

Р. О. Оморов, д-р техн. наук, проф., гл. науч. сотр., romano_ip@list.ru,
Институт физико-технических проблем и материаловедения
Национальной академии наук Кыргызской Республики, г. Бишкек

Робастность интервальных динамических систем

Рассматриваются частотные и алгебраические направления исследований робастной устойчивости. Частотное направление, или направление Цыпкина — Поляка, рассмотрено кратко в обзорном порядке. Алгебраическое, или харитоновское, направление рассматривается шире. Представлены основные положения и результаты алгебраического метода робастной устойчивости интервальных динамических систем, разработанного в рамках развития алгебраического, харитоновского, направления робастной устойчивости. Основополагающие работы В. Л. Харитонова со времени выхода в свет вызвали огромный поток публикаций, связанных с чрезвычайной актуальностью решения проблем робастности систем. К настоящему времени из круга проблем робастности решены многие вопросы робастной устойчивости. Получены дискретные аналоги и варианты теорем Харитонова. Частотные условия робастной устойчивости рассмотрены и решены в работах Я. З. Цыпкина, Б. Т. Поляка, Ю. И. Неймарка. Однако в проблеме робастной устойчивости к настоящему времени решены не все вопросы, особенно большие противоречия возникли в непрерывном случае. Не были решены и задачи, рассматриваемые здесь для интервальных матриц и многогранников матриц. В работе сформулирована и доказана теорема типа третьей теоремы Харитонова, которая аннулирует контрпримеры к прежним известным результатам в этом направлении, а также на ее основе доказана реберная теорема для многогранников матриц. Новая реберная теорема также аннулирует контрпримеры для этого случая. К основной теореме рассматриваемого алгебраического метода сформулировано уточняющее замечание, что при отсутствии полного множества (набора) из четырех угловых полиномов Харитонова условия этой теоремы необходимы, но могут быть недостаточны для устойчивости системы. Определение угловых сепаратных коэффициентов характеристического полинома системы в общем случае осуществляется посредством использования методов нелинейного программирования. Для дискретного случая представлен дискретный аналог теоремы Харитонова, который получен на основе теоремы Шура. Введены понятия точек и интервалов перемежаемости, используемые для теоремы аналога непрерывного случая. Сформулирован алгоритм определения робастности дискретных систем. Основные результаты разработанного автором алгебраического метода робастной устойчивости проиллюстрированы аннулированием контрпримеров, широко известных из научной литературы.

Ключевые слова: робастная устойчивость, интервальные динамические системы, частотное и алгебраическое направления робастной устойчивости, алгебраический метод робастной устойчивости, непрерывные и дискретные линейные интервальные системы, интервальная матрица, многогранник матриц, угловые полиномы Харитонова, теорема Харитонова

Введение

В развитии современной теории управления наблюдается повышенный интерес к проблемам робастности и грубости систем [1–10]. Особое место в обсуждении проблемы робастности систем управления занял 11-й Международный Конгресс ИФАК, который состоялся в 1990 г. в г. Таллине [10]. На этом Конгрессе в связи с важностью вопросов робастности для современной теории и практики систем управления была проведена представительная дискуссия о проблемах робастности. Достаточно отметить, что в дискуссии Конгресса по проблеме робастности в системах управления участвовали и выступали многие известные ученые в области автоматического управления, такие как Я. З. Цыпкин, Э. И. Джюри, Б. Т. Поляк, Р. Темпо, В. Л. Харитонов, Ю. Аккерманн, Б. Бармиш, В. М. Кунцевич, М. Мансур и др. Вопросам робастности, с которыми тесно связана проблема

грубости, посвящены работы ученых и исследователей многих стран мира [3–29].

Традиционное понимание грубости и робастности в современной литературе определяет робастность как способность систем сохранять те или иные свойства не единственной системы, а множества систем, определенных тем или иным способом, а грубость — как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологии при рассмотрении близких по виду уравнений систем [1, 2, 9, 10].

Тот интерес, который привлекают проблемы робастности и грубости в различных областях науки и техники, да и не только в теории управления, но и в экологии, синергетике и т. д., связан с тем, что эти понятия относятся к важнейшим свойствам систем, рассматриваемых при их реальном функционировании.

Что касается непосредственно систем управления, то в настоящее время наиболее рассмо-

трены и решены вопросы робастной устойчивости. Решение этих вопросов прежде всего связано с основополагающими работами В. Л. Харитонова, в которых решены вопросы робастной устойчивости для интервальных полиномов [30, 31].

Вначале работы по анализу и синтезу грубых (малочувствительных) систем были связаны с развитием теории чувствительности [32], а первые задачи по проблеме робастности были поставлены и решались при обработке статистических информационных [33].

К настоящему времени недостаточно рассмотрены вопросы построения робастных и грубых нелинейных систем управления.

Отметим, что для инженерных применений необходимо рассмотреть и большие (конечные) возмущения, т. е. вопросы робастности и грубости в большом, а также следует отметить, что на практике модели и параметры возмущений могут быть не только известны, но и неопределенны [6, 11, 13, 23].

