{-1}(a_1(\eta)) \leqslant \|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}\| < \varepsilon$ и $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \Delta$ $(\Delta < \delta^*)$ найдется такое $T_1(\eta) > 0$, что для всех $t \geqslant T_1(\eta)$ выполняется неравенство

$$V'_{(1)}(t, \mathbf{y}_{2t}) \leqslant -\frac{1}{2}b(\eta). \qquad (13)$$

Следовательно, при $t \geqslant T_1(\eta)$ имеем

$$V'_{(1)}(t, \mathbf{y}_{2t}) < 0 \ \text{ при } V(t, \mathbf{y}_{2t}) = a_1(\eta). \qquad (14)$$

Положим

$$t_{0*} = \max[t_0, T_1(\eta)], \ \ T_2(\eta) = \frac{2a_2(\eta) - a_1(\eta)}{b(\eta)}.$$

Покажем, что на отрезке $[t_{0*}, t_{0*} + T_2(\eta)]$ существует момент времени t_*, для которого

$$V(t, \mathbf{y}_{2t}) < a_1(\eta) \text{ при } t = t_*. \qquad (15)$$

Допустим противное, что $V(t, \mathbf{y}_{2t}) \geqslant a_1(\eta)$ для всех $t \in (t_{0*}, t_{0*} + T_2(\eta))$. Тогда на этом интервале времени $\|\mathbf{y}_{2t}\| \geqslant a_2^{-1}(a_1(\eta))$, и справедливо соотношение (13), что приводит к противоречивым неравенствам

$$\begin{aligned} 0 &< a_1(\eta) \leqslant V(t_{0*} + T_2(\eta), \mathbf{y}_{2(t_{0*}+T_2(\eta))}) = \\ &= V(t_{0*}, \mathbf{y}_{2(t_{0*})}) + \int_{t_{0*}}^{t_{0*}+T_2(\eta)} V'_{(1)}(s, \mathbf{y}_{2s})ds \leqslant \\ &\leqslant a_2(\eta) - \frac{1}{2}b(\eta)T_2(\eta) = \frac{1}{2}a_1(\eta). \end{aligned}$$

Из условий (14), (15) заключаем, что неравенство $V(t, \mathbf{y}_{2t}) < a_1(\eta)$ имеет место для всех $t \geqslant t_*$. Действительно, допустим противное, что $V(t, \mathbf{y}_{2t}) < a_1(\eta)$ имеет место при $t \in [t_*, t^*)$, но $V(t, \mathbf{y}_{2t}) = a_1(\eta)$ при $t = t^*$. Тогда $V'_{(1)}(t, \mathbf{y}_{2t}) \geqslant 0$ при $t = t^*$, что противоречит условию (15). Поэтому неравенство $\|\mathbf{y}_{2t}\| < \eta$ выполняется для всех $t \geqslant t_*$ на основании условия $V(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}) \geqslant a_1(\|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}2}\|)$. Следовательно, имеем $\|\mathbf{y}_{2t}\| < \eta$ для любого $t \geqslant t_0 + T(\eta)$, где $T = T_1(\eta) + T_2(\eta)$, если $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \Delta$ $(\Delta < \delta^*)$. Теорема доказана.

Замечания. 1. Теоремы 1, 2 являются развитием соответствующих результатов А. Халаная [19], а также результатов [21].

В отличие от работы [19], где указаны условия, при которых из устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия системы (1) следует устойчивость по всем переменным, изучаются более общие задачи устойчивости по части переменных. Такие задачи рассмотрены ранее в работе [21], но без учета эффекта последействия в изучаемой системе.

