

Б. В. Сухинин, д-р техн. наук, проф., eeo@uic.tula.ru, В. В. Сурков, д-р техн. наук, проф., vvs150747@mail.ru, Тульский государственный университет, г. Тула

## К вопросу о робастных системах автоматического управления

*Предлагается продолжить обсуждение проблем, теоретических основ и практических особенностей построения и синтеза робастных систем управления с большим коэффициентом усиления, позволяющих управлять многомерными нелинейными динамическими объектами высокой размерности с функциональными неопределенностями.*

*Если проблемы не решаются на том уровне, где они появились, необходимо подняться на уровень выше, на более высокую ступень понимания законов природы или словами мастера Люй-Ши Чунь Цю (Китай III век до н.э.): "Мальчик ростом пять чи ведет быка за уздечку и бык подчиняется ему во всем. Это происходит оттого, что человек в данном случае следует естественности" (законам природы). В основу философии дзюдо ("мягкий путь") заложены принципы использования силы и энергии противника для достижения победы.*

*Целью настоящей работы является демонстрация теоретических аспектов и практических особенностей методов синтеза оптимальных систем управления по критерию максимальной точности воспроизведения на примере робастных систем, позволяющих управлять динамическими объектами с функциональными неопределенностями, в том числе неустойчивыми; неминимально-фазовыми; нейтральными; обладающими свойствами дифференцирования. Простота (на уровне инженера) и универсальность, математическая строгость и физическая обоснованность данного подхода заключается в использовании философии дзюдо: подавлении динамики функционально неопределенного объекта и внешних возмущений за счет бесконечно большого коэффициента усиления при конечном сигнале управления с сохранением устойчивости.*

*Теоретически исчерпывающее решение задачи робастного управления дает идея построения систем, устойчивых при неограниченном увеличении коэффициента усиления. Свойствами устойчивости при этом обладают оптимальные системы, синтезированные с применением квадратичных функционалов качества, не зависящих явно от управляющего сигнала, и при ограничении на управляющий сигнал. Существенно, что в отличие от непрерывных систем с не измеряемыми возмущениями и малоизвестным объектом, в которых условия инвариантности предполагают использование бесконечно больших коэффициентов усиления, в релейных (разрывных) системах эквивалентный эффект достигается с помощью конечных управляющих воздействий. Приятным бонусом является повышение точности до оптимального значения и снижение установившейся ошибки до теоретически строго нулевой ошибки регулирования, причем все коэффициенты ошибок (по положению, скорости, ускорению, рывку и т. д.) также равны нулю при наличии внешних и внутренних помех. Фактически, оптимальная по точности система управления эквивалентна системе с астатизмом  $n$ -го порядка: регулятор содержит  $n$  последовательно включенных интеграторов.*

**Ключевые слова:** неопределенный объект, большой коэффициент усиления, оптимальная точность, синтез управления, устойчивость, функциональное уравнение, условие управляемости

Чем меньше известен объект управления, тем больше расход энергии управления и тем выше должно быть качество управления

Оптимальное управление — то управление, в котором достигается наивысший уровень качества управления

### Введение

Мировоззренческая значимость науки о процессах управления и самоуправления, как справедливо заметил А. А. Колесников [1], определяется тем важным обстоятельством, что, как утверждают ученые Санкт-Петербургского госуниверситета (СПБУ) в своей работе "Достаточно общая теория управления" (ДОТУ), "... всякий процесс в Мироздании может быть интерпретирован в качестве процесса управления или самоуправления. По этой причине понятийный и терминологический аппарат именно теории управления как таковой является обобщающим, что позволяет с его помощью единообразно описывать разные про-

цессы: общеприродные, биологические, технические ...". Добавим: и качественно управлять. Управлять можно чем угодно или кем угодно, например, даже в таких областях, как организация и управление целыми государствами; производство товаров, экономика, менеджмент, биология, военное дело, политика или здоровье отдельного человека, его успехи.

Для успешного решения вопросов управления с наивысшим уровнем качества должны быть выполнены три условия: известен объект управления, причем чем меньше известен объект управления, тем больше расход энергии управления; известна конечная цель управления и известен критерий оценки качества управления. Если нет хотя бы одного из этих

условий — нет смысла приступать к решению задачи управления. Подразумевается, что в задачах управления присутствуют, как минимум, два взаимодействующих блока (подсистемы): объект управления (ОУ) и субъект управления, которым может быть человек (ручное управление) или система управления (СУ) (автоматическое управление (самоуправление)). Часто СУ называют регулятором (Р).

Например, в основу философии дзюдо ("мягкий путь") заложены принципы использования силы и энергии противника для достижения победы. Здесь: противник — ОУ, победа — конечная цель управления и одновременно критерий, дзюдо — метод или идеология, или концепция управления.

Для надежной и продолжительной работы системы (особенно мобильной) в автоматическом режиме эти условия необходимо дополнить условием достаточности энергии, автоматически возобновляемой непосредственно в самой системе.

В данной статье мы сузим круг задач и ограничимся рассмотрением вопросов теории оптимального управления применительно к технике и, в частности, к робастному управлению, оставив на ближайшее будущее вопросы снабжения альтернативной электрической энергией.

В настоящее время в теории управления используется множество методов, что является следствием нерешенных до сих пор проблем управления нелинейными, многомерными и многосвязными системами: "Проблемы системного синтеза по-прежнему являются весьма актуальными, трудными и во многом практически малодоступными для современной теории управления" [1]. Именно поэтому в последнее время появились многочисленные работы по различным популярным направлениям нелинейной теории управления: методы АКАР и бэкстеппинг [1], на основе прогнозирующих моделей или на основе полиэдральной методологии, методы адаптивного и интеллектуального управления, методы на основе использования нейронных сетей и нечетких алгоритмов, методы управления объектами с малоизвестной (или малоизученной?) математической моделью [2—4].

Основные методы управления объектами с неизвестной или неполной математической моделью в условиях неопределенности (робастное управление или грубое управление) возникли в 80-е годы XX столетия. В насто-

ящее время большинство авторов используют  $H_\infty$ - или  $K_\infty$ -теории управления для "решения различных робастных задач, приводящих не известно откуда к появлению больших коэффициентов усиления" [2].