Появление тенденции "робастизации" в развитии теории управления не случайно, она продиктована необходимостью рассмотрения современных сложных систем управления (не только традиционных систем автоматического управления, а более широкого класса систем управления различной природы) в динамике, со всеми возможными изменениями и возмущениями в реальных условиях функционирования и развития (эволюции) [10, 28].

Как известно, работы В. Л. Харитонова [30, 31] явились основой современной теории робастной устойчивости.

В этих работах В. Л. Харитоновым решены вопросы об устойчивости интервальных полиномов (или семейства полиномов) вида

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n, \quad (1)$$

где $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$, $i = \overline{0, n}$, — коэффициенты заданные в интервалах $\underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i$ (далее придерживаемся записи $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$); $\underline{a}_i, \bar{a}_i$ — соответственно нижние и верхние границы коэффициентов a_i , $i = \overline{0, n}$.

В работе [30] решена задача для полиномов (1) с действительными коэффициентами, а в работе [31] — с комплексными коэффициентами. Показано, что необходимыми и достаточными условиями робастной устойчивости всего семейства действительных и комплексных полиномов (1) является соответственно

устойчивость четырех и восьми (парных) угловых полиномов, которые названы *полиномами Харитонова*.

В настоящее время получено много новых результатов в теории робастной устойчивости, это прежде всего реберная теорема и дискретные аналоги и варианты теорем Харитонова. Советскими и российскими учеными — Я. З. Цыпкиным, Б. Т. Поляком, Ю. И. Неймарком — разработаны частотные критерии робастной устойчивости типа Михайлова, Найквиста, D -разбиения [12, 24–29].

Данная работа посвящена вопросам алгебраического направления робастной устойчивости интервальных динамических систем. Рассмотрены основные положения и результаты метода исследований робастной устойчивости линейных интервальных динамических систем как в непрерывном, так и в дискретном времени, названного *алгебраическим методом робастной устойчивости* [16–22].

В заключении обзора к данной работе приведем сравнительные характеристики известных результатов, полученных в работах широко известных авторов алгебраического направления проблемы робастной устойчивости [7–11, 29].

В работах [7–10] представлены обзоры и постановки задач робастной устойчивости, которые были вызваны известной работой В. Л. Харитонова [30].

В работе Б. Т. Поляка, П. С. Щербакова [29] предложено понятие сверхустойчивости линейных систем управления. При этом сверхустойчивые системы обладают свойствами выпуклости, допускающими простые решения многих классических задач теории управления, в частности, задачи робастной стабилизации при матричной неопределенности. Но существенным ограничением таких систем является практическая узость их класса, определяемого условиями наличия доминирующих диагональных элементов матрицы системы с отрицательными величинами [34]. В данной работе рассматриваются матрицы общего вида.

В работе В. М. Кунцевича [11] получены интересные результаты по робастной устойчивости для линейных дискретных систем. При этом матрица системы задается в классе сопровождающих характеристический полином системы, т. е. во Фробениусовой форме [34], что также сужает класс рассматриваемых реальных систем.

В работах В. Р. Barmish и др. [35, 36] предложены контрпримеры к теореме Биаласа [37], которые аннулированы в работе [16].

В работах М. Mansour и др. [38, 39] получены дискретные аналоги слабой и сильной теорем Харитонова [30], которые имеют ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов, или применяется [9, 17, 20] непростая процедура проектирования корней полиномов на отрезок $[-1, 1]$.

Постановка задачи

Рассматриваются линейные динамические системы порядка n , непрерывная

$$\dot{x} = Ax, x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

и дискретная

$$x(m+1) = Ax(m), m = 1, 2, 3, \dots, \quad (3)$$

где $x = x(t) \in R^n$; $x(m)$ — векторы состояния; $A \in R^{n \times n}$ — интервальная матрица с элементами a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, представляющими интервальные величины $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$ с угловыми значениями $\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}, \underline{a}_{ij} \leq \bar{a}_{ij}$.

Требуется определить условия робастной устойчивости систем (2) и (3).

Непрерывные системы

Основные результаты. В основополагающей для рассматриваемого метода работе [16] получены результаты в виде строго доказанных теоремы 1 и леммы к ней о робастной устойчивости систем (2) по условиям гурвицевести четырех угловых полиномов Харитонова, составленным по последовательным сепаратным угловым коэффициентам $b_i, (\underline{b}_i, \bar{b}_i, i = \overline{1, n})$ характеристических полиномов системы (2):

$$f(\lambda) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_n = 0. \quad (4)$$

Приведем эти теорему 1 и лемму.

Теорема 1. Для того чтобы положение равновесия $x = 0$ системы (2) было асимптотически устойчиво при всех $A \in D$, или чтобы интервальная матрица A была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы были гурвицевыми все четыре угловых полинома Харитонова, со-

ставленные по последовательным сепаратным угловым коэффициентам $b_i, (\underline{b}_i, \bar{b}_i, i = \overline{1, n})$ характеристических полиномов (4) системы (2).

