

Д. П. Ким, д-р техн. наук, проф., dpkim@yandex.ru,
Московский технологический университет (МИРЭА), Москва

Алгебраический метод синтеза астатических непрерывных систем управления

Рассматривается алгебраический метод синтеза астатических непрерывных систем управления. Метод основан на построении по заданным показателям качества (времени регулирования, перерегулирования и др.) и заданной передаточной функции объекта желаемой передаточной функции (ЖПФ). Построение ЖПФ основано на использовании желаемой нормированной передаточной функции (НПФ). Желаемой НПФ называется передаточная функция, у которой в знаменателе свободный член и коэффициент при старшей степени равны единице и показатели качества, за исключением времени регулирования, совпадают с показателями качества ЖПФ. Поэтому, построив желаемую НПФ и проделав обратное преобразование с коэффициентом преобразования, равным отношению времени регулирования синтезируемой системы и времени регулирования системы с желаемой НПФ, получим ЖПФ.

Желаемая НПФ строится из типовых НПФ. Известны различные типовые НПФ: биномиальные, арифметические и геометрические. Тип НПФ определяется по ее характеристическому полиному, НПФ называется биномиальной, если ее характеристический полином представляет бином Ньютона, арифметической и геометрической, если корни их характеристических полиномов образуют арифметическую и геометрическую прогрессии.

При построении желаемой НПФ нужно соблюсти три условия: физической реализуемости регулятора, разрешимости и грубости. Из этих трех условий определяются степени характеристического уравнения синтезируемой системы и степени неизвестных полиномов, которые вводятся в процессе синтеза. После этого по заданным показателям качества определяется нужный тип желаемой НПФ. При этом находим только знаменатель желаемой НПФ. Числитель желаемой НПФ, если синтезируемая система астатическая r -го порядка и объект не содержит правых полюсов и нулей, равен сумме r последних слагаемых характеристического полинома.

После того как получена ЖПФ системы, определяется передаточная функция регулятора приравнением передаточной функции замкнутой системы ЖПФ.

Ключевые слова: желаемая передаточная функция, нормированная передаточная функция, время регулирования, перерегулирование, порядок астатизма

Введение

Основным и широко известным методом синтеза непрерывных систем автоматического управления по заданным прямым показателям качества (времени регулирования, перерегулированию и др.) является частотный метод. Алгебраический метод, основанный на использовании желаемой передаточной функции (ЖПФ), известен также давно [1–3], однако он не нашел широкого распространения.

Желаемая нормированная передаточная функция

Определение ЖПФ основано на использовании нормированной передаточной функции (НПФ). НПФ, или передаточной функцией в форме Вишнеградского, называется передаточная функция, у которой в знаменателе свободный член и коэффициент при старшей степени равны единице.

Пусть задана ненормированная передаточная функция

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (1)$$

Ее всегда можно преобразовать в НПФ. Для этого достаточно провести замену переменных

$$q = \alpha s, \quad \alpha = \sqrt[n]{a_0/a_n}. \quad (2)$$

Тогда получим

$$\tilde{\Phi}(q) = \frac{\tilde{b}_0 q^m + \tilde{b}_1 q^{m-1} + \dots + \tilde{b}_m}{q^n + \tilde{a}_1 q^{n-1} + \dots + \tilde{a}_{n-1} q + 1}, \quad (3)$$

где

$$\tilde{b}_i = \frac{b_i}{a_n \alpha^{m-i}}, \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad (4a)$$

$$\tilde{a}_k = \frac{a_k}{a_n \alpha^{n-k}}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4b)$$

Коэффициенты ненормированной передаточной функции (1) связаны с коэффициентами НПФ соотношениями

$$b_i = \alpha^{m-i} \tilde{b}_i, i = 0, 1, \dots, m; \quad (5a)$$

$$a_0 = \alpha^n, a_n = 1, a_k = \alpha^{n-k} \tilde{a}_k, k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (5b)$$

Между свойствами систем с передаточными функциями (1) и (3) существует тесная связь. Характер переходных процессов (монотонность, апериодичность, показатели качества в установившемся режиме и т. д.) за исключением времени регулирования системы с ненормированной передаточной функцией и системы с НПФ совпадают. А время регулирования t_p системы (1) и время регулирования τ_p системы (3) отличаются и связаны соотношением

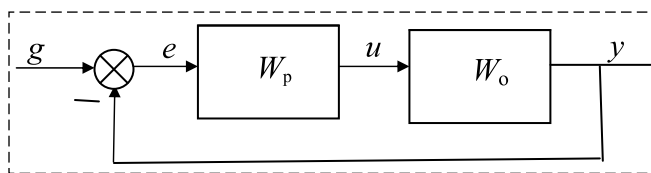
$$\alpha = t_p / \tau_p. \quad (6)$$

Поэтому, если найдем НПФ, обладающую всеми заданными требованиями к синтезируемой системе (кроме требований к времени регулирования), то, проделав обратное преобразование (5) с коэффициентом преобразования (6), получим ЖПФ. Дальше такую НПФ будем называть желаемой НПФ.

