

О. Н. Корсун, д-р техн. наук, проф., marmotto@rambler.ru, А. В. Стуловский, инженер, avstlv2@gmail.com, Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем, г. Москва

Сравнение прямого метода и принципа максимума в задаче формирования программного управления летательным аппаратом*

Обсуждается решение задачи формирования программного управления для объекта, задаваемого нелинейной системой дифференциальных уравнений. Известные методы оптимального управления требуют решения двухточечной краевой задачи, что в общем случае связано с принципиальными сложностями. Поэтому предлагается методика, использующая прямой метод решения, в котором оптимизация осуществляется посредством популяционного алгоритма. На примере движения летательного аппарата проводится сравнение решений, полученных прямым методом и на основе классической теории оптимального управления, в первую очередь, принципа максимума Понтрягина. Приводятся результаты, показывающие высокую степень совпадения полученных управлений при различных способах выбора целевого функционала.

Ключевые слова: оптимальное программное управление, двухточечная краевая задача, принцип максимума, прямые методы, популяционный алгоритм численной оптимизации

Введение

Существует ряд способов решения задачи формирования управления, начиная с классических результатов вариационного исчисления и принципа максимума Понтрягина [1, 2] и заканчивая относительно новыми методами обратных задач динамики [3], метода декомпозиции [4, 5] и вложенных систем [6, 7].

В связи с ростом доступных исследователям вычислительных мощностей значительное внимание привлекли к себе прямые методы решения задач [8, 9]. Напомним, что в основе прямых методов лежит допущение, что траектории возможных управлений можно параметризовать и, таким образом, свести поиск управления к однокритериальной безусловной многопараметрической оптимизации. Такая постановка существенно проще, чем решение традиционной двухточечной задачи. Поскольку применение многих хорошо зарекомендовавших себя градиентных методов (в том числе и метода Ньютона с его модификациями) затруднено при большом числе параметров, разумно обратиться к оптимизационным алгорит-

мам другого типа, а именно, генетическим и популяционным, дающим хорошие результаты при решении многомерных оптимизационных задач. В данной работе используется метод роя частиц [10, 11], являющийся разновидностью популяционных алгоритмов.

В статье предлагается прямой метод формирования программного управления летательным аппаратом и проводится его сравнение с классическими результатами теории оптимального управления — решением задачи Лагранжа на основе вариационного исчисления и принципа максимума Понтрягина.

Общая постановка задачи

Пусть нелинейная нестационарная модель объекта управления задана в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (1.1)$$

где $t \in [t_0, T]$ — время функционирования системы; $\mathbf{x}$ и $\dot{\mathbf{x}}$ — векторы фазовых координат (выходных сигналов) и их производных по времени; $\mathbf{u}$ — искомый вектор управления (входной сигнал); $\mathbf{f}(\cdot)$ — известная векторозначная функция векторных аргументов. Начальные условия $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ принимаются заданными.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 18-08-00921-а.

Минимизируемый скалярный функционал имеет вид

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^T F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt, \quad (1.2)$$

где t_0 , T — начальный и конечный моменты времени функционирования системы.

Пусть требуется найти управление, обеспечивающее на рассматриваемом интервале времени минимальные отклонения выходных сигналов от заданных. Тогда в выражении (1.2) подынтегральное выражение можно записать следующим образом:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = F(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t),$$

где $\tilde{\mathbf{x}}$ — вектор заданных значений фазовых координат.

Выражения (1.1)–(1.2) описывают хорошо известную задачу Лагранжа со свободным концом [12, 13], так как начальные условия на левом конце заданы, а границы рассматриваемого интервала времени t_0 , T фиксированы. Традиционной рекомендацией, позволяющей найти оптимальное управление $\tilde{\mathbf{u}}$, является переход к двухточечной краевой задаче. Для этого записывается функция Гамильтона

$$H = (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{f}) - F, \quad (1.3)$$

где $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{f})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{f}$, а сама сопряженная вектор-функция $\boldsymbol{\lambda}$ удовлетворяет уравнению

$$\boldsymbol{\lambda}' = -\mathbf{f}_x^T \boldsymbol{\lambda} + F_x = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.4)$$

с начальными условиями $\boldsymbol{\lambda}(T) = 0$.

Оптимальное управление $\tilde{\mathbf{u}}$ находится из необходимого условия минимума функции Гамильтона

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \boldsymbol{\lambda} \mathbf{f}_u - F_u = 0. \quad (1.5)$$

Здесь необходимо возникает двухточечная краевая задача, поскольку начальные условия для модели объекта (1.1) заданы в начале интервала, а для сопряженной функции (1.4) — на его конце. Решение этой задачи часто сопряжено со значительными трудностями [12–14]. Вид условия (1.5) соответствует случаю, когда ограничения на управление не накладываются.

При наличии ограничений необходимое условие минимума определяется принципом максимума Понтрягина

$$H(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}, \psi, \tau) = \max_{\mathbf{u} \in G_u} H(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \psi, \tau), \quad (1.6)$$

где $\tilde{\mathbf{u}}$ — оптимальное управление, выбираемое среди управлений с ограничением $\mathbf{u} \in G_u$.

Остановимся теперь на предлагаемом прямом методе. Он заключается в непосредственной минимизации целевого функционала вида (1.2). Для этого управления, являющиеся функциями времени, представляются на рассматриваемом интервале в виде Эрмита сплайна 3-го порядка. Параметры сплайна априорно неизвестны. Для их нахождения решается задача многомерной параметрической оптимизации, т. е. находятся параметры, доставляющие минимум функционалу (1.2). Численное решение находим, применяя одни из популяционных алгоритмов оптимизации — метод роя частиц.

Функционал (1.2) по физическому смыслу достигает минимума, когда выходные сигналы модели $\mathbf{x}$, соответствующие оптимальному управлению $\tilde{\mathbf{u}}$, наиболее близки заданным выходным сигналам $\tilde{\mathbf{x}}$. Поэтому теоретической основой данного подхода служит известная теорема о существовании и единственности решения конечномерной системы нелинейных дифференциальных уравнений [15]. С практической точки зрения преимущество прямого метода в том, что он не требует решения двухточечной краевой задачи.

