

И. П. Попов, ст. преподаватель, ip.popov@yandex.ru,
Курганский государственный университет

Антирезонанс — резонанс скоростей

Задачей исследования является установление характера механического резонанса, а именно, того факта, является он резонансом сил или скоростей. Вводятся определения резонанса сил и резонанса скоростей. Уравнению вынужденных механических колебаний соответствует схема параллельного соединения, при котором инертное тело и изменения размеров упругого элемента и демпфера имеют единую скорость, а их реактивные силы складываются. При этом сумма реактивных сил потребителей механической мощности равна силе, развиваемой источником механической мощности, который подобно источнику напряжения в электротехнике можно назвать источником силы. Инертное тело, упругий элемент и демпфер можно соединять не только параллельно, но и последовательно. При последовательном соединении к элементам системы приложена единая сила, а скорости инертного тела и изменения размеров упругого элемента и демпфера складываются. При этом сумма скоростей потребителей механической мощности равна скорости, развиваемой источником механической мощности, который подобно источнику тока в электротехнике можно назвать источником скорости. Описываемый в курсах теоретической механики механический резонанс является резонансом сил. Ему соответствует параллельное соединение инертного тела, упругого элемента и демпфера. При последовательном соединении этих элементов возникает резонанс скоростей.

Ключевые слова: резонанс сил, скоростей, параллельное соединение, последовательное, источник силы, скорости

Введение

Учет резонансных явлений в мехатронных системах является актуальной задачей [1–6]. В основе их описаний лежит широко известное дифференциальное уравнение

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = a_\omega \sin \omega t, \quad (1)$$

которое имеет решение $x = x_1 + x_2$, где

$$x_1 = a e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (2)$$

— собственные затухающие колебания,

$$x_2 = A \sin(\omega t - \varphi) \quad (3)$$

— вынужденные колебания; a , α — постоянные интегрирования;

$$b = \frac{a_1}{2a_2}, \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}, \omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}, \quad (4)$$

$$A = \frac{\delta_0}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4h^2\lambda^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2h\lambda}{1 - \lambda^2}, \lambda = \frac{\omega}{\omega_0}, h = \frac{b}{\omega_0}, \delta_0 = \frac{a_\omega}{a_0}. \quad (5)$$

При подстановках

$$a_2 = m, a_1 = r, a_0 = k, a_\omega = F \quad (6)$$

уравнение (1) превращается в классическое дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F \sin \omega t$$

$$\text{или } m \frac{dv}{dt} + rv + k \int v dt = F \sin \omega t. \quad (7)$$

При

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8)$$

имеет место резонанс.

Теоретическая электротехника, объекты и процессы которой математически изоморфны механическим, различает два резонанса — резонанс напряжений и резонанс токов.

В 1873 г. Максвелл ввел первую (из двух) систему электро-механических аналогий, в соответствии с которой напряжение дуально силе, а ток — скорости. В связи с этим возникает закономерный вопрос: резонанс применительно к уравнению (7) — это резонанс сил или скоростей? Ответ на этот и связанные с ним вопросы составляет предмет настоящего исследования.

Определение 1. Резонанс сил — это резонанс, возникающий на частоте (8) в механической системе, включающей инертное тело и упругий элемент, при котором развиваемые ими реактивные силы максимальны и противоположны.

Определение 2. Резонанс скоростей — это резонанс, возникающий на частоте (8) в механической системе, включающей инертное тело и упругий элемент, при котором развиваемые ими скорости максимальны и противоположны.

Резонанс сил

Уравнению (7) соответствует схема параллельного соединения (рис. 1), при котором инертное тело и изменения размеров упругого элемента и демпфера имеют единую скорость, а их реактивные силы складываются. При этом сумма реактивных сил потребителей механической мощности равна силе, развиваемой источником механической мощности, который подобно источнику напряжения в электротехнике можно назвать источником силы.

Справедлива

Теорема 1. При выполнении условия (8) в механической системе, состоящей из параллельно соединенных инертного тела, упругого элемента и демпфера, что соответствует уравнению (7), возникает резонанс сил.