2. При выполнении условия (4) динамика решений $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ системы (1), для которых $\mathbf{y}_{1t} \equiv \mathbf{0}$ (нуль-динамика по отношению к "измеримому выходу" $\mathbf{y}_1$, следуя терминологии работ [22, 23]), определяется подсистемой

$$\mathbf{y}'_2(t) = \mathbf{Y}_2^0(t, \mathbf{y}_{2t}), \mathbf{z}'(t) = \mathbf{Z}(t, 0, \mathbf{y}_{2t}, \mathbf{z}_t),$$

которая включает "приведенную" подсистему (4). При этом "приведенная" подсистема (4) определяет *частичную* нуль-динамику системы (1) по отношению к "измеримым" переменным $\mathbf{y}_1$: динамику $\mathbf{y}$-компоненты решений $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$), для которых $\mathbf{y}_{1t} \equiv \mathbf{0}$.

Поэтому при выполнении условий 1), 2) теоремы 1 система (1) обладает следующим свойством обнаруживаемости (детектируемости): если $\mathbf{y}_{1t} \equiv \mathbf{0}$, то найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\lim|\mathbf{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| = 0$, $t \to \infty$ при $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \delta$ и всех $t \geqslant t_0$. Это свойство, следуя терминологии работы [24], определяет *частичную* детектируемость системы (1).

3. Неравенство (4) легко проверяется, если из тех или иных соображений известна заранее равномерная (по t_0, $\boldsymbol{\varphi}$) $\mathbf{z}$-ограниченность решений системы (1), начинающихся при $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \delta$.

4. Анализ задач частичной (по части переменных) устойчивости и стабилизации, в том числе для систем функционально-дифференциальных уравнений, и обзор результатов можно найти в работах [3, 9, 12, 15, 25—28].

Пример. Пусть система (1) состоит из уравнений

$$\begin{aligned} &y'_1(t) = -2y_1(t) + y_1(t-\tau) + y_1^2(t) + \\ &+ y_2^2(t-\tau)z_1(t-\tau); \\ &y'_2(t) = [-1 + y_1(t)\sin z_2(t-\tau)]y_2(t); \qquad (16) \\ &z'_1(t) = [1 - 2y_1(t)\sin z_2(t-\tau)]z_1(t); \\ &z'_2(t) = \mathbf{e}^t y_1(t-\tau)z_2(t). \end{aligned}$$

Введением переменной $\mu_1 = y_2^2 z_1$ из системы (16) выделим подсистему

$$\begin{aligned} &y'_1(t) = -2y_1(t) + y_1(t-\tau) + \mu_1(t-\tau) + y_1^2(t); \\ &\mu'_1(t) = -\mu_1(t), \end{aligned}$$

нулевое положение равновесия $y_1 = \mu_1 = 0$ которой равномерно асимптотически устойчиво на основании теоремы об устойчивости по линейному приближению [1]. Поэтому положение равновесия $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$ системы (16) равномерно асимптотически y_1-устойчиво.

"Приведенная" подсистема (3) в данном случае имеет вид

$$y_2'(t) = -y_2(t),$$

и ее нулевое положение равновесия $y_2 = 0$ равномерно асимптотически устойчиво. Кроме того, в данном случае выполнено неравенство (4), в котором $|Y_2^*| = |\boldsymbol{\varphi}_{y1}(0)||\boldsymbol{\varphi}_{y2}(0)|.$.

На основании теоремы 2 заключаем, что положение равновесия $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$ системы (16) равномерно асимптотически (y_1, y_2)-устойчиво.

4. Приложение к нелинейным управляемым системам

Пусть система функционально-дифференциальных уравнений (1), в которой $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ описывает возмущенное движение объекта управления с учетом позиционных управлений $\mathbf{u}$, формируемых по принципу обратной связи с задержками (запаздыванием) в каналах управления.

Считаем, что переменные, входящие в векторы $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}$, измеряются и используются для формирования управлений $\mathbf{u}$ вида $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{y}_{1t}, \mathbf{z}_t)$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, а переменные, входящие в вектор $\mathbf{y}_2$, не измеряются. Пусть формируемые управления таковы, что замкнутая система (1) удовлетворяет общим требованиям, указанным в разделе 2, и положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ этой системы равномерно асимптотически $\mathbf{y}_1$-устойчиво.