Подробнее модель объекта и вид функционала описаны в следующем разделе.

Объект управления

В качестве модели объекта рассматриваются следующие уравнения пространственного движения летательного аппарата [16, 17].

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega_z - \frac{qS}{mV(t)} c_{ye}(\alpha) - \frac{P_x}{mV(t)} \sin[\alpha(t)] + \\ &+ \frac{g}{V(t)} (\sin[\alpha(t)] \sin[\nu(t)] + \\ &+ \cos[\alpha(t)] \cos[\nu(t)] \cos[\gamma(t)]); \\ \dot{\nu} &= -\frac{qS}{m} c_{xe}(\alpha) + \frac{P_x}{m} \cos[\alpha(t)] + \\ &+ g(-\cos[\alpha(t)] \sin[\nu(t)] + \\ &+ \sin[\alpha(t)] \cos[\nu(t)] \cos[\gamma(t)]); \\ \dot{h} &= V(t) (\cos[\alpha(t)] \sin[\nu(t)] - \\ &- \sin[\alpha(t)] \cos[\nu(t)] \cos[\gamma(t)]); \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{\cos[\nu(t)]} \omega_z \sin[\gamma(t)], \end{aligned} \quad (1.7)$$

где α — угол атаки, рад; ω_z — угловая скорость относительно оси Oz связанной системы координат [18], рад/с; υ, γ, ψ — углы тангажа, крена, рыскания, рад; V — истинная воздушная скорость, м/с; h — высота полета, м; $c_{ye}(\alpha)$ — коэффициент подъемной силы в полусвязанной системе координат [18]; $c_{xe}(\alpha)$ — коэффициент силы сопротивления в полусвязанной системе координат; m — масса самолета, кг; S — эквивалентная площадь крыла, м²; $q = \rho_h V^2 / 2$ — скоростной напор, Па; ρ_h — плотность воздуха на высоте полета, кг/м³; P_x — проекция тяги двигателей на ось Ox связанной системы координат, Н.

Система дифференциальных уравнений (1.7) дополняется алгебраическим уравнением для ω_z :

$$\omega_z = \dot{\upsilon}(t) \cos[\gamma(t)] - \dot{\psi} \cos[\upsilon(t)] \sin[\gamma(t)], \quad (1.8)$$

где $\tilde{\psi}$ — заданное значение угла рыскания.

Для приведенной модели выберем в качестве управляющих сигналов углы тангажа и крена. Они имеют то преимущество, что, во-первых, являются достаточно гладкими и поэтому могут хорошо аппроксимироваться сплайнами с небольшим числом узлов, во-вторых, имеют по определению ограничения на область значений ($\pm 90^\circ$ по углу тангажа, $\pm 180^\circ$ по углу крена). Практическая реализация этих программных углов также не вызывает принципиальных сложностей, поскольку методы проектирования контуров слежения за заданными углами тангажа и крена в настоящее время развиты достаточно хорошо.

Прямые методы решения задачи требуют разложения управляющих сигналов по базису линейно независимых функций. При этом необходимо стремиться к компромиссу между точностью аппроксимации управлений, что ведет к увеличению числа параметров, и вычислительной сложностью решения задачи параметрической оптимизации. В данной работе были применены Эрмитовы сплайны третьего порядка [19, 20] с расстоянием между узлами около 8 с.

Для проверки работоспособности предложенного метода решали специально сформулированную тестовую задачу. В качестве входных сигналов задавали известные функции времени. С их помощью моделировали движение объекта согласно системе (1.7)—(1.8). Полученные выходные сигналы принимали в качестве заданных значений $\tilde{x}$. Далее предполагали, что модель объекта известна, и ставили

задачу поиска управлений, минимизирующих функционал

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^N (k_1(\alpha(t_i) - \tilde{\alpha}(t_i))^2 + k_2(V(t_i) - \tilde{V}(t_i))^2) + \sum_{i=0}^N (k_3(h(t_i) - \tilde{h}(t_i))^2 + k_4(\psi(t_i) - \tilde{\psi}(t_i))^2), \quad (1.9)$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 — весовые коэффициенты; $\tilde{\alpha}, \tilde{V}, \tilde{h}, \tilde{\psi}$ — заданные значения угла атаки, скорости, высоты и угла рыскания; $t_0, t_N = T$ — время начала и конца участка соответственно.

Поскольку в тестовой задаче истинные управления известны, они использовались в качестве эталонных для оценки точности предложенного прямого метода.

Эту же тестовую задачу можно решить на основе классической теории оптимального управления, используя необходимое условие (1.5) равенства нулю производной функции Гамильтона по управлению. Принимая систему уравнений (1.7)—(1.8) в качестве модели объекта управления, а углы тангажа и крена — в качестве управляющих сигналов, условие (1.5) можно упростить, учитывая, что функционал не зависит явно от управления. Тогда (1.5) принимает вид

$$\lambda \mathbf{f}_u = 0. \quad (1.10)$$

Определяя для системы (1.7)—(1.8) частные производные по вектору управляющих сигналов аналитически, получим