Доказательство. В соответствии с выражением (4)—(6)

$$A = \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + 4 \frac{r^2 m}{4m^2 k} \frac{m\omega^2}{k}}} = \frac{F}{k} \frac{1}{\omega/k \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} = \frac{F}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}}.$$

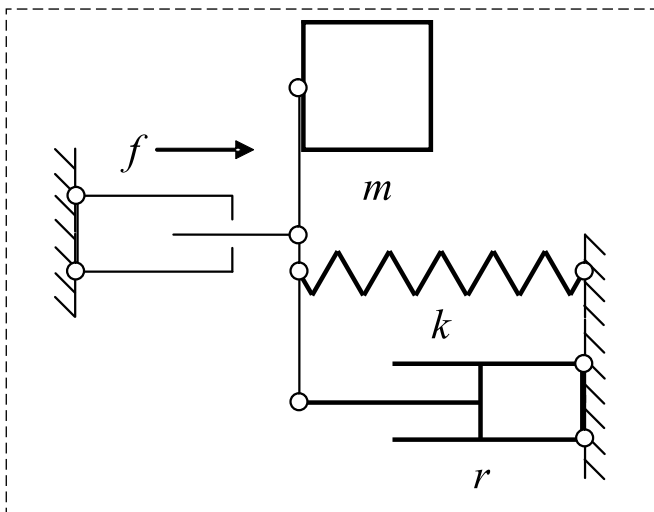


Рис. 1. Параллельное соединение

Fig. 1. Parallel connection

В установившемся режиме

$$x = A \sin(\omega t - \varphi) = \frac{F}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi);$$

$$f_k = kx = \frac{kF}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi); \quad (9)$$

$$f_m = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{m\omega^2 F}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi). \quad (10)$$

При выполнении условия (8)

$$f_k^* = \frac{kF}{\sqrt{k/m} \sqrt{(k/\sqrt{k/m} - m\sqrt{k/m})^2 + r^2}} \times \sin(\omega t - \varphi) = \frac{\sqrt{mk} F}{r} \sin(\omega t - \varphi) = \quad (11)$$

$$= \frac{\sqrt{k/m} \sqrt{mk} F}{\omega r} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{kF}{\omega r} \sin(\omega t - \varphi);$$

$$f_m^* = -\frac{m\sqrt{k/m} F}{\sqrt{(k/\sqrt{k/m} - m\sqrt{k/m})^2 + r^2}} \times \sin(\omega t - \varphi) = -\frac{\sqrt{mk} F}{r} \sin(\omega t - \varphi) = \quad (12)$$

$$= -\frac{\omega \sqrt{mk} F}{\sqrt{k/mr}} \sin(\omega t - \varphi) = -\frac{\omega m F}{r} \sin(\omega t - \varphi).$$

Выражения (11) и (12) показывают, что f_k^* и f_m^* равны и противоположны. Соотношения (9) и (11), (10) и (12) показывают, что f_k^* и f_m^* максимальны.

Теорема доказана.

Следствие 1.1. В первую (максвелловскую) систему электро-механических аналогий необходимо добавляется следующее дуально-инверсное соответствие — последовательное соединение потребителей электрической мощности при резонансе напряжений дуально параллельному соединению потребителей механической мощности при резонансе сил.

Следствие 1.2. При резонансе сил реактивная сила системы упругий элемент—инертное тело равна нулю, поскольку $f_k^* = -f_m^*$.

Величину \sqrt{mk} по аналогии с электротехникой можно назвать *волновым сопротивлением* (системы).

Следствие 1.3. Если $\sqrt{mk} > r$, то реактивные силы, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают приложенную силу.

Пример 1. $F = 100$ Н, $\omega = 2$ рад/с, $m = 10$ кг, $k = 40$ кг·с⁻², $r = 5$ кг·с⁻¹. Найти f_k^* и f_m^* .

В соответствии с выражением (11) и (12)

$$f_k^* = \frac{40 \cdot 100}{2 \cdot 5} \sin(\omega t - \varphi) = 400 \sin(\omega t - \varphi) \text{ (Н);}$$

$$f_m^* = -\frac{2 \cdot 10 \cdot 100}{5} \sin(\omega t - \varphi) = -400 \sin(\omega t - \varphi) \text{ (Н).}$$

Реактивные силы, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают приложенную силу.