Поскольку при $\mathbf{y}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ управления нулевые, то динамика "приведенной" подсистемы (3) не зависит от формируемых управлений, а определяется только структурой и параметрами объекта. Считаем их выбранными так, что нулевое положение равновесия "приведенной" подсистемы (3) равномерно асимптотически устойчиво по всем переменным.

В результате при выбранной структуре и параметрах объекта достигнутая за счет выбора управлений равномерная асимптотическая $\mathbf{y}_1$-устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) означает равномерную асимптотическую $\mathbf{y}$-устойчивость этого положения равновесия.

Заключение

Указаны легко интерпретируемые условия на структурную форму нелинейной системы функционально-дифференциальных уравнений, для которой устойчивость по части переменных нулевого положения равновесия означает его устойчивость по отношению к другой — бóльшей части переменных. Дано приложение к задаче частичной стабилизации управляемых систем. Указана связь полученных условий с условиями частичной детектируемости рассматриваемой нелинейной системы; введено понятие частичной нуль-динамики изучаемой системы.

Имеются другие подходы [9, 29, 30] к задаче частичной (по заданной части переменных) стабилизации, также основанные на предварительном анализе устойчивости по меньшей части заданных переменных.

Список литературы

1. **Красовский Н. Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959.
2. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
3. **Burton T. A.** Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. Academic Press, Orlando, 1985. 342 p.
4. **Андреев А. С.** Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. 328 с.
5. **Kharitonov V. L.** Time-Delay Systems. Lyapunov Functionals and Matrices. Basel: Birkhauser, 2013. 311 p.
6. **Fridman E.** Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control. Boston: Birkhauser, 2014. 362 p.
7. **Liu T., Jiang Z. P., Hill D. J.** Nonlinear Control of Dynamic Networks. Orlando: CRC Press, 2014. 345 p.
8. **Corduneanu C., Li Y. Z., Mahdavi M.** Functional Differential Equations: Advances and Applications. Hoboken: John Wiley & Sons, 2016. 368 p.
9. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998. 448 p.
10. **Воротников В. И.** Два класса задач частичной устойчивости: к унификации понятий и единым условиям разрешимости // Докл. РАН. 2002. Т. 384, № 1. С. 47—51.
11. **Bernfeld S. R., Corduneanu C., Ignatyev A. O.** On the Stability of Invariant Sets of Functional Differential Equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2003. Vol. 55, N. 4—6. P. 641—656.
12. **Воротников В. И.** Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 3—59.
13. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** Об устойчивости по части переменных "частичных" положений равно-

весия систем с последействием // Математические заметки. 2014. Т. 96, № 4. С. 496—503.

14. **Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A., Chen Y. Z.** Partial Stability Analysis of Some Classes of Nonlinear Systems // Acta Mathematica Scientia. 2017. Vol. 37, N. 2. P. 329—341.

15. **Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.** Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.

16. **Karafyllis I., Pepe P., Jiang Z. P.** Global Output Stability for Systems Described by Retarded Functional Differential Equations // European J. Control. 2008. Vol. 14. P. 516—536.

17. **Kankanamalage H. G., Lin Y., Wang Y.** On Lyapunov — Krasovskii Characterizations of Input-to-Output Stability // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2017. Vol. 50, N. 1. P. 14362—14367.

18. **Румянцев В. В.** Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, физики, астрономии, химии. 1957. № 4. С. 9—16.

19. **Halanay A.** Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags. New York: Acad. Press, 1966. 528 p.

20. **Corduneanu C.** On Partial Stability for Delay Systems // Annal. Polon. Math. 1975. Vol. 4, N. 29. P. 357—362.

21. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К задаче частичной детектируемости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 2009. № 1. С. 25—38.

22. **Byrnes C. I., Isidori A., Willems J. C.** Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. Vol. 36, N. 11. P. 1228—1240.

23. **Isidori A.** The Zero Dynamics of a Nonlinear System: From the Origin to the Latest Progresses of a Long Successful Story // European J. Control. 2013. Vol. 19, N. 5. P. 369—378.