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_v^1 + \lambda_2 f_v^2 + \lambda_3 f_v^3 + \lambda_4 f_v^4 &= 0; \\ \lambda_1 f_\gamma^1 + \lambda_2 f_\gamma^2 + \lambda_3 f_\gamma^3 + \lambda_4 f_\gamma^4 &= 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где частные производные по управлению

$$\begin{aligned} f_v^1 &= \dot{\psi}(t) \sin[\upsilon(t)] \sin[\gamma(t)] + \\ &+ \frac{g}{V(t)} (\sin[\alpha(t)] \cos[\upsilon(t)] - \\ &- \cos[\alpha(t)] \sin[\upsilon(t)] \cos[\gamma(t)]); \\ f_v^2 &= -g (\cos[\alpha(t)] \cos[\upsilon(t)] + \\ &+ \sin[\alpha(t)] \sin[\upsilon(t)] \cos[\gamma(t)]); \\ f_v^3 &= V(t) (\cos[\alpha(t)] \cos[\upsilon(t)] + \\ &+ \sin[\alpha(t)] \sin[\upsilon(t)] \cos[\gamma(t)]); \\ f_v^4 &= -\dot{\psi}(t) \sin[\upsilon(t)] \sin^2[\gamma(t)] \frac{1}{\cos[\upsilon(t)]} - \\ &- \omega_z(t) \frac{\sin[\gamma(t)] \sin[\upsilon(t)]}{\cos^2[\upsilon(t)]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_\gamma^1 &= -\dot{v}(t) \sin[\gamma(t)] - \dot{\psi}(t) \cos[v(t)] \cos[\gamma(t)] - \\
&- \frac{g}{V(t)} \cos[\alpha(t)] \cos[v(t)] \sin[\gamma(t)]; \\
f_\gamma^2 &= -g \sin[\alpha(t)] \cos[v(t)] \sin[\gamma(t)]; \\
f_\gamma^3 &= V(t) \sin[\alpha(t)] \cos[v(t)] \sin[\gamma(t)]; \\
f_\gamma^4 &= \frac{\sin[\gamma(t)]}{\cos[v(t)]} \{ \dot{v}(t) \sin[\gamma(t)] + \\
&+ \dot{\psi}(t) \cos[v(t)] \cos[\gamma(t)] \} - \omega_z(t) \frac{\cos[\gamma(t)]}{\cos[v(t)]}.
\end{aligned}$$

Напомним, что сопряженная вектор-функция в общем случае находится из уравнения (1.4):

$$\dot{\lambda} = -\mathbf{f}_x^T \lambda + F_x, \lambda(T) = 0.$$

Применительно к модели (1.7)–(1.8) с функционалом (1.9) вектор-функцию можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= 2k_1(\alpha(t) - \tilde{\alpha}(t)) - \lambda_1 f_\alpha^1 - \lambda_2 f_\alpha^2 - \lambda_3 f_\alpha^3; \\
\dot{\lambda}_2 &= 2k_2(V(t) - \tilde{V}(t)) - \lambda_1 f_V^1 - \lambda_2 f_V^2 - \lambda_3 f_V^3; \\
\dot{\lambda}_3 &= 2k_3(h(t) - \tilde{h}(t)) - \lambda_1 f_h^1 - \lambda_2 f_h^2; \\
\dot{\lambda}_4 &= 2k_4(\psi(t) - \tilde{\psi}(t)),
\end{aligned} \quad (1.12)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned}
f_\alpha^1 &= -\frac{qS}{mV(t)} \frac{\partial c_{ye}}{\partial \alpha} - \frac{Px}{mV(t)} \cos[\alpha(t)] + \frac{g}{V(t)} \times \\
&\times (\cos[\alpha(t)] \sin[v(t)] - \sin[\alpha(t)] \cos[v(t)] \cos[\gamma(t)]); \\
f_\alpha^2 &= -\frac{qS}{m} \frac{\partial c_{xe}}{\partial \alpha} - \frac{Px}{m} \sin[\alpha(t)] + \\
&+ g(\sin[\alpha(t)] \sin[v(t)] + \\
&+ \cos[\alpha(t)] \cos[v(t)] \cos[\gamma(t)]); \\
f_\alpha^3 &= V(t)(-\sin[\alpha(t)] \sin[v(t)] - \\
&- \cos[\alpha(t)] \cos[v(t)] \cos[\gamma(t)]); \\
f_V^1 &= -\frac{\rho S}{2m} c_{ye} + \frac{Px}{mV^2(t)} \sin[\alpha(t)] - \\
&- \frac{\sin[\alpha(t)]}{mV(t)} \frac{\partial Px}{\partial V} - \frac{g}{V^2(t)} (\sin[\alpha(t)] \sin[v(t)] + \\
&+ \cos[\alpha(t)] \cos[v(t)] \cos[\gamma(t)]); \\
f_V^2 &= \frac{1}{m} \left(-\rho V(t) S c_{xe} + \cos[\alpha(t)] \frac{\partial Px}{\partial V} \right); \\
f_V^3 &= \cos[\alpha(t)] \sin[v(t)] - \\
&- \sin[\alpha(t)] \cos[v(t)] \cos[\gamma(t)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_h^1 &= -\frac{1}{mV(t)} \left(\frac{1}{2} S c_{ye} V^2 \frac{\partial p}{\partial h} + \sin[\alpha(t)] \frac{\partial Px}{\partial h} \right); \\
f_h^2 &= \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} S c_{xe} V^2 \frac{\partial p}{\partial h} + \cos[\alpha(t)] \frac{\partial Px}{\partial h} \right).
\end{aligned}$$

Полученные выражения позволяют решить задачу Лагранжа на основе условия равенства нулю производных функции Гамильтона по управлению.

Сравнение прямого метода с решением задачи Лагранжа (ограничения на управление отсутствуют)

Проведем по полученным выше тестовым данным сравнение решений, полученных прямым методом и путем решения задачи Лагранжа на основе условия равенства нулю производной функции Гамильтона по управлению. Очевидно, что на тестовых данных точность решений должна быть высокой, поскольку модель объекта известна, шумы отсутствуют, а однозначность обеспечивается теоремой о единственности решения системы нелинейных дифференциальных уравнений [15]. Для численной параметрической оптимизации использовался метод роя частиц. Границы областей поиска задавали во всем возможном диапазоне значений, т. е. $\pm 90^\circ$ для угла тангажа, $\pm 180^\circ$ для угла крена. На временном интервале 36..40 с задавали равномерную сетку с шестью узлами. Другими словами, для получения сплайнов, аппроксимирующих два управляющих сигнала, требовалось найти 24 параметра (значения управлений и их производных в узлах сплайнов).