Последовательное соединение

Инертное тело, упругий элемент и демпфер можно соединять не только параллельно, но и последовательно (рис. 2).

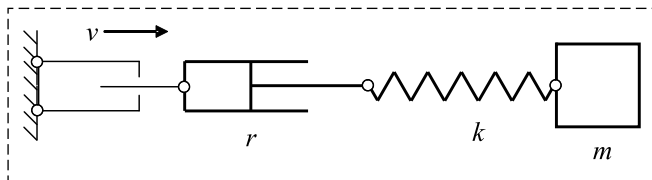


Рис. 2. Последовательное соединение
Fig. 2. Serial connection

При последовательном соединении к элементам системы приложена единая сила, а скорости инертного тела и изменения размеров упругого элемента и демпфера складываются. При этом сумма скоростей потребителей механической мощности равна скорости, развиваемой источником механической мощности, который подобно источнику тока в электротехнике можно назвать источником скорости.

Скорости компонент системы равны

$$v_m = \frac{1}{m} \int f dt, v_k = -\frac{1}{k} k \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \frac{df}{dt},$$

$$v_r = \frac{f}{r}, v = -V \cos \omega t;$$

$$v_m + v_k + v_r = v,$$

$$\frac{1}{k} \frac{df}{dt} + \frac{f}{r} + \frac{1}{m} \int f dt = -V \cos \omega t$$

$$\text{или } \frac{1}{k} \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dt} + \frac{1}{m} f = V \omega \sin \omega t. \quad (13)$$

Последнее уравнение изоморфно уравнению (1). Собственные затухающие колебания силы на штоке источника скорости для после-

довательного соединения в соответствии с соотношением (2) определяются выражением

$$f_1 = a e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \alpha) = a e^{-\frac{k}{2r} t} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k^2}{4r^2}} t + \alpha \right).$$

Вынужденные колебания силы на штоке источника скорости для последовательного соединения в соответствии с соотношением (3) определяются выражениями

$$A = \frac{\delta_0}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4h^2 \lambda^2}} = \frac{V \omega m}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 \frac{m}{k}\right)^2 + 4 \frac{k^2}{4r^2} \frac{m}{k} \omega^2 \frac{m}{k}}} = \frac{V \omega m}{\omega m \sqrt{\left(\frac{1}{\omega m} - \frac{\omega}{k}\right)^2 + \frac{1}{r^2}}};$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{2h\lambda}{1 - \lambda^2} = 2 \frac{k}{2r} \frac{\omega m}{k} \frac{1}{1 - \omega^2 m/k} = \frac{\omega m}{r \omega m (1/\omega m - \omega/k)};$$

$$f_2 = A \sin(\omega t - \varphi) = \frac{V}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}} \times \sin \left[\omega t - \arctg \frac{1}{r(1/\omega m - \omega/k)} \right].$$

Резонанс скоростей

Справедлива

Теорема 2. При выполнении условия (8) в механической системе, состоящей из последовательно соединенных инертного тела, упругого элемента и демпфера, что соответствует уравнению (15), возникает резонанс скоростей.

Доказательство. В установившемся режиме

$$f = \frac{V}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}} \sin(\omega t - \varphi);$$

$$v_m = \frac{1}{m} \int f dt =$$

$$= -\frac{1}{\omega m} \frac{V}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}} \cos(\omega t - \varphi); \quad (14)$$

$$v_k = \frac{1}{k} \frac{df}{dt} =$$

$$= \frac{\omega}{k} \frac{V}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}} \cos(\omega t - \varphi). \quad (15)$$

При выполнении условия (8)

$$v_m^* = -\frac{1}{\sqrt{k/mm}} \times \frac{V}{\sqrt{[1/(\sqrt{k/mm}) - \sqrt{k/m/k}]^2 + 1/r^2}} \times \cos(\omega t - \varphi) = -\frac{Vr}{\sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = -\frac{\sqrt{k/m}Vr}{\omega\sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = -\frac{Vr}{\omega m} \cos(\omega t - \varphi); \quad (16)$$

$$v_k^* = -\frac{\sqrt{k/m}}{k} \times \frac{V}{\sqrt{[1/(\sqrt{k/mm}) - \sqrt{k/m/k}]^2 + 1/r^2}} \times \cos(\omega t - \varphi) = -\frac{Vr}{\sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{\omega Vr}{\sqrt{k/m}\sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{\omega Vr}{\omega m} \cos(\omega t - \varphi). \quad (17)$$

Выражения (16) и (17) показывают, что v_k^* и v_m^* равны и противоположны. Выражение (14) и (16), (15) и (17) показывают, что v_k^* и v_m^* максимальны.