Данная теорема доказана на основе следующей леммы.

Лемма. Сепаратные угловые коэффициенты $b_i, (\underline{b}_i, \bar{b}_i, i = \overline{1, n})$ образуются как соответствующие коэффициенты полиномов (4), либо при угловых значениях элементов $a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$, матрицы A , либо при нулевых значениях некоторых элементов (если интервал принадлежности включает нуль).

Как нетрудно видеть из леммы, для нахождения коэффициентов $b_i, (\underline{b}_i, \bar{b}_i, i = \overline{1, n})$ в общем случае необходимо применение оптимизационных методов нелинейного программирования [40].

К теореме 1, доказательство которой приведено в приложении работы [16], необходимо сделать следующее уточняющее замечание.

Замечание. Из основного аргумента доказательства теоремы 1, связанного с наличием четырех угловых полиномов Харитонова, следует, что при отсутствии полного множества (набора) из четырех угловых полиномов условия теоремы 1 необходимы, но могут быть недостаточны для устойчивости системы (2).

Случай, соответствующий приведенному замечанию, может возникнуть тогда, когда сепаратные угловые коэффициенты полиномов (4) взаимосвязаны и в итоге сужают набор угловых коэффициентов до числа менее четырех.

Следует отметить, что замечание снимает выводы работы [41] относительно робастной устойчивости интервальных динамических систем. При этом данное утверждение проиллюстрировано на примерах, приведенных ниже в конце раздела.

Справедливость доказанной теоремы 1 подтверждается аннулированием известных контрпримеров к теореме Биаласа [37].

Так, теорема 1 апробирована на различных контрпримерах теоремы Биаласа, в частности из работы [35], где рассматривается матрица

$$A = \Omega_r = \begin{bmatrix} -0,5 - r & -12,06 & -0,06 \\ -0,25 & 0 & 1 \\ 0,25 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $r \in [0, 1]$, для которого подтверждена справедливость теоремы 1.

Но в случае матрицы $A = \Omega_r$ из работы [35] можно наглядно рассмотреть справедливость

приведенного выше замечания к теореме 1, что показано ниже в *Примере 1*.

Теорема 1 и лемма позволяют решить задачу о реберной гипотезе для многогранников матриц [9].

Известно [9], что многогранником матриц называется множество

$$P = \left\{ P_s = \sum_{i=1}^m s_i P_i : s_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m s_i = 1 \right\}, \quad (6)$$

где $P_i, i = \overline{1, m}$, — постоянные матрицы.

В работе [9] сформулирована гипотеза об условиях устойчивости многогранника P (6) в следующем виде:

Гипотеза. Многогранник P устойчив тогда и только тогда, когда его ребра устойчивы, т. е. матрица

$$sP_i + (1-s)P_j$$

устойчива при любых $i, j = \overline{1, m}, s \in [0, 1]$.

Но в работе [36] на контрпримерах показано, что данная гипотеза неверна для строго гурвицева случая.

Противоречия в реберной гипотезе разрешены на основе следующей реберной теоремы 2, доказанной в работе [16].

Теорема 2. Для устойчивости многогранника матриц P необходимо и достаточно, чтобы его выпуклые ребра были устойчивы, т.е. матрица

$$s_1 P_i + s_2 P_j$$

устойчива при любых $i, j = \overline{1, m}, s_1 \in [-1, 0], s_2 \in [0, 1]$.

В данном случае многогранник матриц P представлен в виде

$$P = \left\{ P_s = P_{s1} + P_{s2} : P_{s1} = \sum_{i=1}^m s_{1i} P_i, P_{s2} = \sum_{i=1}^m s_{2i} P_i : s_{1i} + s_{2i} = s_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m s_i = 1 \right\}.$$

Справедливость теоремы 2 также подтверждается аннулированием всех известных контрпримеров из работ [36, 42].

Примеры. Рассмотрим примеры, которые наглядно поясняют смысл *Замечания к Теореме 1*.

Пример 1. Покажем, что система (2) с интервальной матрицей вида $A = \Omega_r$ (5), которая не

обладает полным набором из четырех характеристических полиномов Харитонова, является системой неопределенной робастности.

Действительно, если положим $r_1 = 0,5 - \sqrt{0,06}$, $r_2 = 0,5 + \sqrt{0,06}$, то как известно [35] система (2) является неустойчивой при $r_1 < r < r_2$, а в интервалах $r \in [0, r_1]$ и $r \in (r_2, 1]$ эта система устойчива. Если теперь предположить, что коэффициенты характеристического полинома (4) не зависят друг от друга и мы имеем четыре угловых полинома системы (2), то нетрудно вычислить, что только в малых частях указанных выше интервалов робастной устойчивости $r \in [0, r_1]$ и $r \in (r_2, 1]$ имеет место устойчивость всех четырех характеристических полиномов, а именно при $r \in [0, 0,475]$ и $r \in (0,9617, 1]$.