Результаты для прямого метода представлены на рис. 1 и 2. Согласно рис. 1 степень совпадения по выходным сигналам является очень высокой, вплоть до визуальной неразличимости.

Точность соответствия оценок входных сигналов, заданных при моделировании, также весьма высокая (рис. 2). Особенно это заметно в канале угла тангажа и, в меньшей степени, в канале крена. Этим подтверждается способность алгоритма находить качественную оценку входных сигналов фактически при отсутствии начальных приближений.

Рассмотрим теперь решение задачи Лагранжа для этих же тестовых данных. Очевидно, что условие точного равенства нулю производных функции Гамильтона по управлению в случае численного решения невыполнимо. Поэтому на

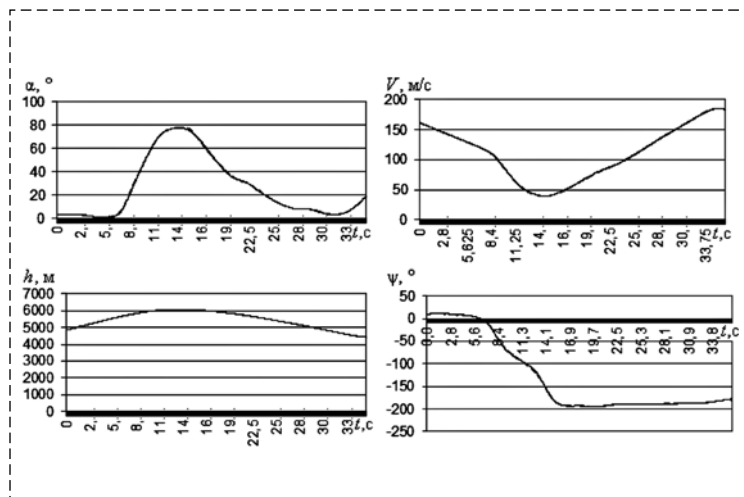


Рис. 1. Сравнение исходных выходных сигналов (сплошная линия) и выходных сигналов, полученных с помощью прямого метода (штриховая линия)

Fig. 1. Fitting of the targeted output signals (solid line) and output signals obtained using the direct method (dash line)

рассматриваемом участке следует ввести некоторую меру близости производных к нулю, например, взвешенную сумму квадратов производных во все дискретные моменты времени. Тогда можно составить следующий функционал:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^N \left(k_1 \left(\frac{\partial H}{\partial u_1} \right)_{t_i}^2 + k_2 \left(\frac{\partial H}{\partial u_2} \right)_{t_i}^2 \right), \quad (4.1)$$

где k_1, k_2 — весовые коэффициенты; $u_1 = v$, $u_2 = \gamma$ — углы тангажа и крена, выбранные в качестве сигналов управления; $t_0, t_N = T$ — время начала и конца участка соответственно.

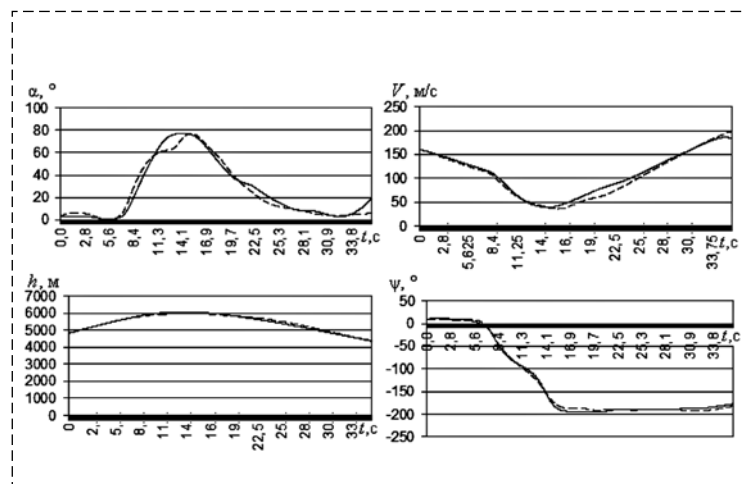


Рис. 3. Сравнение исходных выходных сигналов (сплошная линия) и выходных сигналов, полученных на основе равенства нулю производных функции Гамильтона (штриховая линия), функционал (4.1)

Fig. 3. Fitting of the targeted output signals (solid line) and output signals obtained using the partial control derivatives of the Hamilton function (dash line), functional (4.1)

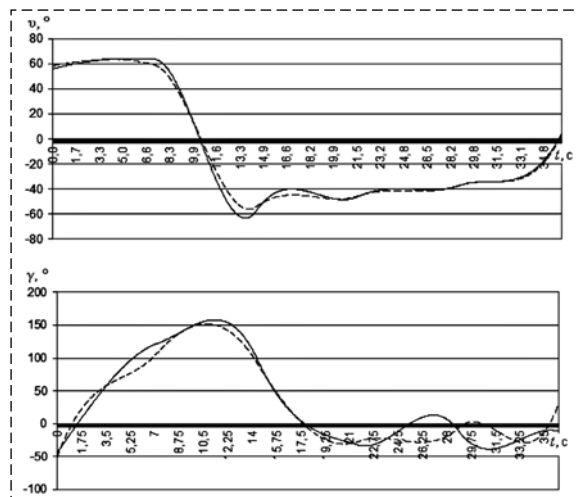


Рис. 2. Сравнение заданных входных сигналов (сплошная линия) с сигналами, полученными прямым методом (штриховая линия)

Fig. 2. Fitting of known test input signals (solid line) and signals obtained using the direct method (dash line)

Оценки оптимальных управлений, как и в предыдущем случае, ищем в форме Эрмитова сплайна третьего порядка, для численной оптимизации также используем метод роя частиц при тех же границах области возможных значений. Отличие от предыдущего случая в том, что вместо функционала (1.9) прямого метода минимизируем функционал (4.1), соответствующий необходимому условию (1.5) в задаче Лагранжа.