Подробно исследовав основные методы синтеза робастных систем управления с большим коэффициентом усиления (МБКУ), их достоинства и недостатки, автор статьи [3] показал, что

- "основным недостатком МБКУ является преобладание эвристических рассуждений и, как следствие, слабая математическая и методологическая основа".
  - "Кажущийся на первый взгляд простым, метод МБКУ при синтезе наталкивается на принципиальную трудность — увеличение коэффициента усиления ( $K$ ) приводит к потере устойчивости системы. Здесь подтверждается сомнительность решения сложных задач простыми эвристическими приемами в соответствии со старой истиной — "чудес не бывает" [4]".
  - "Уникальность проблемы робастности привело к привлечению специальных разделов математики и разработке почти нового математического аппарата. Однако усилие решить плохо формализуемые практические задачи математическими средствами часто приводит к "методологическому кризису" [5]".
- Одним из направлений синтеза робастных систем управления, оставшихся в стороне от "виртуального математического нашествия" [3], может являться метод синтеза оптимальных (с наилучшим качеством, в отличие от всех перечисленных выше) систем управления на основе динамического программирования Р. Беллмана (Richard Ernest Bellman), предложенный еще в 40-х годах прошлого века и до сих пор не нашедший должного развития у исследователей. По-видимому, основными причинами этого являются:
- математическая сложность решения уравнения Беллмана в частных производных, особенно для нелинейных ОУ. В настоящее время не существует универсального способа решения, позволяющего в аналитической форме найти функцию Беллмана;
  - в заданном классе допустимых управлений не всегда существует такое, при котором достигается минимум уравнения Беллмана;
  - функция Беллмана не всегда обладает той гладкостью, которая предполагается при записи уравнения Беллмана. Иными слова-

ми, решение уравнения Беллмана не обязательно совпадает с соответствующей функцией Беллмана. Требование непрерывной дифференцируемости (гладкости) функции Беллмана является существенно ограничительным; оно не выполняется во многих, даже простых задачах, например, в задаче о быстродействии при управлении двумя последовательно соединенными интеграторами. Это приводит к тому, что функция Беллмана оказывается разрывной функцией при определенных значениях своих аргументов даже для линейных ОУ;

- решение уравнения Беллмана может оказаться не единственным. В этом случае требуется дополнительное исследование, позволяющее установить, какое из этих решений является функцией Беллмана исходной задачи оптимального управления;
- наиболее серьезная проблема связана с тем, что при увеличении порядка математической модели ОУ объем вычислений, необходимых для решения задачи синтеза оптимальной системы управления, стремительно нарастает. "Чтобы убедиться в этом, — отмечает А. А. Колесников, — достаточно упомянуть о знаменитой задаче поиска решения основного функционального уравнения Беллмана, которое определяет законы оптимального управления в нелинейной теории АКОР. Хотя это уравнение известно более 30 лет, с тех пор в поисках его численных решений фактически никакого продвижения вперед нет". Американский ученый Р. Беллман назвал это явление "проклятием размерности".

Целью настоящей работы является демонстрация теоретических аспектов и практических особенностей методов синтеза оптимальных систем управления по критерию максимальной точности воспроизведения, позволяющих управлять динамическими объектами с функциональными неопределенностями, в том числе неустойчивыми; неминимально-фазовыми; нейтральными; обладающими свойствами дифференцирования. Простота (на уровне инженера) и универсальность, математическая строгость и физическая обоснованность данного подхода заключается в подавлении динамики функционально неопределенного объекта и внешних возмущений за счет бесконечно большого коэффициента усиления при конечном сигнале управления с сохранением устойчивости (по определению: оп-

тимальная система обязана быть устойчивой, иначе она не оптимальная).

Это не значит, что ОУ не надо предварительно изучать. Известно, что хорошо изученный ОУ — это половина решения задачи успешного управления. Изучать ОУ необходимо для того, чтобы установить основные физические принципы управления функционально неопределенным объектом в условиях внешних неконтролируемых возмущений с помощью обоснованного уровня математики. Как известно: математика без физики глупа, физика без математики слепа.

### Предлагаемый путь решения проблем робастных систем управления

Главным содержанием теории автоматического управления является принцип обратной связи (замкнутая автоматическая система). На рис. 1 приведена общая структурная схема замкнутой системы автоматического управления с одним входом и одним выходом (для упрощения изложения, не влияющего на сущность решаемых проблем), состоящая из двух основных блоков (звеньев): объекта управления ОУ и субъекта управления СУ или регулятора Р. В технических системах часто СУ или Р называют схемой (системой) управления.

Тривиальная, на первый взгляд структурная схема, показанная на рис. 1, не так проста. Доказательством является то, что уже несколько десятков лет она служит неисчерпаемым источником новых идей в области автоматического управления. К настоящему моменту времени к автоматизации предъявляются принципиально новые требования, например, обеспечение робастности.

В системе (рис. 1) путем сравнения сигнала задания  $x_{1\text{зад}}$  с сигналом обратной связи (сигналом выхода ОУ)  $x_1$  регулятор Р (управляющее устройство) на основе сигнала ошибки  $\Delta x$

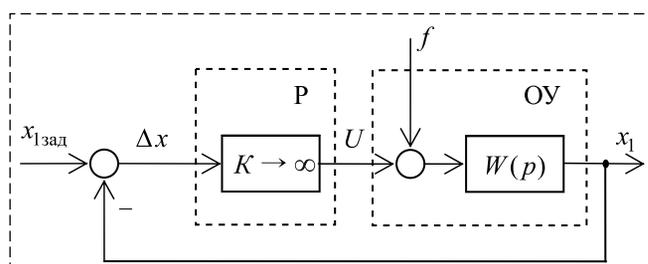


Рис. 1. Структурная схема системы автоматического управления  
Fig. 1. The block diagram of the automatic control system

формирует управляющее воздействие  $u$  на объект. Сигнал задания  $x_{1\text{зад}}$  не должен содержать помех, так же, как и на регулятор не должны действовать помехи. На ОУ могут действовать внешние возмущающие воздействия (помехи)  $f$ , которые, как правило, легко приводятся к входу ОУ и искажают управляющее воздействие (мешают управлению). Все возмущающие воздействия фактически можно рассматривать как нежелательные управления, действующие непосредственно на объект, минуя регулятор. Некоторые из возмущающих воздействий могут быть полезными, т. е. такими, для преодоления которых и предназначен объект, например, полезный момент (момент нагрузки) двигателя. В большинстве случаев возмущающие воздействия заранее неизвестны и могут изменяться случайным или произвольным образом. В общем случае случайным образом может изменяться также и объект управления, например, его параметры или структура, которые можно назвать внутренними нежелательными возмущениями-управлениями и которые также легко приводятся к входу ОУ (рис. 2).