Так, например, для интервала $r \in [0, r_1]$ имеем следующие четыре угловых полинома:

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \lambda^3 + 1,5\lambda^2 + 1,5\lambda + (2,06 + 4r_1); \\ f_2(\lambda) &= \lambda^3 + 1,5\lambda^2 + (1,5 + r_1)\lambda + (2,06 + 4r_1); \\ f_3(\lambda) &= \lambda^3 + (1,5 + r_1)\lambda^2 + 1,5\lambda + 2,06; \\ f_4(\lambda) &= \lambda^3 + (1,5 + r_1)\lambda^2 + (1,5 + r_1)\lambda + 2,06, \end{aligned}$$

из которых два первых неустойчивы, а следующие два устойчивы.

Данный пример показывает, что из-за зависимости между коэффициентами характеристического полинома (4) здесь действительно имеет место неполный набор из двух угловых полиномов, и мы не можем однозначно установить интервалы робастной устойчивости системы (2), как и следовало согласно *Замечанию к Теореме 1*.

Пример 2. Пусть задан характеристический полином интервальной системы (2) в виде

$$f(\lambda) = \lambda^3 + 1,5\lambda^2 + 2,5\lambda + b_3, \quad (7)$$

где коэффициент $b_3 \in [2, 3]$. Такой случай системы (2) возможен, например, при Фробениусовой или сопровождающей форме матрицы A .

Тогда четыре угловых характеристических полинома системы (2) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \lambda^3 + 1,5\lambda^2 + 2,5\lambda + 3; \\ f_2(\lambda) &= \lambda^3 + 1,5\lambda^2 + 2,5\lambda + 3; \\ f_3(\lambda) &= \lambda^3 + 1,5\lambda^2 + 2,5\lambda + 2; \\ f_4(\lambda) &= \lambda^3 + 1,5\lambda^2 + 2,5\lambda + 2. \end{aligned}$$

Как нетрудно видеть, в данном случае все четыре характеристических полинома систе-

мы (2) устойчивы ($b_1 b_2 > b_3$), и система (2) робастно устойчива. Если же, положим $b_3 \in [2,06, 4,06]$, то в этом случае первые два полинома $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ неустойчивы, а два следующих $f_3(\lambda)$ и $f_4(\lambda)$ устойчивы, а следовательно, система (2) робастно неустойчива.

В этом примере мы рассмотрели два случая интервальной системы (2), когда имеются две пары совпадающих или кратных характеристических полиномов, но при этом имеются полные наборы четырех полиномов Харитонова, в отличие от случая системы (2) с матрицей $A = \Omega_r$ (5), где нет полного набора из четырех угловых характеристических полиномов, а есть только два угловых полинома вследствие жесткой зависимости коэффициентов b_i , $i = 1, 2, 3$ от параметра r . Поэтому в обоих случаях рассматриваемого *Примера 2* в соответствии с *Замечанием к Теореме 1* можно сделать вполне определенный вывод о робастной устойчивости или неустойчивости интервальной системы (2) с характеристическим полиномом (7), в то время как в случае с матрицей вида $A = \Omega_r$ мы определенный вывод о робастной устойчивости не можем сделать (здесь следует отметить, что в работе [16] вывод по данному случаю сделан неверный).

Дискретные системы

Как известно, публикация работы [30] дала импульс для поиска многими исследователями дискретных аналогов теорем Харитонова [7–10, 17, 26]. Так, в работе [9] указано, что "дискретный вариант харитоновского условия четырех многочленов отсутствует". Но здесь же отмечается, что в настоящее время получены [38, 39] дискретные аналоги слабой и сильной теорем Харитонова. Но эти аналоги теорем Харитонова имеют определенные ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов [9]. Эти ограничения были сняты в работах [17, 20], где получены аналоги теорем Харитонова с использованием теоремы Шура [43]. Также в работах [17, 20] сформулированы теоремы, являющиеся дискретными аналогами результатов работы [16] по интервальным матрицам и многогранникам матриц.

Далее рассматривается обобщение результатов, полученных в работе [17, 20] с учетом выводов, приведенных выше для непрерывных систем.

Основные результаты. Для дискретных систем, используя z -преобразование, получаем интервальный характеристический полином

$$f(z) = \det(zI - A) = \sum b_i z^{n-i}, \quad b_i \in [\underline{b}_i, \bar{b}_i], \quad \underline{b}_i \leq \bar{b}_i. \quad (8)$$