Результаты представлены на рис. 3 и 4. Степень соответствия достаточно хорошая, особенно по выходным сигналам, но несколько ниже, чем в предыдущем случае.

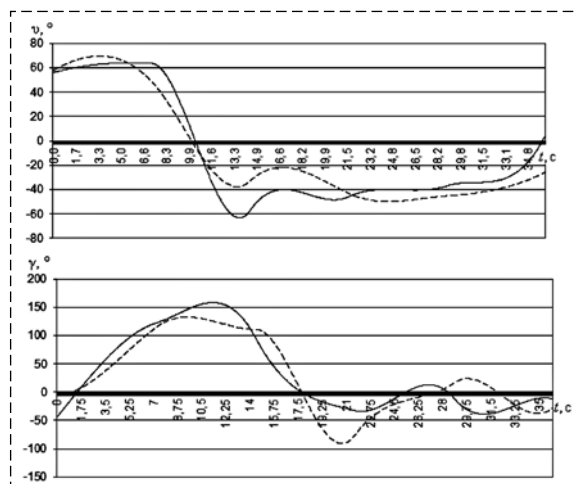


Рис. 4. Сравнение заданных входных сигналов (сплошная линия) с сигналами, полученными на основе равенства нулю производных функции Гамильтона (штриховая линия), функционал (4.1)

Fig. 4. Fitting of known test input signals (solid line) and signals obtained using the partial control derivatives of the Hamilton function (dash line), functional (4.1)

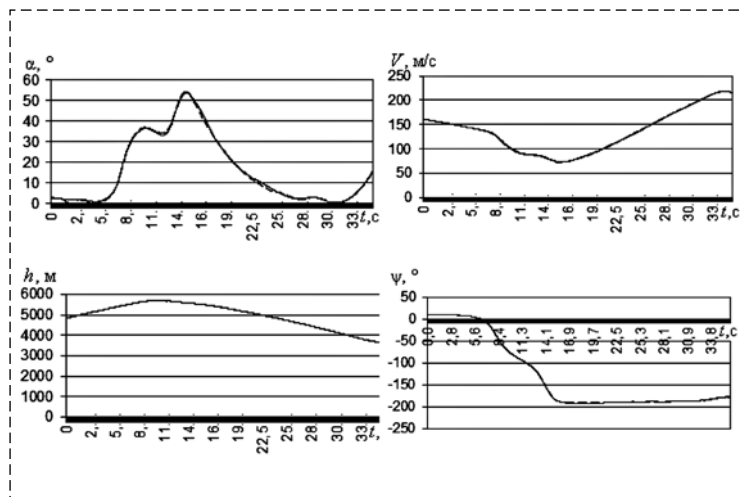


Рис. 5. Сравнение исходных выходных сигналов (сплошная линия) и выходных сигналов, полученных прямым методом (штриховая линия)
Fig. 5. Fitting of the targeted output signals (solid line) and output signals obtained using the direct method (dash line)

Выполненный численный эксперимент также показал, что алгоритм, использующий условие равенства нулю производных функции Гамильтона, имеет более высокую чувствительность к ширине области поиска. Это можно заметить, если сузить область поиска, например, до $\pm 20\%$ от значений истинных значений параметров. Тогда удастся значительно улучшить решение, хотя оно все равно уступает прямому методу с функционалом (1.9) с более широкой начальной областью поиска.

Сравнение прямого метода с решением задачи Лагранжа при наличии ограничений на управление

В рассмотренном выше примере управляющие сигналы не приближаются к своим предельным значениям, поэтому с полным основанием этот пример относится к случаю управления без ограничений. Этому соответствует задача Лагранжа в постановке (1.1)–(1.2). При наличии ограничений на управление классическая теория [15] рекомендует применять принцип максимума, где функционал определяется выражением (1.6). В нашем исследовании задача решается численно, поэтому ничто не препятствует применить два рассмотренных выше метода для поиска управления с ограничениями.

Итак, на примере задачи с ограничениями выполним сравнение трех методов: прямого метода, решения на основе равенства нулю

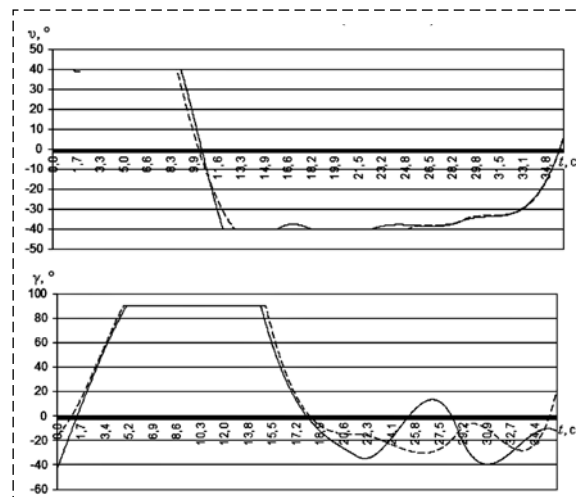


Рис. 6. Сравнение заданных входных сигналов (сплошная линия) с сигналами, полученными прямым методом (штриховая линия)
Fig. 6. Fitting of known test input signals (solid line) and signals obtained using the direct method (dash line)

производных функции Гамильтона и решение по принципу максимума, т. е. по условию максимума функции Гамильтона (1.6). Переформулируем исходный пример так, чтобы искомые управляющие сигналы достигали ограничений. Для этого введем ограничение $\pm 40^\circ$ по углу тангажа и $\pm 90^\circ$ по углу крена.

Повторим численные эксперименты, проведенные в разделе 3, с учетом того, что управляющие сигналы не могут выходить за указанные выше пределы. Как можно видеть на рис. 5 и 6, применение прямого метода с функционалом (1.9) позволяет добиться такой же высокой степени соответствия по входным и выходным сигналам, как и в первоначальном эксперименте (см. рис. 1 и 2).