В соответствии с принципом обратной связи регулятор должен гасить влияние любого, даже заранее неизвестного, возмущающего воздействия (в определенных пределах), стремясь все время ликвидировать отклонение  $\Delta x$ , по какой бы причине оно не возникло. Регулятор тем лучше справляется со своей задачей, чем меньше это отклонение и чем быстрее его гашение. Здесь можно отметить две главные задачи, которые должен решать регулятор: как можно точнее ликвидировать отклонение (задача точности воспроизведения задания) и как можно быстрее создать условия для решения задачи точности (задача быстродействия).

Очевидно, что вначале надо решить задачу максимальной точности воспроизведения (что толку от того, что деталь изготовлена быстро, с минимумом ресурсов, но не точно). Поэтому оставим на ближайшее будущее вопросы быстродействия. Отметим только, что быстродействия ОУ можно достигнуть тремя способами или их комбинацией: либо существенным увеличением мощности управляющего сигнала (силовое управление, пример: мгновенное перемещение качелей на любой желаемый угол задания, здесь не идет речь о возникающих перегрузках ОУ), либо уменьшением влияния инерции и (или) гравитации на ОУ (не силовое управление, использующее новые знания об

управлении, пример: при давлении на ось гироскопа он безынерционно перемещается перпендикулярно вбок), либо применением традиционных способов при ограниченной мощности (незначительное силовое управление, использующее известные законы естественности поведения ОУ, пример: дзюдо или мальчик ростом пять чи ведет быка за уздечку и бык подчиняется ему во всем ...).

Для решения задачи точности необходимо выполнить два очевидных условия: 1) мощность регулятора совместно с объектом управления должна быть больше мощности возмущений (например, момента нагрузки); 2) чем больше  $K$  (рис. 1), тем меньше  $\Delta x$ , и при  $K \rightarrow \infty$   $\Delta x = U/(K \rightarrow \infty) = 0$ . Однако с увеличением  $K$  сигнал управления  $U$  также неограниченно увеличивается (что равносильно неограниченному увеличению мощности управления), и на сигнал управления приходится накладывать ограничение  $|U| \leq U_m$ , причем линейный регулятор превращается в релейный. Здесь  $U_m$  — напряжение питания ОУ, например, двигателя. Часто сигнал управления для удобства масштабируют:  $U = U_m u$ ;  $|u| \leq 1$ . Кроме того, с увеличением  $K$  устойчивость обычной замкнутой системы уменьшается, вплоть до потери устойчивости.

Особенностью замкнутых релейных систем является возможность возникновения скользящих режимов. Скользящий режим работы релейной системы — это специфический режим, заключающийся в том, что при среднем значении сигнала на входе релейного элемента, равном нулю, под действием обратных связей, охватывающих этот элемент, он переключается с высокой частотой (теоретически с бесконечно высокой), и среднее значение выходного сигнала в это время по абсолютной величине меньше максимального, соответствующего одному из устойчивых положений релейного элемента.

Временно предположим, что каким-то образом решен вопрос устойчивости системы при  $K \rightarrow \infty$ . Тогда, как известно, передаточные функции по управляющему и возмущающему воздействиям (см. рис. 1):

$$\Phi_y(p) = \frac{x_1(p)}{x_{1\text{зад}}(p)} = \frac{KW(p)}{1 + KW(p)} = 1;$$

$$\Phi_B(p) = \frac{x_1(p)}{f(p)} = \frac{W(p)}{1 + KW(p)} = 0,$$

при этом выходной сигнал спустя время регулирования  $t_p$  ( $t_p$  — время отсутствия обратной

связи или разомкнутого состояния системы при максимальном сигнале управления до возникновения скользящего режима) становится инвариантен к параметрам и структуре ОУ, т. е. в точности повторяет входной сигнал ( $x_1 = x_{1\text{зад}}$ ,  $\Delta x = 0$  при любой передаточной функции ОУ) и инвариантен к любым возмущениям (помехам), в том числе случайным. На время  $t_p$ , естественно, влияет ОУ за счет своих динамических и прежде всего инерционных свойств (это вторая задача регулятора). Можно показать [6], что для точного отслеживания входного сигнала частота его изменения должна удовлетворять условию

$$\omega_0 \ll 2\pi/t_p. \quad (1)$$

Чем меньше  $t_p$  (чем больше быстродействие), тем выше может быть частота изменения входного сигнала. Наименьшим временем  $t_p$  (но не оптимальным быстродействием) обладают системы с оптимальным (минимальным) "расходом сигнала управления" (термин введен А. А. Красовским). Однако, чем выше частота помех, действующих на объект, тем меньше они оказывают влияние на скользящий режим работы (из-за инерционности ОУ). Наиболее "вредны" постоянные воздействия-помехи.

Итак, теоретически исчерпывающее решение задачи робастного управления дает идея построения систем, устойчивых при неограниченном увеличении коэффициента усиления. Свойствами устойчивости при  $K \rightarrow \infty$  обладают оптимальные системы, синтезированные с применением квадратичных функционалов качества, не зависящих явно от управляющего сигнала, и ограничении на управляющий сигнал. Такой интегральный квадратичный функционал обеспечивает наиболее быстрые переходные процессы отработки рассогласования между действительным значением регулируемой переменной и ее предписанным значением, так как экстремалью такого функционала является единичная ступенчатая функция. Существенно, что в отличие от непрерывных систем с не измеряемыми возмущениями и малоизвестным объектом, в которых условия инвариантности предполагают использование бесконечно больших коэффициентов усиления, в релейных (разрывных) системах эквивалентный эффект достигается с помощью конечных управляющих воздействий. Приятным бонусом является повышение точности до оптимального значения и снижение установив-

шейся ошибки до теоретически строго нулевой ошибки регулирования, причем все коэффициенты ошибок (по положению, скорости, ускорению, рывку и т. д.) также равны нулю при наличии внешних и внутренних помех. Фактически, оптимальная по точности система управления эквивалентна системе с астатизмом  $n$ -го порядка: регулятор содержит  $n$  последовательно включенных интеграторов,  $n$  — порядок ОУ (здесь не затрагиваются вопросы устойчивости такой системы).