Известны различные типовые НПФ: *биномиальные, арифметические, геометрические и колебательные*. Тип НПФ определяется по ее характеристическому полиному. НПФ называется *биномиальной*, если ее характеристический полином представляет бином Ньютона, *арифметической* и *геометрической*, если корни их характеристических полиномов образуют арифметическую и геометрическую прогрессии соответственно, и *колебательной*, если корни ее характеристического полинома являются комплексными. Нули НПФ от ее типа не зависят. Они полностью определяются объектом и требованием к качеству синтезируемой системы. Итак, для нахождения ЖПФ нужно прежде всего найти желаемую НПФ, а для этого необходимо знать его порядок. Естественно, порядок желаемой НПФ совпадает с порядком ЖПФ, а последний зависит от порядка передаточной функции объекта. Сначала рассмотрим, как определяется требуемая передаточная функция регулятора при известной ЖПФ.

Пусть задана передаточная функция объекта

$$W_o(s) = P(s)/R(s)$$



Структурная схема
Structural scheme

и определена ЖПФ $W_{ж}(s)$. Тогда передаточная функция регулятора $W_p(s)$ может быть получена из равенства передаточной функции $W_{yg}(s)$ замкнутой системы (см. рисунок) с $W_{ж}(s)$:

$$W_{yg}(s) = \frac{W_p(s)W_o(s)}{1 + W_p(s)W_o(s)} = W_{ж}(s).$$

Разрешив это равенство относительно передаточной функции регулятора, получим

$$W_p(s) = \frac{R(s)}{P(s)} \frac{W_{ж}(s)}{1 - W_{ж}(s)}. \quad (7)$$

Следует иметь в виду, что при определении ЖПФ $W_{ж}(s)$ нельзя задавать ее произвольно исходя только из требования к качеству синтезируемой системы. Ее выбор, помимо зависимости от требования к заданным показателям качества, естественно зависит от передаточной функции объекта. При определении передаточной функции регулятора $W_p(s)$ необходимо учитывать его *физическую осуществимость (реализуемость)* и *грубость* (робастность) синтезируемой системы.

Напомним, система называется *грубой* или *робастной*, если при малом изменении ее параметров свойство системы качественно не меняется. И в случае линейной системы *не грубость* означает, что устойчивая система при малом изменении параметров становится не устойчивой. Для того чтобы синтезированная система была грубой, необходимо, чтобы правые полюса объекта не компенсировались правыми нулями регулятора и правые нули объекта не компенсировались правыми полюсами регулятора.

Пусть передаточная функция объекта факторизована

$$W_o(s) = \frac{P(s)}{R(s)} = \frac{P^-(s)P^+(s)}{R^-(s)R^+(s)}. \quad (8)$$

Подставим это выражение в передаточную функцию регулятора (7):

$$W_p(s) = \frac{R^-(s)R^+(s)}{P^-(s)P^+(s)} \frac{W_{ж}}{1 - W_{ж}}. \quad (9)$$

Для того чтобы синтезированная система была грубой, необходимо, чтобы правые полюса $R^+(s)$ и нули $P^+(s)$ передаточной функции объекта (8) не компенсировались соответственно правыми нулями $R^+(s)$ и полюсами $P^+(s)$ передаточной функции регулятора (9). Для этого последняя не должна содержать полиномы $P^+(s)$ и $R^+(s)$. Это возможно, если в выражении (9) $W_{\text{ж}}(s)$ содержит множитель $P^+(s)$, а $(1 - W_{\text{ж}}(s))$ — множитель $R^+(s)$, т. е. если ЖПФ удовлетворяет условиям

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{P^+(s)M(s)}{G(s)}; \quad (10a)$$

$$1 - W_{\text{ж}}(s) = \frac{R^+(s)N(s)s^{r_p}}{G(s)}. \quad (10б)$$

Здесь $M(s)$ и $N(s)$ — неизвестные полиномы, которые должны быть определены в дальнейшем в процессе синтеза; $G(s)$ — знаменатель ЖПФ. В (10б) множитель s^{r_p} правой части вводится для обеспечения требуемого порядка астатизма синтезируемой системы. Условимся называть этот показатель *порядком астатизма регулятора*. Аналогично, если передаточная функция объекта будет содержать множитель s^{r_o} в знаменателе, то показатель r_o будем называть *порядком астатизма объекта*. *Порядок астатизма синтезированной системы* r относительно задающего воздействия равен сумме $r = r_p + r_o$.