Для определения условий устойчивости воспользуемся теоремой Шура [43], т. е. условиями вида

$$|b_0| > |b_n|$$

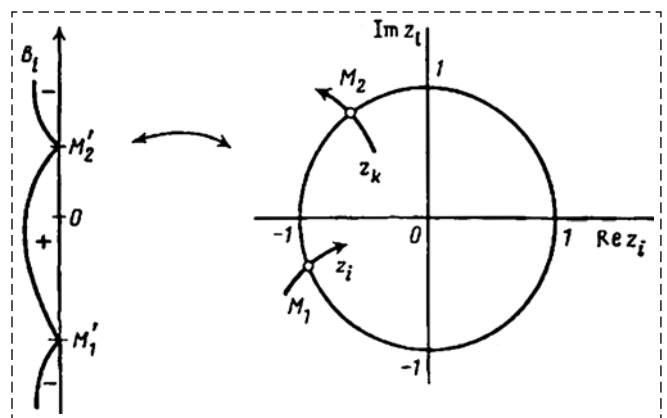
для последовательности полиномов, определяемых рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} f_i(z) &= [b_0 f(z) - b_n f(1/z) z^n] / z, \dots, \\ \dots, f_{i+1}(z) &= [b_{0,i} f_i(z) - b_{n,i} f_i(1/z) z^{n-1}] / z, \end{aligned}$$

где $b_{0,i}$, $b_{n,i}$ — соответственно старший и младший коэффициенты i -го ($i = 1, n-2$) полинома $f_i(z)$.

Определение. Точками перемежаемости для коэффициентов b_i , $i = 0, n$, будем называть точки на действительной оси, в которых происходят переходы корней полинома (8) через единичную окружность на плоскости корней, а интервалами перемежаемости — интервалы, в которых корни находятся либо внутри, либо вне единичного круга (см. рисунок).

В работе [17] сформулированы основные результаты по определению условий робастной устойчивости дискретных интервальных систем в виде соответствующих теорем 1–6. При этом следует отметить, что, как указано выше, для случая непрерывных систем [16]



Точки (M'_1, M'_2) и интервалы перемежаемости $(-\infty, M'_1)^-$, $(M'_1, M'_2)^+$, $(M'_2, +\infty)^-$ — для коэффициента b_i
Points (M'_1, M'_2) and intermittency intervals $(-\infty, M'_1)^-$, $(M'_1, M'_2)^+$, $(M'_2, +\infty)^-$ — for the coefficient b_i

справедливость *теоремы 5* имеет ограничение, обусловленное *Замечанием* к теореме 1 работы [16], т. е. *теорема 5* верна при полном наборе из четырех различных полиномов Харитонов.

Справедливость результатов [17, 20] относительно аналога сильной теоремы Харитонova продемонстрирована на известных контрпримерах из работ [9, 44, 45].

Таким образом, алгоритм определения робастной устойчивости дискретных интервальных динамических систем будет следующим.

1. С использованием формул леммы к теореме 1 [16] и путем оптимизации по элементам $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$, $i, j = \overline{1, n}$, интервальной матрицы A находятся сепаратные угловые коэффициенты $b_i \in [\underline{b}_i, \bar{b}_i]$, $i = \overline{0, n}$, интервального характеристического полинома (8).

2. Определяются четыре полинома Харитонova, соответствующие интервальному полиному (8):

$$f_1(z) : \{\underline{b}_0, \underline{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \underline{b}_4, \dots\};$$

$$f_2(z) : \{\underline{b}_0, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4, \dots\};$$

$$f_3(z) : \{\bar{b}_0, \underline{b}_1, \underline{b}_2, \bar{b}_3, \underline{b}_4, \dots\};$$

$$f_4(z) : \{\bar{b}_0, \bar{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \bar{b}_4, \dots\}.$$

3. Составляются n неравенств вида (П.2), указанных в Приложении работы [17].

4. Относительно каждого коэффициента b_i , $i = \overline{0, n}$, считая остальные коэффициенты фиксированными, последовательно находятся точки пережимаемости для всех четырех полиномов Харитонova и по всем n неравенствам (см. п. 3), начиная с меньших порядков.

5. Если все точки пережимаемости по всем коэффициентам b_i , $i = \overline{0, n}$, не принадлежат заданным интервалам, то исходный полином (система) устойчив, в противном случае — неустойчив.

Заключение

Алгебраический метод харитоновского направления исследований робастной устойчивости интервальных динамических систем, рассмотренный в данной работе, является дальнейшим развитием основных результатов работ [16, 17], который позволяет решать проблему робастной устойчивости при общем виде интервальной матрицы системы. При этом метод направлен на решение задач ро-

бастной устойчивости как для линейных непрерывных, так и для линейных дискретных интервальных динамических систем.

Следует отметить, что *Замечание* к теореме 1 существенным образом уточняет результаты работы [16], а именно подчеркивает необходимость полного набора из четырех угловых полиномов Харитонova (с учетом кратности полиномов) для определения робастной устойчивости интервальных динамических систем. Также условия необходимости и достаточности по теореме 1 соответствуют угловым сепаратным коэффициентам, определяемым последовательно от 1-го до n -го коэффициента характеристического полинома системы, которые могут быть найдены с использованием методов нелинейного программирования [40].