### Описание метода решения

Один из возможных подходов к разработке математически строгой физической теории робастного управления может базироваться на теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов [7] по критерию максимальной точности воспроизведения (АКОРТ).

Общим признаком интегральных критериев точности регулирования является их независимость в явной форме от управления:

$$J = \int_0^T F_0(\mathbf{X}) dt, \quad F_0(\mathbf{X}) > 0,$$

время  $T$  — не определено, (2)

где  $\mathbf{X}$  — вектор состояния ОУ, причем критерий быстродействия является частным случаем критерия точности при  $F_0(\mathbf{X}) = 1$  или критерий быстродействия является одновременно и критерием точности. Можно показать [6], что в рамках общего критерия точности (2) находится также и энергосберегающий критерий расхода "сигнала управления", присутствующий в критерии обобщенной работы А. А. Красовского.

Известно (например, из принципа максимума Л. С. Понтрягина или динамического программирования Р. Э. Беллмана), что минимизация критерия (2) обеспечивается идеальными релейными управлениями:

$$u_{ij}(t) = -\text{sign}(\psi_{ij}(\mathbf{X})), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где  $|u_{ij}(t)| \leq 1$ ,  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  — вектор состояния (вектор фазовых координат) ОУ;  $n$  — порядок ОУ (максимальное число интервалов управления);  $m$  — число управляющих воздействий;  $\psi_{ij}(\mathbf{X})$  — искомые функции переключения, причем  $\psi_{ij}(\mathbf{X}) = 0$  — поверхности переключения, проходящие через начало координат  $\psi_{ij}(0) = 0$ .

Пусть ОУ с функциональной неопределенностью описывается векторно-матричным нелинейным дифференциальным уравнением возмущенного движения в соответствии с теорией возмущенно-невозмущенного движения А. М. Ляпунова:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}) + \mathbf{B}(\mathbf{X})\mathbf{U} + \mathbf{V}(t), \quad (4)$$

где  $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_m)^T$  — вектор управления;  $\mathbf{A}(\mathbf{X}) = (a_1(\mathbf{X}), \dots, a_n(\mathbf{X}))^T$  — нелинейная нестационарная ограниченная вектор-функция;  $\mathbf{B}(\mathbf{X}) = (b_{ij}(\mathbf{X}))_{n \times m}$  — нелинейная нестационарная ограниченная функциональная матрица;  $\mathbf{V}(t) = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n)^T$  — вектор-функция неконтролируемых ограниченных внешних возмущений. Предполагается, как минимум, что известен (из ничего сделать чего-либо невозможно) и может быть измерен вектор состояния ОУ с необходимой точностью и известны входы подачи управляющих воздействий. В будущем решим задачу, предполагая, что известна и может быть измерена только выходная координата объекта управления, однако закон управления будет сложнее.

Для упрощения дальнейшего изложения, не влияющего на сущность решаемой задачи, рассмотрим одномерный объект  $(b_n(\mathbf{X}))$  и представим матричное уравнение (4) в виде системы обычных дифференциальных уравнений в форме Коши с учетом масштабирования сигнала управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(\cdot) + \vartheta_1(\cdot); \\ \dot{x}_2 = a_2(\cdot) + \vartheta_2(\cdot); \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_n(\cdot) + b(\cdot)U_m u + \vartheta_n(\cdot). \end{cases} \quad (5)$$

В будущем распространим решение задачи синтеза в аналитическом виде закона оптимального управления, стабилизирующего движение объекта по выходной координате  $x_1$  с нулевой ошибкой регулирования, и на многомерные объекты с  $m$  входами управления.

Поскольку  $\mathbf{A}(\cdot)$ ,  $\mathbf{B}(\cdot)$  и  $\mathbf{V}(\cdot)$  являются неизвестными, то представим объект (4), (5) в виде линейной известной части и нелинейной неизвестной части:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(\cdot); & f_i(\cdot) = -x_{i+1} + a_i(\cdot) + \vartheta_i(\cdot); \\ \dot{x}_n = f_n(\cdot) + b(\cdot)U_m u; & f_n(\cdot) = a_n(\cdot) + \vartheta_n(\cdot), \end{cases} \quad (6)$$

$i = 1, 2, \dots, n-1.$

Здесь линейная часть объекта представлена наиболее простым последовательным соединением  $n$  интегрирующих звеньев (рис. 2). Все  $f_i(\cdot)$ ,  $b(\cdot)$  можно рассматривать как нежелательные помехи, действующие на объект.

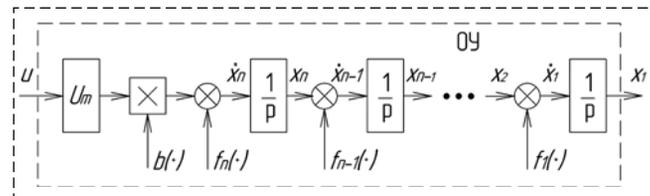


Рис. 2. Структурная схема объекта управления  
Fig. 2. The block diagram of the control object

Рассмотрим решение задачи синтеза закона оптимального управления объектом (6) с использованием идеологии теории АКОРТ [6, 7].

*Решение.* Составим функциональное уравнение для объекта (6), предполагая  $g_i = \text{const} \neq 0$ ,  $g_1 = 1$  (т. е. будем искать решение в классе линейных обратных связей), аналогично работе [7]:

$$\dot{\psi}(\mathbf{X}) = \dot{x}_1 + g_2 \dot{x}_2 + \dots + g_n \dot{x}_n. \quad (7)$$

В этом случае функция переключения  $\psi$  определяется простым интегрированием уравнения (7):

$$\psi = x_1 + g_2 x_2 + \dots + g_n x_n + C, \quad (8)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования. Потребовав, чтобы поверхность переключения  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  проходила через начало координат ( $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ ), получим:  $C = 0$  в случае аналитического интегрирования уравнения (7).

Подставим в уравнение (7) уравнения объекта:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(\mathbf{X}) &= \dot{x}_2 + f_1 + g_2(\dot{x}_3 + f_2) + \dots \\ &\dots + g_{n-1}(\dot{x}_n + f_{n-1}) + g_n(bU_m u + f_n) = \end{aligned} \quad (9)$$

$$= \dot{x}_2 + g_2 \dot{x}_3 + \dots + g_{n-1} \dot{x}_n + g_n b U_m u + f,$$

где  $f = f_1 + g_2 f_2 + \dots + g_n f_n$ .