Использование функционала от производных функции Гамильтона по управлению (4.1) (рис. 7 и 8) приводит к результатам, близким к полученным ранее (см. рис. 3 и 4). Точность оценок, как и в случае без ограничений, является достаточно высокой, хотя несколько уступает прямому методу.

Применение принципа максимума

Для численного нахождения максимума функции Гамильтона условие (1.6) необходимо конкретизировать. Предложим следующий подход. Пусть на каком-либо этапе работы алгоритма численной оптимизации получено M вариантов управления, каждому из них соответству-

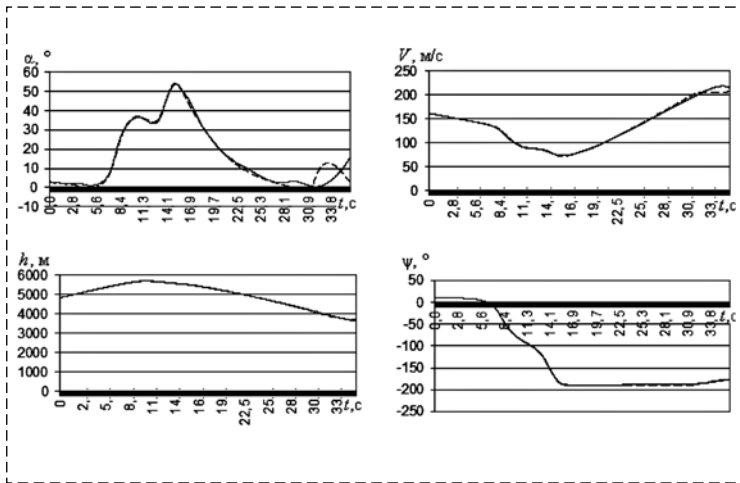


Рис. 7. Сравнение исходных выходных сигналов (сплошная линия) с сигналами, полученными на основе равенства нулю производных функции Гамильтона (штриховая линия), функционал (4.1)
Fig. 7. Fitting of the targeted output signals (solid line) and output signals obtained using the partial control derivatives of the Hamilton function (dash line), functional (4.1)

ет своя функция Гамильтона $H_i(t_j), i = \overline{1, M}$, вычисленная для N дискретных моментов времени $t_j, j = \overline{1, N}$. Среди этих функций максимальной будем считать такую, которая в каждый момент времени t_j или в большинстве таких моментов превосходит все остальные. Рассмотрим момент дискретного времени t_j , для которого определено M значений функции Гамильтона. Каждому из этих значений присвоим ранг r_j^i по следующему правилу: максимальному значению соответствует ранг, равный 1, следующему

за ним — ранг 2 и т. д. Тогда каждой функции $H_i(t_j)$ и каждому управлению $\mathbf{u}_i$ можно поставить в соответствие обобщенный ранг, вычисляемый по формуле

$$J(\mathbf{u}_i) = \left(\sum_{j=1}^N r_j^i - N \right)^2. \quad (6.1)$$

Поясним смысл обобщенного ранга (6.1). Пусть для некоторого управления $\mathbf{u}_i$ функция Гамильтона является наибольшей во всех точках,

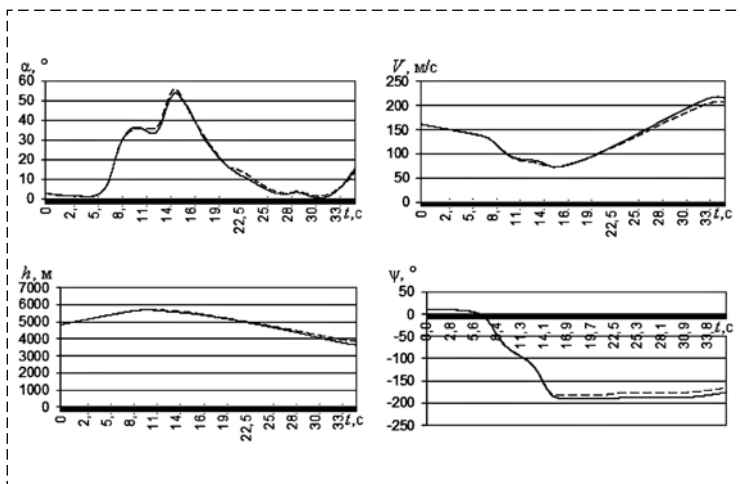


Рис. 9. Сравнение исходных выходных сигналов (сплошная линия) с сигналами, полученными с помощью алгоритма, основанного на максимуме функции Гамильтона (штриховая линия), функционал (6.1)
Fig. 9. Fitting of the targeted output signals (solid line) and output signals obtained using an algorithm based on Hamilton function maximum (dash line), functional (6.1)

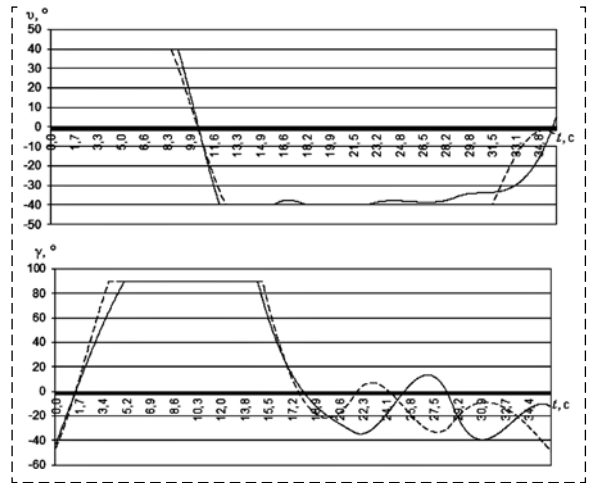


Рис. 8. Сравнение заданных входных сигналов (сплошная линия) с сигналами, полученными на основе равенства нулю производных функции Гамильтона (штриховая линия), функционал (4.1)
Fig. 8. Fitting of known test input signals (solid line) and signals obtained using the partial control derivatives of the Hamilton function (dash line), functional (4.1)