Список литературы

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 247—250.
2. Аносов Д. В. Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сб. обзорных статей. К 50-летию института (Труды МИАН СССР. Т. 169). М.: Наука. 1985. С. 59—93.
3. Faedo S. Un nuova problema di stabilita per le equazioni algebriche a coefficienti reali // Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Sci. Fis. Mat. 1953. V. 7, N. 1—2. P. 53—63.
4. Ackermann J. D. Sampled-data control systems. Analysis and Synthesis, robust system design (Lecture notes in control and information sciences). Berlin, Heidelberg: Springer-verlag, 1985.
5. Dorato P. A. Historical review of robust control // IEEE Contr. Syst. Magazine. 1987. V. 7. N. 2. P. 44—47.
6. Воронов К. В., Королева О. И., Никифоров В. О. Робастное управление нелинейными объектами с функциональными неопределенностями // Автоматика и телемеханика. 2001. № 2. С. 112—121.
7. Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г. и др. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 1. С. 3—23.
8. Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г. и др. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). II. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 2. С. 3—30.
9. Джури Э. И. Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 5. С. 4—28.
10. Дискуссия по проблеме робастности в системах управления // Автоматика и телемеханика. 1992. № 1. С. 165—176.
11. Кунцевич В. М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наук. думка, 2006. 264 с.
12. Неймарк Ю. И. Робастная устойчивость и D-разбиение // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 10—18.
13. Никифоров В. О. Робастное управление линейным объектом по выходу // Автоматика и телемеханика. 1998. № 9. С. 87—99.
14. Оморев Р. О. Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8. С. 36—45.

15. **Оморов Р. О.** Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления // Автореферат диссертации доктора технических наук. Л.: ЛИТМО, 1993. 38 с.
16. **Оморов Р. О.** Робастность интервальных динамических систем. I. Робастность непрерывных линейных интервальных динамических систем // Теория и системы управления. 1995. № 1. С. 22–27.
17. **Оморов Р. О.** Робастность интервальных динамических систем. II. Робастность дискретных линейных интервальных динамических систем // Теория и системы управления. 1995. № 3. С. 3–7.
18. **Omorov R. O.** Robustness of Interval Dynamic Systems. I. Robustness I Continuous Linear Interval Dynamic Systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. Vol. 34, N. 3. P. 69–74.
19. **Omorov R. O.** Robustness of Interval Dynamic Systems. II. Robustness of Discrete Linear Interval Dynamical Systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. Vol. 34, N. 4. P. 1–5.
20. **Оморов Р. О.** О дискретном аналоге теоремы Харитоновой // Наука и новые технологии. 2002. № 3. С. 5–10.
21. **Omorov R.** Algebraic Method of the Robust Stability of Interval Dynamic Systems // Journal of Mathematics and Statistical Science / SSPub. May 2017. Vol. 3, Iss. 5. P. 139–148.
22. **Omorov R.** Robust Stability of Interval Dynamic Systems. Beau Bassin: LAP LAMBERT, 2017. 74 p.
23. **Пелевин А. Е.** Синтез робастного закона управления при неопределенностях параметров модели объекта // Гироскопия и навигация. 1999. № 2(25). С. 63–74.
24. **Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.** Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 9. С. 45–54.
25. **Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.** Робастная устойчивость при комплексных возмущениях параметров // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8. С. 45–55.
26. **Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.** Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. Т. 32. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 32. С. 3–31.
27. **Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.** Робастный критерий Найквиста // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 25–31.
28. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 384 с.
29. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // Автоматика и телемеханика. 2002. № 8. С. 37–53.
30. **Харитонов В. Л.** Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 11. С. 2086–2088.
31. **Харитонов В. Л.** Об одном обобщении критерия устойчивости // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1978. № 1. С. 53–55.
32. **Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М.** Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981. 464 с.
33. **Хьюбер П.** Робастность в статистике / Пер. с англ. Под ред. Н. Г. Журбенко. М.: Мир, 1984. 304 с.
34. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
35. **Barmish B. R., Hollot C. V.** Counter-example to a recent result on the stability by S. Bialas // Int. J. Control. 1984. Vol. 39, N. 5. P. 1103–1104.
36. **Barmish B. R., Fu M., Saleh S.** Stability of a polytope of matrices: Counterexamples // IEEE Trans. Automatic Control. 1988. V. AC-33, N. 6. P. 569–572.
37. **Bialas S.** A necessary and sufficient condition for stability of internal matrices // Int. J. Control. 1983. V. 37, N. 4. P. 717–722.
38. **Kraus F. J., Anderson B. D. O., Jury E. I., Mansour M.** On the robustness of low order Shur polynomials // IEEE Trans. Circ. Systems. 1988. V. CAS-35, N. 5. P. 570–577.
39. **Mansour M., Kraus F. J.** On robust stability of Shur polynomials // Report N 87-05, Inst. Autom. Cont. Ind. Electronics, Swiss, Fed. Inst. Tech. (ETH). Zurich, 1987.
40. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование / Пер. с англ. М.: Мир. 1975. 534 с.
41. **Rohn J.** Regularity of Interval Matrices and Theorems of Alternatives // Reliable Computing. 2006. V. 12. P. 99–105.
42. **Bartlett A. C., Hollot C. V., Lin H.** Root location of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges // Math. Contr., Signals, Syst. 1987. V. 1, N. 1. P. 61–71.
43. **Цыпкин Я. З.** Теория импульсных систем. М.: Физматгиз, 1958. 724 с.
44. **Bose N. K., Zeheb E.** Kharitonov's theorem and stability test of multidimensional digital filters // IEEE Proc. Pt. G. 1986. V. 133, N. 4. P. 187–190.
45. **Cieslik J.** On possibilities of the extension for Kharitonov's stability test for interval polynomials to the discrete case // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. AC-32, N. 3. P. 237–238.