По уравнению (9) запишем условие управляемости (оно же: реализуемости, устойчивости, возникновения скользящего режима):

$$|x_2 + g_2 x_3 + \dots + g_{n-1} x_n + f| \leq g_n b U_m. \quad (10)$$

Ограничение (10) затруднительно реализовать при неизвестных функциях  $f$  и  $b$ . Един-

ственный способ обеспечить выполнение условия (10) — увеличение  $U_m$  (например, для самого "плохого" варианта, а также возможно динамическое изменение  $U_m$  в зависимости от текущих условий) или надо менять ОУ на более мощный. За малоизученный объект управления приходится платить повышенным расходом энергии управления (например, в Америке до сих пор работают целые институты по изучению ОУ — России). Однако в любом случае управление  $u = -\text{sign}\psi$  неизбежно переведет объект в какую угодно малую окрестность поверхности переключения  $\psi = 0$ :

$$\psi = x_1 + g_2 x_2 + \dots + g_n x_n = 0. \quad (11)$$

Движение объекта вдоль поверхности переключения к началу координат будет происходить в скользящем режиме при выполнении условий (10), (11). Дифференцируя уравнение (11), подставляя уравнения линеаризованного объекта (6), получим характеристическое уравнение  $(n - 1)$ -го порядка (по А. А. Колесникову, произошло сжатие фазового пространства):

$$1 + g_2 p + \dots + g_n p^{n-1} = 0. \quad (12)$$

Применяя многочисленные хорошо известные методы определения устойчивости (например, критерий Гурвица), определяем соотношения для  $g_i$ .

Если в результате изучения ОУ функция  $b(\cdot)$  известна, то можно поручить регулятору измерить вектор производных  $\dot{\mathbf{X}} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)^T$  от вектора состояния с помощью наблюдающего устройства за вектором фазовых координат  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$ , используя тот же метод АКОРТ, затем вычислить по уравнениям объекта (6) все  $f_i(\cdot)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и реализовать ограничение (10). В этом случае не потребуется увеличивать  $U_m$ , чтобы не допускать перерасход энергии управления. Однако время  $t_p$  должно возрасти из-за ограничения (10).

Если вектор  $\mathbf{X}$  неизвестен, то его можно восстановить по выходной координате  $x_1$  и известному порядку  $n$  ОУ.

При неизвестном порядке ОУ его можно попытаться определить путем постепенного увеличения  $n$  до необходимого значения и периодической проверкой системы управления на качество работы ОУ.

## Иллюстрация полученных результатов исследования

Рассмотрим пример 2, взятый из работы [1], где приведены сравнительные характеристики и выявлены достоинства и недостатки различных методов АКАР и бэкстеппинга:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^3 x_2^2; \\ \dot{x}_2 &= x_2(x_3 + x_4); \\ \dot{x}_3 &= x_4; \quad \dot{x}_4 = U_m u. \end{aligned} \quad (13)$$

Будем предполагать, что уравнения реального объекта (13) записаны в отклонениях с учетом масштабирования сигнала управления.

*Решение.* Представим объект (13) в виде линейной известной части и нелинейной неизвестной для нас части:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + f_1(\cdot); \quad f_1(\cdot) = -x_2 - x_1 + x_1^3 x_2^2; \\ \dot{x}_2 &= x_3 + f_2(\cdot); \quad f_2(\cdot) = -x_3 + x_2(x_3 + x_4); \\ \dot{x}_3 &= x_4; \quad \dot{x}_4 = U_m u. \end{aligned} \quad (14)$$

Функциональное уравнение:

$$\psi(\mathbf{X}) = \dot{x}_1 + g_2 \dot{x}_2 + g_3 \dot{x}_3 + g_4 \dot{x}_4. \quad (15)$$

Функция переключения:

$$\psi = x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4. \quad (16)$$

Дифференцируя уравнение  $\psi = 0$ , подставляя уравнения линеаризованного объекта (14), получим характеристическое уравнение:

$$1 + g_2 p + g_3 p^2 + g_4 p^3 = 0. \quad (17)$$

Применяя критерий Гурвица, определяем соотношения для  $g_i$ :

$$g_i > 0, \quad i = \overline{1, 4}; \quad g_2 g_3 > g_4. \quad (18)$$

Любые ограничения, например, ограничение  $|x_4| \leq 1$ , учитываются методом подчиненного управления.

Как дополнительный бонус: поскольку выбор  $g_i$  с учетом (18) произволен, то подбором коэффициентов или соответствующими расчетами (см., например [4]) можно обеспечить наибольшее быстродействие системе с линейными обратными связями для данных начальных условий. Так, для монотонной переходной характеристики [4] должны быть кратные корни уравнения (17). При этом  $g_2 = g_3 = 3, g_4 = 1$ ,

и закон управления в отклонениях при ограничении координаты  $x_4$  имеет вид

$$u = -\text{sign}(\text{sign}(x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4) - x_4). \quad (19)$$

Здесь важно отметить, что линейные обратные связи могут и не дать наименьшее время переходного процесса в общем случае (при изменении начальных условий, параметров ОУ или возмущений).

На рис. 3 приведены результаты моделирования объекта (13) с управлением (19) при  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0,5, x_3(0) = 1, x_4(0) = 0,5, U_m = 10, |x_4| \leq 1$ .

По сравнению с рисунками (рис. 1–4) примера 2, приведенными в работе [1], здесь при том же характере переходных процессов их время меньше, а закон управления проще по структуре и математическому выводу, и для его получения не надо ничего выдумывать в отличие от других методов. Если координату  $x_4$  не ограничивать, то ее отрицательное значение доходит до 3,625 единиц при несущественном уменьшении времени переходных процессов. Из рис. 3 следует, что при  $t_p \approx 5$  в системе начинается устойчивый скользящий режим.