24. **Ingalls B. P., Sontag E. D., Wang Y.** Measurement to Error Stability: a Notion of Partial Detectability for Nonlinear Systems // Proc. 41th IEEE Conf. on Decision and Control. Las Vegas, Nevada. 2002. P. 3946—3951.

25. **Румянцев В. В., Озиранер А. С.** Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.

26. **Jammazi C.** Backstepping and Partial Asymptotic Stabilization // Intern. J. Control, Autom., Syst. 2008. Vol. 6, N. 6. P. 859—872.

27. **Binazadeh T., Yazdanpanah M. J.** Partial Stabilization of Uncertain Nonlinear Systems // ISA Trans. 2012. Vol. 51, N. 2. P. 298—303.

28. **L'Afflitto A., Haddad W. M., Bakolas E.** Partial-State Stabilization and Optimal Feedback Control // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2016. Vol. 26, N. 5. P. 1026—1050.

29. **Воротников В. И.** Об управлении угловым движением твердого тела. Игровой подход // Прикл. матем. и механика. 1994. Т. 58, Вып. 3. С. 82—103.

30. **Воротников В. И.** О синтезе ограниченных управлений в игровой задаче переориентации асимметричного твердого тела // Докл. РАН. Т. 343, № 5. С. 630—634.

31. **Hu W. H., Wang J., Li X. M.** An Approach of Partial Control Design for System Control and Synchronization, Chaos // Solitons & Fractals. 2009. Vol. 39, N. 3. P. 1410—1417.

On Problem of Partial Stability for Functional Differential Systems with Holdover

V. I. Vorotnikov, vorotnikov-vi@rambler.ru,
Ural Federal University, Ekaterinburg

Corresponding author: **Vorotnikov Vladimir I.,** D. Sc. (Phys. & Math.), Professor,
Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002, Russian Federation,
e-mail: vorotnikov-vi@rambler.ru

Accepted on March 25, 2019

Abstract

The theory of systems of functional differential equations is a significant and rapidly developing sphere of modern mathematics which finds extensive application in complex systems of automatic control and also in economic, modern technical, ecological, and biological models. Naturally, the problems arises of stability and partial stability of the processes described by the class of the equation. The article studies the problem of partial stability which arise in applications either from the requirement of proper performance of a system or in assessing system capability. Also very effective is the approach to the problem of stability with respect to all variables based on preliminary analysis of partial stability. We suppose that the system have the zero equilibrium position. A conditions are obtained under which the uniform stability (uniform asymptotic stability) of the zero equilibrium position with respect to the part of the variables implies the uniform stability (uniform asymptotic stability) of this equilibrium position with respect to the other, larger part of the variables, which include an additional group of coordinates of the phase vector. These conditions include: 1) the condition for uniform asymptotic stability of the zero equilibrium position of the "reduced" subsystem of the original system with respect to the additional group of variables; 2) the restriction on the coupling between the "reduced" subsystem and the rest parts of the system. Application of the obtained results to a problem of stabilization with respect to a part of the variables for nonlinear controlled systems is discussed.

Keywords: *nonlinear functional-differential system with holdover, partial stability*

For citation:

Vorotnikov V. I. On Problem of Partial Stability for Functional Differential Systems with Holdover, *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie,* 2019, vol. 20, no. 7, pp. 398—404.

DOI: 10.17587/mau.20.398-404

References

1. **Krasovskii N. N.** Stability of Motion, Stanford, Stanford Univ. Press, 1963, 194 p.

2. **Hale J. K.** Theory of Functional Differential Equations, New York, Springer-Verlag, 1977, 365 p.

3. **Burton T. A.** Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations, Orlando, Academic Press, 1985, 342 p.

4. **Andreev A. S.** Stability of Nonautonomous Functional Differential Equations, Ul'yanovsk, Publishing house of UlGU, 2005, 328 p.