Robust of Interval Dynamic Systems

R. O. Omorov, romano_ip@list.ru,

Institute of physics and technology problems and materials science
of National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, 720071, Bishkek

*Corresponding author: Omorov Roman O., Chief Researcher,
Institute of physics and technology problems and materials science of National Academy of Sciences
of the Kyrgyz Republic, 720071, Bishkek, e-mail: romano_ip@list.ru*

Accepted on February 01, 2019

Abstract

The frequency and algebraic directions of researches of robust stability are considered. Frequency or Tsytkin-Polyaka's direction is considered briefly in a survey order. The algebraic or Kharitonov's direction is considered more more widely, namely basic provisions and results of the Algebraic method of robust stability of interval dynamic systems developed within development algebraic or Kharitonov's direction of robust stability are presented. Fundamental works of V. L. Kharitonov since issue have caused a huge flow of the publications connected with extreme relevance of the solution of problems of a robustness of systems. So far from a circle of problems of a robustness many issues of robust stability are resolved. Discrete analogs and versions of theorems of Kharitonov are received. Frequency conditions of robust stability are considered and solved in Ya. Z. Tsytkin, B. T. Polyak, Yu. I. Neymark works. However in a problem of robust stability not all issues are

so far resolved, especially big contradictions have arisen in a continuous case. Also the tasks considered here for interval matrixes and polyhedrons of matrixes haven't been solved. In work the theorem like the third theorem of Kharitonov which cancels counterexamples to former known results in this direction is formulated and proved and also on its basis the costal theorem for polyhedrons of matrixes is proved. The new costal theorem also cancels counterexamples for this case. To the main theorem of the considered algebraic method the specifying remark is formulated that in the absence of a full set of four angular polynoms of Kharitonov of a condition of this theorem are necessary, but can be insufficient for stability of system. Determination of angular separate coefficients of a characteristic polynom of system is generally carried out by means of use of methods of nonlinear programming. For a discrete case the discrete analog of the theorem of Kharitonov which is received on the basis of Schur's theorem is presented. At the same time, the concepts of points and intervals of a variableless used for the theorem of an analog of a continuous case are entered. The algorithm of definition of a robustness of discrete systems is formulated. The main results, the Algebraic method of robust stability developed by the author are illustrated with cancellation of the counterexamples widely known from scientific literature.

Keywords: robust stability, interval dynamic systems, frequency and algebraic directions of robust stability, algebraic method of robust stability, continuous and discrete linear interval systems, interval matrix, polyhedron of matrixes, angular polynoms of Kharitonov, Kharitonov's theorem, points and intervals of variableless

For citation:

Omorov R. O. Robust of Interval Dynamic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 6, pp. 333–340.