Рассмотрим следующий интересный пример из работы [4]. Решим задачу управления

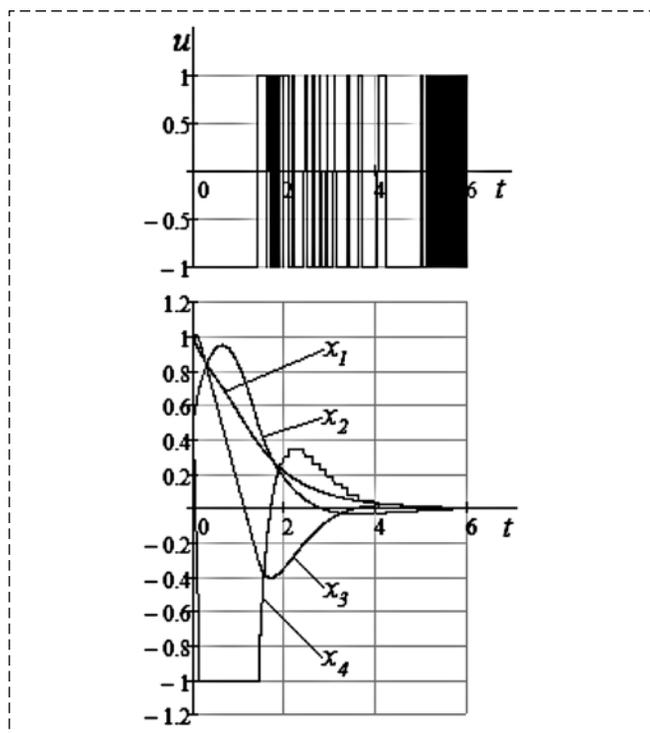


Рис. 3. Переходные процессы в системе (13), (19)  
Fig. 3. Transients in the system (13), (19)

параметрическим маятником с периодически изменяющимися коэффициентами:

$$\ddot{y} = -a \frac{\dot{R}}{R} \dot{y} - g \frac{1}{R} \sin y + \frac{1}{mR^2} U + n(t),$$

где  $m = 1$  кг,  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>,  $a = 2$ ;  $0 < R_m \leq R \leq R_M$ ,  $y(0) = (0 \ 0)^T$ ,  $|U| \leq 60$ .

Уравнение движения груза:

$$R = 0,8 + 0,1 \sin(8t) + 0,3 \cos(4t).$$

На объект в точке приложения управления действует гауссовская помеха  $n(t)$ , представленная в работе [4, рис. 1], из которого следует, что  $|n(t)| \leq 1,5$ . В свое время Фурье Жан Батист Жозеф показал, что любой случайный сигнал (в том числе и гауссовскую помеху) можно представить неограниченной суммой не случайных (детерминированных) синусоидальных воздействий определенной амплитуды, частоты и фазы. При моделировании заменим гауссовскую помеху на синусоидальный сигнал с той же амплитудой и набором разных частот.

Обозначим:  $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, U = 60u, |u| \leq 1$ . Запишем уравнение объекта в форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -a \frac{\dot{R}}{R} x_2 - g \frac{1}{R} \sin(x_1) + \frac{60}{mR^2} u + n(t). \end{aligned} \quad (20)$$

Из работы [4, рис. 2, a] следует, что  $45 \leq \frac{60}{mR^2} \leq 294$  — положительно определенная ограниченная функция с минимальным значением, равным 45.

Эталонная траектория (сигнал задания) в работе [4] задана в виде

$$y_d = 0,5 \sin(0,5t) + 0,5 \cos t.$$

Решение. Функциональное уравнение имеет вид

$$\dot{\psi}(\mathbf{X}) = \dot{x}_1 + g_2 \dot{x}_2 \quad (21)$$

и функция переключения

$$\psi = x_1 + g_2 x_2. \quad (22)$$

Подставим в уравнение (21) уравнения объекта:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(\mathbf{X}) &= x_2 - ag_2 \frac{\dot{R}}{R} x_2 - \\ &- g_2 g \frac{1}{R} \sin x_1 + g_2 n(t) + g_2 \frac{60}{mR^2} u. \end{aligned} \quad (23)$$

Условие управляемости:

$$\left| x_2 - ag_2 \frac{\dot{R}}{R} x_2 - g_2 g \frac{1}{R} \sin x_1 + g_2 n(t) \right| \leq g_2 \frac{60}{mR^2}. \quad (24)$$

Из второго уравнения объекта (20), по крайней мере, для позиционных и следящих систем при максимальном сигнале управления в установившемся режиме следует:

$$-a \frac{\dot{R}}{R} x_2 - g \frac{1}{R} \sin x_1 + n(t) = \left| \frac{60}{mR^2} \right|. \quad (25)$$

Подставляя соотношение (25) в (24), получим

$$\left| x_2 + g_2 \left| \frac{60}{mR^2} \right| \right| \leq g_2 \frac{60}{mR^2}$$

или

$$|x_2| \leq 2g_2 \frac{60}{mR^2}. \quad (26)$$

Условие (26) либо надо принудительно реализовать в системе управления, либо показать, что оно выполняется автоматически: подставляя в условие (26) минимальное значение  $60/mR^2 = \min$ , имеем:  $|x_2| \leq 90g_2$ . Запишем характеристическое уравнение при движении вдоль поверхности переключения:  $1 + g_2 p = 0$ , из которого для наиболее быстрого не колебательного переходного процесса выбираем:  $g_2 = 0,14$ . При этом должно быть выполнено ограничение (26):  $|x_2| \leq 12,6$ .

Запишем закон управления в отклонениях:

$$u = \text{sign} \psi = \text{sign}(x_1 + 0,14x_2). \quad (27)$$

На рис. 4 приведены результаты моделирования объекта (20) с управлением (27) при  $x_1(0) = -1,5$ ,  $x_2(0) = 0$ . Частота синусоидального сигнала амплитудой 1,5 изменялась от нуля, 10, 100, ..., до  $10^{10}$  Гц.

В отличие от рисунка примера, приведенного в работе [4, рис. 3, а], здесь переходные процессы практически оптимальны по быстродействию. При этом ограничение (26) автоматически выполняется, и нет надобности его реализовывать. Ошибка после окончания переходных процессов обусловлена недостаточной точностью компьютерного моделирования и зависит от выбранной программы моделирования, точности вычислений, дискретизации по времени и уровню. Для окончательного вывода лучше провести лабораторные испытания на реальном объекте. (Но "денег нет, но вы держитесь" — Д. А. Медведев).

Для реальных координат закон управления объектом (20) имеет вид

$$u = \text{sign}(y_d - \psi) = \text{sign}(y_d - x_1 - 0,14x_2). \quad (28)$$

Рассмотрим, как и в работе [4], случай параметрической неопределенности.

Пусть коэффициент  $a$  и масса груза  $m$  меняются на 50 %:  $a = [1; 1,5; 2; 2,5]$ ;  $m = [0,5; 1; 1,5; 2]$ .