Теорема доказана.

Следствие 2.1. В первую (максвелловскую) систему электро-механических аналогий необходимо добавляется следующее дуально-инверсное соответствие — параллельное соединение потребителей электрической мощности при резонансе токов дуально последовательному соединению потребителей механической мощности при резонансе скоростей.

Следствие 2.2. При резонансе скоростей точка приложения силы к системе упругий элемент—инертное тело неподвижна, поскольку $v_k^* = -v_m^*$.

Следствие 2.3. Если $\sqrt{mk} < r$, то скорости, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают скорость штока источника воздействия.

Пример 2. $V = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $r = 80 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1}$, остальные данные из примера 1. Найти v_k^* и v_m^* .

В соответствии с выражением (16) и (17)

$$v_m^* = -\frac{10 \cdot 80}{2 \cdot 10} \cos(\omega t - \varphi) = -40 \cos(\omega t - \varphi) \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)};$$

$$v_k^* = \frac{2 \cdot 10 \cdot 80}{40} \cos(\omega t - \varphi) = 40 \cos(\omega t - \varphi) \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}.$$

Скорости, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают скорость штока источника воздействия.

Артефакты

Существуют устройства, в удовлетворительном приближении способные выполнять функции источников силы и источников скорости. Источником гармонической скорости может выступать привод с кривошипно-кулисным механизмом и маховиком с большим моментом инерции. Источником гармонической силы может выступать шток пневмоцилиндра, полость которого сообщается с полостью другого пневмоцилиндра, диаметр которого неизмеримо выше, чем у первого, а поршень совершает гармонические колебания.

В работе [7] описана механическая система из *двух* инертных тел и *двух* упругих элементов, для которой обнаружено "удивительное явление", при котором точка приложения гармонической силы остается неподвижной. Это явление, казалось бы, очевидным образом названо антирезонансом. Степень неудачности этого термина можно оценить, применив его к резонансу токов в электротехнике.

В действительности упомянутая система представляет собой суперпозицию "элементарных" систем, рассмотренных выше. По этой причине процессы, происходящие в ней, являются суперпозицией соответствующих процессов, одним из которых и был резонанс скоростей, ошибочно принятый за "антирезонанс". При этом неподвижность точки приложения гармонической силы ("удивительное явление") соответствует следствию 2.2.

Заключение

Описываемый в курсах теоретической механики механический резонанс является резонансом сил. Ему соответствует параллельное соединение инертного тела, упругого элемента и демпфера. При последовательном соединении этих элементов возникает резонанс скоростей.

Список литературы

1. Бурьян Ю. А., Шалай В. В., Зубарев А. В., Поляков С. Н. Динамическая компенсация виброактивных сил в колебательной системе // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 3. С. 192–195. DOI: 10.17587/mau.18.192-195

2. Голуб А. П., Селюцкий Ю. Д. Двухзвенный маятник в упругом подвесе // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 6. С. 380—386. DOI: 10.17587/mau.19.380-386.

3. Градецкий В. Г., Чашухин В. Г. Исследование динамики миниатюрных внутритрубных роботов вибрационного типа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 6. С. 396—401. DOI: 10.17587/mau.19.396-401.

4. Семенов М. Е., Матвеев М. Г., Мелешенко П. А., Соловьев А. М. Динамика демпфирующего устройства на основе материала Ишлинского // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 2. С. 106—113. DOI: 10.17587/mau.20.106-113.

5. Голицына М. В. Оптимальный выбор ускорения маятника в задачах управления вибрационным роботом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 1. С. 31—39. DOI: 10.17587/mau.19.31-39.