5. **Kharitonov V. L.** Time-Delay Systems. Lyapunov Functionals and Matrices, Basel, Birkhauser, 2013, 311 p.

6. **Fridman E.** Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control, Boston, Birkhauser, 2014, 362 p.

7. **Liu T., Jiang Z. P., Hill D. J.** Nonlinear Control of Dynamic Networks, Orlando, CRC Press, 2014, 345 p.

8. **Corduneanu C., Li Y. Z., Mahdavi M.** Functional Differential Equations: Advances and Applications, Hoboken, John Wiley & Sons, 2016, 368 p.

9. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control, Boston: Birkhauser, 1998. 448 p.

10. **Vorotnikov V. I.** Two Classes of Partial Stability Problems: Unification of the Notions and Common Conditions of Solvability, *Doklady Physics*, 2002, vol. 47, no. 5, pp. 377—381.

11. **Bernfeld S. R., Corduneanu C., Ignatyev A. O.** *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2003, vol. 55, no. 4—6, pp. 641—656.

12. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects, *Automation and Remote Control,* 2005, vol. 66, no. 4, pp. 511—561.

13. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** Stability in a Part of Variables of "Partial" Equilibria of Systems with Aftereffect, *Math. Notes*, 2014, vol. 96, no. 4, pp. 477—483.

14. **Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A., Chen Y. Z.** *Acta Mathematica Scientia*, 2017, vol. 37, no. 2, pp. 329—341.

15. **Fradkov A. L., Miroshnik I. V., Nikiforov V. O.** Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1999, 528 p.

16. **Karafyllis I., Pepe P., Jiang Z. P.** *European J. Control*, 2008, vol. 14, no. 6, pp. 516—536.

17. **Kankanamalage H. G., Lin Y., Wang Y.** *IFAC Proceedings Volumes*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 14362—14367.

18. **Rumyantsev V. V.** *Vestn. MGU. Ser. matematiki, mekhaniki, fiziki, astronomii, himii — Gerald of Moscow State University. Ser. Math., Mech., Phis., Asrtron., Chem.*, 1957, no. 4, pp. 9—16.

19. **Halanay A.** Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags., New York, Acad. Press, 1966, 528 p.

20. **Corduneanu C.**, *Annal. Polon. Math.*, 1975, vol. 4, no. 29, pp. 357—362.

21. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** On Partial Detectability of the Nonlinear Dynamic Systems, *Autom. Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 1, pp. 20—32.

22. **Byrnes C. I., Isidori A., Willems J. C.** *IEEE Trans. Autom. Control*, 1991, vol. 36, no. 11, pp. 1228—1240.

23. **Isidori A.** *European J. Control*, 2013, vol. 19, no. 5, pp. 369—378.

24. **Ingalls B. P., Sontag E. D., Wang Y.** *Proc. 41th IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, 2002, pp. 3946—3951.

25. **Rumyantsev V. V., Oziraner A. S.** Stability and Stabilization of Motion with Respect to a Part of the Variables, Moscow, Nauka, 1987, 287 p.

26. **Jammazi C.** *Intern. J. Control*, *Autom.*, *Syst.*, 2008, vol. 6, no. 6, pp. 859—872.

27. **Binazadeh T., Yazdanpanah M. J.** *ISA Trans.*, 2012, vol. 51, no. 2, pp. 298—303.

28. **L'Afflitto A., Haddad W. M., Bakolas E.** *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2016, vol. 26, no. 5, pp. 1026—1050.

29. **Vorotnikov V. I.** The Control of the Angular Motion of a Solid with Interference. A Game-Theoretic Approach, *J. Appl. Math. Mech.*, 1994, vol. 58, no. 3, pp. 457—476.

30. **Vorotnikov V. I.** On Bounded Control Synthesis in a Game Theory Problem of Reorientation of an Asymmetric Solid // *Physics-Doklady*, 1995, vol. 40, no. 8, pp. 421—425.

31. **Hu W. H., Wang J., Li X. M.** *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009, vol. 39, no. 3, pp. 1410—1417.