На рис. 5 показаны пучки переходных характеристик выходной координаты  $x_1$ , сигнала задания (эталонная траектория)  $y_d$  и ошибки задания  $y_d - x_1$  при начальном условии  $x(0) = (2; 0)^T$ .

Из рис. 5 следует, что ошибка слежения недопустимо большая.

Для более информативного представления процесса слежения за эталонной траекторией  $y_d$  и выяснения причин появления ошибки рассмотрим графики (рис. 6) одного наиболее "вредного" случая:  $a = 1$ ;  $m = 0,5$  для системы (20) с управлением (27) и с управлением, взятым из работы [4] для сравнения:

$$U = 120(3,23e + \dot{e}); |U| \leq 60; \quad (29)$$

$$e = y_d - x_1; \dot{e} = \dot{y}_d - \dot{x}_2.$$

Графики на рис. 6 получены в одной и той же среде моделирования.

При управлении (28) ошибка несущественно меньше, чем при управлении (29) и несколько более медленном переходном процессе, что свидетельствует об общем (системном) недостатке процесса слежения за входным сигналом  $y_d$ , поскольку законы управления (28) и (29) практически одинаковы за некоторым несущественным исключением.

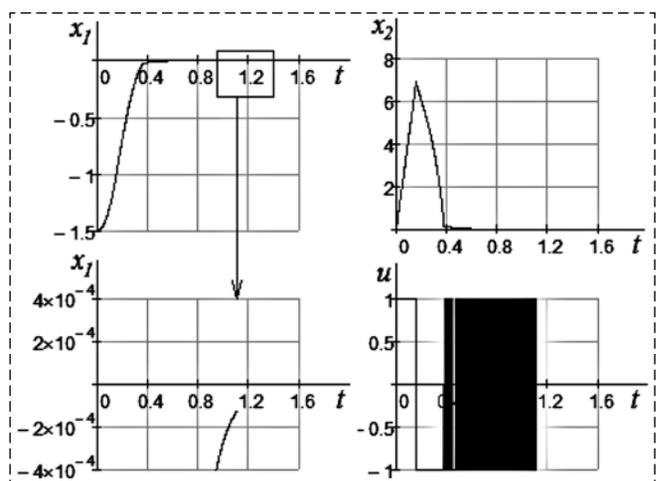


Рис. 4. Графики сигнала управления, переходных процессов и изменения ошибки в системе (20), (27)

Fig. 4. Graphs control signal, transients and changes in the error in the system (20), (27)

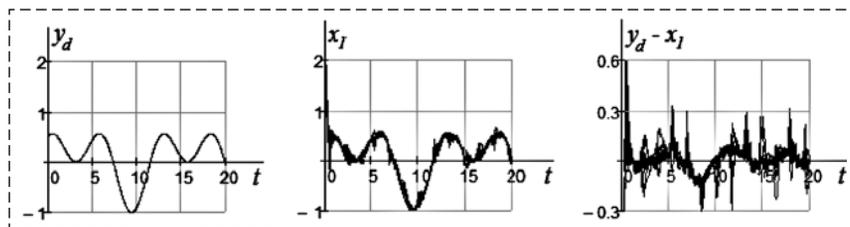


Рис. 5. Сигнал управления (задание) и переходные характеристики при одновременном изменении параметров в системе (20), (28)

Fig. 5. Control signal (task) and transient characteristics while changing the parameters in the system (20), (28)

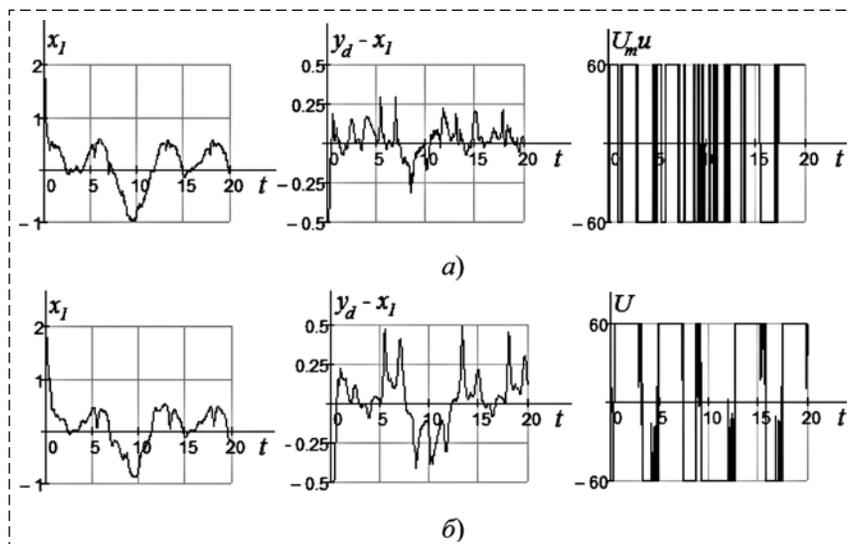


Рис. 6. Реакция системы (20) на задание  $y_d$  (рис. 5):  
а — управление (28); б — управление (29)

Fig. 6. Reaction of the system (20) to the task  $y_d$  (Fig. 5):  
а — control (28); б — control (29)

Из рис. 4—6 следует, что за время даже почти быстродействующего переходного процесса входной сигнал  $y_d$  успевает значительно измениться, что явно указывает на нарушение условия (1). Действительно, на графиках управлений (рис. 6) отсутствуют устойчивые скользящие режимы работы в отличие от графиков управлений (см. рис. 3, 4).

Для выполнения условия (1) в данном случае необходимо решать вторую задачу оптимального быстродействия. Если это не поможет, нужно заменить ОУ на более быстродействующий или снизить требования по частоте входного сигнала.

### Заключение

В работе продолжено обсуждение проблемы робастности и связанной с ней "весьма привлекательной" задачи синтеза робастного управления в условиях неопределенности характеристик объекта и внешней среды. Во многих постановках задачи синтеза робастных систем управле-

ния преобладают эвристические рассуждения, интуитивные предположения "highly likely" о появлении "больших коэффициентов усиления". Этим как бы подтверждается сомнительность решения сложных задач простыми эвристическими приемами в соответствии со старой истиной — "чудес не бывает". Чудес действительно не бывает, чудеса возникают из-за недостатка знаний законов Мироздания, по которым эти "чудеса" имеют место быть. Чудес не бывает для тех, кто не поднялся на более высокую ступень понимания законов природы (нравственности). Чудеса (новые открытия) даются нам по достижении необходимого уровня нравственности большого числа людей.