6. Семенов М. Е., Матвеев М. Г., Лебедев Г. Н., Соловьев А. М. Стабилизация обратного гибкого маятника с гистерезисными свойствами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 1. С. 516—526. DOI: 10.17587/mau.18.516-525.

7. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 352 с.

Anti-Resonance — Velocity Resonance

I. P. Popov, ip.popov@yandex.ru,

Kurgan State University, Kurgan, 640020, Russian Federation

Corresponding author: Popov Igor P., Senior Lecturer of the Department "Technology of mechanical engineering, machine tools and instruments" of the Kurgan State University, Kurgan, 640020, Russian Federation, e-mail: ip.popov@yandex.ru

Accepted on April 04, 2019

The task of the study is to establish the nature of mechanical resonance, namely, it is a resonance of forces or speeds. Two definitions are introduced. Definition 1. Resonance of forces is a resonance arising at a frequency $\omega = (k/m)^{0.5}$ in a mechanical system including an inert body and an elastic element, at which the reactive forces developed by them are maximal and opposite. Definition 2. The velocity resonance is a resonance arising at a frequency $\omega = (k/m)^{0.5}$ in a mechanical system, including an inert body and an elastic element, at which the speeds developed by them are maximum and opposite. The equation of forced mechanical oscillations corresponds to a parallel connection scheme, in which the inert body and changes in the dimensions of the elastic element and damper have a uniform speed, and their reactive forces are added. The sum of the reactive forces of the consumers of mechanical power is equal to the force developed by the source of mechanical power, which, like a voltage source in electrical engineering, can be called a source of power. Theorem 1 holds. If the condition $\omega = (k/m)^{0.5}$ is satisfied in a mechanical system consisting of parallel-connected inert bodies, an elastic element and a damper, a resonance of forces occurs. The inert body, the elastic element and the damper can be connected not only in parallel but also in series. With a series connection, a single force is applied to the elements of the system, and the velocities of the inert body and the changes in the dimensions of the elastic element and damper are added. The sum of the speeds of consumers of mechanical power is equal to the speed developed by the source of mechanical power, which, like a current source in electrical engineering, can be called a source of speed. Theorem 2 is valid. Under the condition $\omega = (k/m)^{0.5}$ in a mechanical system consisting of a series-connected inert body, an elastic element and a damper, a velocity resonance occurs. The mechanical resonance described in the courses of theoretical mechanics is the resonance of forces. It corresponds to a parallel connection of an inert body, an elastic element and a damper. When these elements are connected in series, a velocity resonance occurs.

Keywords: resonance of forces, velocities, parallel connection, series, source of force, speed

For citation:

Popov I. P. Anti-Resonance — Velocity Resonance, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 6, pp. 362—366. DOI: 10.17587/mau.20.362-366

References

1. Bur'yan Yu. A., Shalay V. V., Zubarev A. V., Polyakov S. N. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye*, 2017, vol. 18, no. 3, pp. 192—195, DOI: 10.17587/mau.18.192-195 (in Russian).

2. Golub A. P., Selyutskiy Yu. D. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye*, 2018, vol. 19, no. 6, pp. 380—386, DOI: 10.17587/mau.19.380-386 (in Russian).

3. Gradetskiy V. G., Chashchukhin V. G. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye*, 2018, vol. 19, no. 6, pp. 396—401, DOI: 10.17587/mau.19.396-401 (in Russian).

4. Semonov M. Ye., Matveyev M. G., Meleshenko P. A., Solov'yev A. M. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 106—113, DOI: 10.17587/mau.20.106-113 (in Russian).

5. Golitsyna M. V. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 31—39. DOI: 10.17587/mau.19.31-39 (in Russian).

6. Semonov M. Ye., Matveyev M. G., Lebedev G. N., Solov'yev A. M. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye*, 2017. Vol. 18, no. 1, pp. 516—525, DOI: 10.17587/mau.18.516-525 (in Russian).

7. Panovko Ya. G., Gubanova I. I. Stability and oscillations of elastic systems: Modern concepts, paradoxes and errors, Moscow, Nauka, 1987, 352 p. (in Russian).