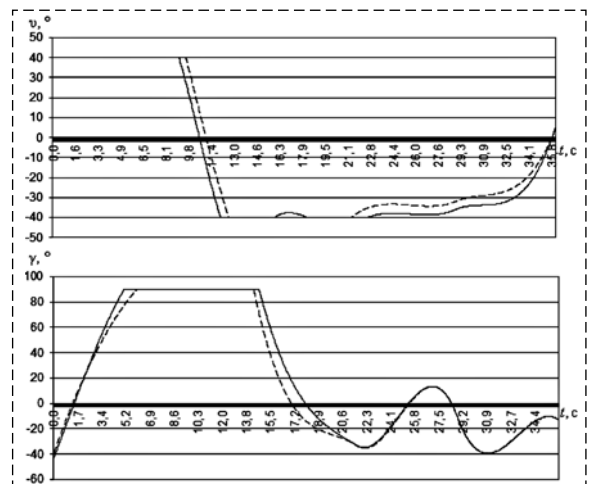


Рис. 10. Сравнение заданных входных сигналов (сплошная линия) с сигналами, полученными с помощью алгоритма, основанного на максимуме функции Гамильтона (штриховая линия), функционал (6.1)
Fig. 10. Fitting of known test input signals (solid line) and output signals obtained using an algorithm based on Hamilton function maximum (dash line), functional (6.1)

т. е. в каждой точке имеет ранг 1. Тогда обобщенный ранг (6.1) равен нулю и имеет минимальное возможное значение. Это позволяет свести задачу поиска максимальной функции Гамильтона к задаче минимизации функционала (6.1).

Результаты обработки тестового примера, полученные при ограничениях на значения параметров $\pm 20\%$, представлены на рис. 9 и 10. Отметим, что при широкой области поиска ($\pm 90^\circ$ по тангажу, $\pm 180^\circ$ по крену) сходимость алгоритма к истинным значениям не обеспечивается. Из рис. 9 и 10 видно, что полученная точность по выходным и входным сигналам примерно соответствует рассмотренным выше результатам прямого метода (см. рис. 5 и 6) и метода, основанного на производных функции Гамильтона (см. рис. 7 и 8), хотя и несколько им уступает.

Заключение

В работе предложен прямой метод нахождения оптимального программного управления, основанный на параметризации управляющего сигнала и непосредственной минимизации функционала с помощью популяционного алгоритма. Работоспособность метода подтверждена по данным математического моделирования.

В работе также на примере тестовой задачи, описывающей пространственное движение маневренного самолета, проводится сравнение прямого метода с двумя классическими решениями, основанными на условии равенства нулю производных функции Гамильтона по управлению и на условии максимума функции Гамильтона по управлению (принцип максимума). В рамках рассмотренного примера все методы продемонстрировали сопоставимые результаты. При этом точность классических алгоритмов оказалась незначительно хуже, и они показали более высокую чувствительность к качеству начального приближения.

Таким образом, практическое значение полученных результатов состоит в том, что по сравнению с классическими алгоритмами применение прямого метода существенно проще, по крайней мере, для рассмотренного класса задач управления маневренным летательным аппаратом, когда управления являются достаточно гладкими функциями, а правые части дифференциальных уравнений объекта непрерывны и имеют непрерывные первые производные. Правомерность этого утверждения

подтверждается, например, представленными выше громоздкими математическими выкладками, необходимыми для вычисления сопряженной вектор-функции, ее производных и функции Гамильтона. В прямом методе выполнять эти вычисления не требуется.

Список литературы

1. **Справочник** по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
2. **Методы** классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егунова. М.: Изд. МГТУ им. Баумана, 2004. 656 с.
3. **Крутько П. Д.** Обратные задачи динамики управляющих систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 237 с.
4. **Черноусько Ф. Л.** Декомпозиция и синтез управления в нелинейных динамических системах // Труды математического института им. В. А. Стеклова РАН. 1995. Т. 211. С. 457–472.
5. **Решмин С. А., Черноусько Ф. Л.** Синтез управления в нелинейной динамической системе на основе декомпозиции // Прикладная математика и механика. 1998. № 1. С. 121–128.
6. **Буков В. Н., Рябченко В. Н., Zubov Н. Е.** Вложение и оптимизация линейных систем // Автоматизация и телемеханика. 2002. № 5. С. 12–23.
7. **Буков В. Н.** Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: издательство научной литературы Н. Ф. Бочкаревой, 2006. 800 с.
8. **Hargraves C. R., Paris S. W.** Direct trajectory optimization using nonlinear programming techniques // Journal of guidance, control, and dynamics. 1987. V. 10. P. 338–342.
9. **Von Stryk O., Bulirsch R.** Direct and indirect methods for trajectory optimization // Annals of operation research. 1992. № 37. P. 357–373.
10. **Olsson A. E.** Particle swarm optimization: theory, technique and applications. Hauppauge, USA: Nova Science Publishers, 2011. 305 p.
11. **Буковский Г. А., Корсун О. Н., Стуловский А. В.** Формирование оптимального управления самолетом на закритических углах атаки на основе популяционного алгоритма оптимизации // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2018. № 6. С. 27–37.
12. **Моисеев Н. Н.** Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
13. **Малышев В. В.** Методы оптимизации в задачах системного анализа и управления. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. 440 с.
14. **Черноусько Ф. Л., Афанасьевский И. М., Решмин С. А.** Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
15. **Понтрягин Л. С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 4-е. М.: Наука, 1974. 331 с.
16. **Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов** / Под ред. Г. С. Бюшгенса. М.: Наука. Физматлит, 1998. 816 с.
17. **Корсун О. Н., Стуловский А. В.** Прямой метод формирования оптимального программного управления летательным аппаратом // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 2. (Принято в печать)
18. **ГОСТ 20058–80.** Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. М.: Изд-во стандартов, 1981. 54 с.
19. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошников В. Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука. 1980. 352 с.
20. **Канышев А. В., Корсун О. Н., Стуловский А. В.** Идентификация моделей гистерезиса аэродинамических коэффициентов на закритических углах атаки // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. № 3. С. 201–208.