Поскольку все процессы в Мироздании носят управляемый или самоуправляемый характер, в том числе и в технических системах, то очевидно, что в пределе можно поручить самой системе управления добывать знания об ОУ на основе законов Мироздания, которых мы возможно еще не знаем, примером чего может быть создание интел-

лектуальных систем управления с искусственным разумом. Однако знание даже одного закона самоуправления — принципа обратной связи вкупе с оптимальным управлением — позволяет худо-бедно решить задачу робастного управления при некоторых ограничениях, накладываемых на систему управления. Чем лучше изучен ОУ с помощью разнообразных датчиков и выявленных закономерностей его функционирования, тем меньшее число ограничений необходимо учитывать и тем выше будет качество управления и тем меньше расход энергии на управление. Однако если в Мироздании нет соответствующего закона (или неизвестно о нем), то все наши усилия будут бесполезны: например, как получить энергию из эфира (вакуума, воздуха), если все убеждены, что его нет; как устранить гравитацию, как преодолеть инерцию объекта и повисить его быстродействие или как использовать инерцию в своих целях для получения свойств робастности, если об этом не только никто не знает, но даже и не слышали.

## Список литературы

1. Колесников А. А., Колесников Ал. А., Кузьменко А. А. Методы АКАР и бэкстеппинг в задачах синтеза нелинейных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 7. С. 435–444.
2. Рустамов Г. А., Рустамов Р. Г. Особенности  $K_{\infty}$ -робастных систем управления // XVIII Международная Научно-практическая конф. "Научное обозрение физико-математических и технических наук в XXI веке". Prospero. 2015. № 6 (18). С. 30–33.
3. Рустамов Г. А. Анализ методов построения предельных робастных систем управления с большим коэффициентом усиления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 6. С. 363–372.

4. Рустамов Г. А. Робастная система управления с повышенным потенциалом // Известия Томского политехнического университета. 2014. Т. 324, № 5. С. 13–19.
5. Филимонов Н. Б. Методологический кризис "всепобеждающей математизации" современной теории управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 5. С. 291–299.
6. Сурков В. В., Сухинин Б. В., Ловчаков В. И., Соловьев А. Э. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов по критериям точности, быстродействию, энергобережению. Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. 300 с.
7. Сухинин Б. В., Сурков В. В. К вопросу о методологическом кризисе современной теории оптимального управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 1. С. 26–30.

## To the Issue of Robust Automatic Control Systems

B. V. Sukhinin, eeo@uic.tula.ru, V. V. Surkov, vvs150747@mail.ru,  
The Tula State University, Tula, 300034, Russian Federation

Corresponding author: Surkov Victor V., D. Sc. Tech., Professor,  
The Tula State University, Tula, 300034, Russian Federation, e-mail: vvs150747@mail.ru

Accepted on February 28, 2019

### Abstract

*This work is proposed to continue the discussion of the problems, theoretical foundations and practical features of the construction and synthesis of robust control systems with high gain, allowing us to control multidimensional nonlinear dynamic objects of high dimensional with functional uncertainties. If problems could not be solved at the level where they appeared, it is necessary to rise the level of understanding of the laws of nature, or in the words of master Lui-Shi Chun Qiu (China, 3rd century BC): "The boy of five chi growth leads the bull by the bridle and the bull obeys him in everything. This is because the person in this case follows naturalness" (the laws of nature). The judo philosophy ("soft way") is based on the principles of using the power and energy of the opponent to achieve victory. The purpose of this work is to demonstrate the theoretical aspects and practical features of the methods of synthesis of optimal control systems by the criterion of maximum reproduction accuracy using the example of robust systems, which allow to control dynamic objects with functional uncertainties, including unstable objects, no minimal-phase objects, neutral objects and objects with differentiation properties. The simplicity (at the level of the engineer) and universality, mathematical rigor and physical validity of this approach is based on the judo philosophy: suppressing the dynamics of a functionally uncertain object and external disturbances by the infinitely large gain with the finite control signal and at the same time maintaining sustainability. Theoretically exhaustive solution of the problem of robust control is given by the idea of constructing systems that are stable with an unlimited increase of the gain coefficient. The sustainability properties are valid for optimal systems that were synthesized using quadratic quality functionals that do not explicitly depend on the control signal, and using a restriction on the control signal. It is significant that in contrast to continuous systems with un-measurable disturbances and not well known control object (in which the conditions of invariance imply the use of infinitely large gain), in relay (discontinuous) systems the equivalent effect is achieved with the help of finite control signal. A nice bonus is the highest accuracy which leads to mathematically zero error of regulation, thus all error coefficients (of position, speed, acceleration, acceleration derivative, etc.) is also equal to zero in the presence of external and internal interferences. In fact, the optimal accuracy control system is equivalent to a system with astatism of the  $n$ -th order: the regulator contains  $n$  serial connected integrators.*

**Keywords:** indefinite object, large gain, optimal accuracy, control synthesis, stability, functional equation, controllability condition

### For citation:

Suhinin B. V., Surkov V. V. On the Issue of Robust Automatic Control Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 6, pp. 341–351.

DOI: 10.17587/mau.20.341-351

### References

1. Kolesnikov A. A., Kolesnikov Al. A., Kuz'menko A. A. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 7, pp. 435–444 (in Russian).
2. Rustamov G. A., Rustamov R. G. XVIII Mezhdunarodnaya Nauchno-prakticheskaya konf. "Nauchnoe obozrenie fiziko-

matemicheskikh i tekhnicheskikh nauk v XXI veke", Prospero, 2015, no. 6 (18), pp. 30–33 (in Russian).

3. Rustamov G. A. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 6, pp. 363–372 (in Russian).
4. Rustamov G. A. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta*, 2014, vol. 324, no. 5, pp. 13–19 (in Russian).
5. Filimonov N. B. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, vol. 17, 2016, no. 5, pp. 291–299 (in Russian).
6. Surkov V. V., Suhinin B. V., Lovchakov V. I., Solov'ev A. Je. Analytical's construction of optimum regulators by criteria of accuracy, speed, power savings, Tula, Publishing house of TulGU, 2005, 300 p. (in Russian).
7. Sukhinin B. V., Surkov V. V. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 26–30 (in Russian).