DOI: 10.17587/mau.20.333-340

References

1. **Andronov A. A., Pontryagin L. S.** *Dokl. AN SSSR*, 1937, vol. 14, no. 5, pp. 247–250 (in Russian).
2. **Anosov D. V.** *Topologiya, obyknovennye differentsial'nye uravneniya, dinamicheskie sistemy: Sb. obzornykh statei. 2. K 50-letiyu instituta (Trudy MIAN SSSR)*, Vol. 169, Moscow, Nauka, 1985, pp. 59–93 (in Russian).
3. **Faedo S.** *Ann. Sc. Norm. Sup. Piza, Sci. Fiz. Mat.*, 1953, vol. 7, no. 1–2, pp. 53–63.
4. **Ackermann J. D.** *Sampled-data control systems. Analysis and Synthesis, robust system design (Lecture notes in control and information sciences)*, Springer-verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.
5. **Dorato P. A.** *IEEE Contr. Syst. Magazine*, 1987, vol. 7, no. 2, pp. 44–47.
6. **Voronov K. V., Koroleva O. I., Nikiforov V. O.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 2001, no. 2, pp. 112–121 (in Russian).
7. **Gusev Yu. M., Efanov V. N., Krymskii V. G.** et al. *Izv. AN SSSR. Tekhn. Kibernetika*, 1991, no. 1, pp. 3–23 (in Russian).
8. **Gusev Yu. M., Efanov V. N., Krymskii V. G.** et al. *Izv. AN SSSR. Tekhn. Kibernetika*, 1991, no. 2, pp. 3–30 (in Russian).
9. **Dzhuri E. I.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 1990, no. 5, pp. 4–28 (in Russian).
10. **Avtomatika i Telemekhanika, 1992, no. 1, pp. 165–176 (in Russian).**
11. **Kuntsevich V. M.** *Control in the conditions of uncertainty: the guaranteed results in tasks of controlling and identification*, Kiev, Nauk. dumka, 2006, 264 p. (in Russian).
12. **Neimark Yu. I.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 1992, no. 7, pp. 10–18 (in Russian).
13. **Nikiforov V. O.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 1998, no. 9, pp. 87–99 (in Russian).
14. **Omorov R. O.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 1991, no. 8, pp. 36–45 (in Russian).
15. **Omorov R. O.** *Quantitative measures of roughness of dynamic systems and their annexes to control systems*, Avtoreferat dissertatsii doktora tekhnicheskikh nauk, Leningrad, LITMO, 1993, 38 p. (in Russian).
16. **Omorov R. O.** *Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 1995, no. 1, pp. 22–27 (in Russian).
17. **Omorov R. O.** *Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 1995, no. 3, pp. 3–7 (in Russian).
18. **Omorov R. O.** *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1996, vol. 34, no. 3, pp. 69–74.
19. **Omorov R. O.** *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1996, vol. 34, no. 4, pp. 1–5.
20. **Omorov R. O.** *Nauka i Noveye Tekhnologii*, 2002, no. 3, pp. 5–10 (in Russian).
21. **Omorov R.** *Journal of Mathematics and Statistical Science / SSPub.*, may 2017, vol. 3, iss. 5, pp. 139–148.
22. **Omorov R.** *Robust Stability of Interval Dynamic Systems*, Beau Bassin, LAP LAMBERT, 2017, 74 p.
23. **Pelevin A. E.** *Girokopiya i Navigatsiya*, 1999, no. 2(25), pp. 63–74 (in Russian).
24. **Polyak B. T., Tsyppkin Ya. Z.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 1990, no. 9, pp. 45–54 (in Russian).
25. **Polyak B. T., Tsyppkin Ya. Z.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 1991, no. 8, pp. 45–55 (in Russian).
26. **Polyak B. T., Tsyppkin Ya. Z.** *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Tekhnicheskaya kibernetika*, vol. 32, Moscow, VINITI, 1991, vol. 32, pp. 3–31 (in Russian).
27. **Polyak B. T., Tsyppkin Ya. Z.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 1992, no. 7, pp. 25–31 (in Russian).
28. **Polyak B. T., Shcherbakov P. S.** *Robust stability and control*, Moscow, Nauka, 2002, 384 p. (in Russian).
29. **Polyak B. T., Shcherbakov P. S.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 2002, no. 8, pp. 37–53 (in Russian).
30. **Kharitonov V. L.** *Differents. Uravneniya*, 1978, vol. 14, no. 11, pp. 2086–2088 (in Russian).
31. **Kharitonov V. L.** *Izv. AN KazSSR. Ser. fiz.-mat.*, 1978, no. 1, pp. 53–55 (in Russian).
32. **Rozenvasser E. N., Yusupov R. M.** *Sensitivity of control systems*, Moscow, Nauka, 1981, 464 p. (in Russian).
33. **Kh'yuber P.** *Robustness in statistics*, Moscow, Mir, 1984, 304 p. (in Russian).
34. **Gantmakher F. R.** *Theory of matrixes*, Moscow, Nauka, 1966, 576 p. (in Russian).
35. **Barmish B. R., Hollot C. V.** *Int. J. Control*, 1984, vol. 39, no. 5, pp. 1103–1104.
36. **Barmish B. R., Fu M., Saleh S.** *IEEE Trans. Automatic Control*, 1988, vol. AC-33, no. 6, pp. 569–572.
37. **Bialas S.** *Int. J. Control*, 1983, vol. 37, no. 4, pp. 717–722.
38. **Kraus F. J., Anderson B. D. O., Jury E. I., Mansour M.** *IEEE Trans. Circ. Systems*, 1988, vol. CAS-35, no. 5, pp. 570–577.
39. **Mansour M., Kraus F. J.** *On robust stability of Shur polynomials*, Report N 87-05, Inst. Autom. Cont. Ind. Electronics, Swiss, Fed. Inst. Tech. (ETH). Zurich, 1987.
40. **Khimel'blau D.** *Applied nonlinear programming*, Moscow, Mir, 1975, 534 p. (in Russian).
41. **Rohn J.** *Reliable Computing*, 2006, no. 12, pp. 99–105.
42. **Bartlett A. C., Hollot C. V., Lin H.** *Math. Contr., Signals, Syst.*, 1987, vol. 1, no. 1, pp. 61–71.
43. **Tsyppkin Ya. Z.** *Theory of impulse systems*, Moscow, Fizmatgiz, 1958, 724 p. (in Russian).
44. **Bose N. K., Zeheb E.** *IEEE Proc. Pt. G.*, 1986, vol. 133, no. 4, pp. 187–190.
45. **Cieslik J.** *IEEE Trans. Automat. Control*, 1987, vol. AC-32, no. 3, pp. 237–238.