Comparison of the Direct Method and the Maximum Principle in the Problem of the Aircraft Program Control Design

O. N. Korsun, marmotto@rambler.ru, A. V. Stulovskii, avstlv2@gmail.com,
State Research Institute of Aviation Systems, Moscow, 125167, Russian Federation

Corresponding author: **Korsun Oleg N.**, D. Sc., Professor, State Research Institute of Aviation Systems, Moscow, 125167, Russian Federation: e-mail: marmotto@rambler.ru

Accepted on January 07, 2019

Abstract

The article deals with the problem of program control design for a dynamic object defined by a nonlinear system of differential equations. Known methods of optimal control require the two-point boundary value problem solution, which in general is coupled with fundamental difficulties. Therefore, this paper proposes a technique that uses the direct method, in which the functional is minimized directly using a population-based algorithm. The use of direct methods is based on the assumption that control signals may be defined by a finite set of parameters. Then a scalar functional is formed, the numerical value of which measures the quality of the obtained solutions. In this case, the search for optimal control is reduced to the problem of single-criterion multi-parameter optimization. The practical importance of this approach is that it eliminates the need to solve a two-point boundary value problem. However, this results in another difficulty, since the approximation of control, in general, requires a large number of parameters. It is known that in this case, the effectiveness of conventional gradient numerical optimization methods decreases markedly. Therefore, it is proposed to take the next step and apply genetic or population-based optimization algorithms that have confirmed their performance in solving this class of problems. For this purpose the paper uses one of the modifications of the particle swarm algorithm. The technique is applied to a test problem describing the spatial movement of a maneuverable aircraft. The direct method is compared with two classical solutions based on the condition that the partial control derivatives of the Hamilton function are equal to zero and with the condition of Hamilton function maximum over controls (Pontryagin's maximum principle). The presented results show the high degree of similarity between obtained controls for all considered methods of selecting the target functional. At the same time, the accuracy of classical algorithms turns out to be slightly worse, and they show a higher sensitivity to the quality of the initial approximation. Thus, the obtained results confirm the approximate equivalence of the direct method and the classical methods of program control design, at least for the class of problems under consideration. The practical significance of this research is that the use of the direct method is much simpler than solving a two-point boundary value problem necessary for classical algorithms.

Keywords: optimal program control, two-point boundary value problem, Pontryagin's maximum principle, population-based numerical optimization algorithm.

Acknowledgements: This article was prepared with the financial support of Russian Foundation for Basic Research, project 18-08-00921-a.

For citation:

Korsun O. N., Stulovskii A. V. Comparison of the Direct Method and the Maximum Principle in the Problem of the Aircraft Program Control Design, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 6, pp. 367–375.

DOI: 10.17587/mau.20.367-375

References

1. Krasovskij A. A. ed. Handbook of automation control theory, Moscow, Nauka, 1987, 712 p. (in Russian).
2. Pupkov K. A., Egupov N. D. ed. Methods of classical and modern theory of automatic control, Moscow, Izd. MG TU im. Bauman, 2004, 656 p. (in Russian).
3. Krut'ko P. D. Inverse problems of the control systems dynamics. Nonlinear models, Moscow, Nauka, 1988, 237 p. (in Russian).
4. Chernous'ko F. L. *Trudy Matematicheskogo Instituta im. V. A. Steklova RAN*, 1995, no. 211, pp. 457–472 (in Russian).
5. Reshmin S. A., Chernous'ko F. L. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1998, no. 1, pp. 121–128 (in Russian).
6. Bukov V. N., Ryabchenko V. N., Zubov N. E. *Avtomatizatsiya i Telemekhanika*, 2002, no. 5, pp. 12–23. (in Russian)
7. Bukov V. N. Systems embedding. Analytical approach to the analysis and synthesis of matrix systems, Kaluga, izdatel'stvo nauchnoj literatury N. F. Bochkarevoj, 2006, 800 p. (in Russian).
8. Hargraves C. R., Paris S. W. Direct trajectory optimization using nonlinear programming techniques, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1987, vol. 10, pp. 338–342.
9. Von Stryk O., Bulirsch R. *Annals of Operation Research*, 1992, no. 37, pp. 357–373.
10. Olsson A. E. Particle swarm optimization: theory, technique and applications, Hauppauge, USA, Nova Science Publishers, 2011, 305 p.
11. Bukovskij G. A., Korsun O. N., Stulovskii A. V. *Vestnik komp'yuternyh i informacionnyh Tekhnologij*, 2018, no. 6, pp. 27–37 (in Russian).
12. Moiseev N. N. Numerical methods in the theory of optimal systems, Moscow, Nauka, 1971, 424 p. (in Russian).
13. Malyshev V. V. Optimization methods in problems of system analysis and control, Moscow, izdatel'stvo MAI-PRINT, 2010, 440 p. (in Russian).
14. Chernous'ko F. L., Anan'evskij I. M., Reshmin S. A. Control methods for nonlinear mechanical systems, Moscow, Fizmatlit, 2006, 328 p. (in Russian).
15. Pontryagin L. S. Ordinary differential equations, Moscow, Nauka, 1974, 331 p. (in Russian).
16. Byushgens G. S. ed. Aerodynamics, stability and controllability of supersonic aircrafts, Moscow, Nauka, 1998, 816 p. (in Russian).
17. Korsun O. N., Stulovskii A. V. *Izvestiya RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2019, no. 2 (in print) (in Russian).
18. GOST 20058–80. Dynamics of aircraft in the atmosphere. Terms, definitions and symbols, Moscow, Izdatel'stvo standartov, 1981, 54 p. (in Russian).
19. Zav'yalov Ju. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L. Methods of spline functions, Moscow, Nauka, 1980, 352 p. (in Russian).
20. Kanyshev A. V., Korsun O. N., Stulovskii A. V. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, no. 3, pp. 201–208. (in Russian).