Подставив выражение (10) в соотношение (9), получим

$$W_p(s) = \frac{R^-(s)}{P^-(s)} \frac{M(s)}{N(s)s^{r_p}}. \quad (11)$$

Исключив $W_{\text{ж}}(s)$ из выражений (10), найдем *полиномиальное уравнение*

$$P^+(s)M(s) + R^+(s)N(s)s^{r_p} = G(s). \quad (12)$$

В уравнении (12) полиномы $M(s)$ и $N(s)$ должны быть представлены как полиномы определенной степени с неизвестными коэффициентами. Далее коэффициенты этих полиномов будут найдены из системы уравнений, которые будут получены путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях левой и правой частей полиномиального уравнения (6).

Рассмотрим, каким условиям должны удовлетворять степени неизвестных полиномов $M(s)$ и $N(s)$, чтобы регулятор был физически реали-

зуем, синтезированная система была грубой и полиномиальное уравнение было разрешимым. При этом условимся степень полиномов обозначать буквой n с индексом, обозначающим сам полином. Например, n_k будет обозначать степень полинома $k(s)$.

Условие разрешимости. Коэффициенты полиномов $M(s)$ и $N(s)$ определяются, как отмечалось, из системы уравнений, которые получаются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях обеих частей полиномиального уравнения (12). Число уравнений равно $(n_G + 1)$, а число неизвестных — $(n_M + n_N + 2)$. Чтобы система была разрешима, число уравнений $n_G + 1$ не должно превышать числа неизвестных $n_M + n_N + 2$:

$$n_G \leq n_M + n_N + 1. \quad (13a)$$

Условие физической осуществимости. Относительная степень передаточной функции регулятора (11) будет неотрицательной, если

$$n_{R^-} + n_M \leq n_{P^-} + n_N + r_p. \quad (13б)$$

Условие грубости. В левой части соотношения (10б) относительный порядок равен нулю. Поэтому относительный порядок его правой части также должен быть равен нулю, т. е. степени полиномов числителя и знаменателя должны быть равны между собой:

$$n_G = n_{R^+} + n_N + r_p. \quad (13в)$$

Соотношение (10б) получено из условия обеспечения грубости синтезируемой системы. Поэтому условие (13в), полученное из этого соотношения, будем называть *условием грубости*.

Решив систему (13), включающую условия разрешимости, физической осуществимости и грубости, относительно порядка ЖПФ n_G , получим

$$n_G - n_R \geq n_{R^+} + r_p - n_{P^-} - 1. \quad (14)$$

Отсюда находим порядок желаемой ЖПФ. После этого по заданным показателям качества выбираем нужный тип желаемой НПФ. При этом находим только знаменатель желаемой НПФ. Числитель желаемой НПФ, если синтезируется астатическая система r -го порядка и объект не содержит правых полюсов и нулей, равен сумме r последних слагаемых характери-

стического полинома (т. е. ее знаменателя). Последнее следует из следующего утверждения.

Утверждение. Если передаточная функция объекта не содержит правых нулей и полюсов и синтезируемая система обладает астатизмом r -го порядка, то числитель ЖПФ совпадает суммой r последних слагаемых знаменателя [4–6].

Естественно, такой же вид будет иметь желаемая НПФ. Отсюда следует алгоритм построения желаемой НПФ:

- проводится факторизация передаточной функции объекта;
- записываются условия разрешимости, физической осуществимости и грубости и определяется порядок желаемой НПФ;
- выбрав типовую НПФ, строится желаемая НПФ и путем моделирования системы с желаемой НПФ определяется время регулирования τ_p ;
- рассчитав коэффициент $\alpha = t_p/\tau_p$ и проведя обратное преобразование, можно найти ЖПФ.

Синтез передаточной функции регулятора при известной ЖПФ

Пусть ЖПФ известна и в процессе ее определения проведена факторизация передаточной функции объекта, выписаны условия разрешимости, физической осуществимости, грубости (136) и определены наименьшие возможные значения степеней n_M и n_N неизвестных полиномов $M(s)$ и $N(s)$. Тогда можно порекомендовать следующий порядок определения передаточной функции регулятора:

- записать полиномы $M(s)$ и $N(s)$ с неопределенными коэффициентами, степени которых равны найденным значениям n_M и n_N , а затем, используя их, составить полиномиальное уравнение (6);
- записать систему уравнений приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях в левой и правой частях полиномиального уравнения и, решив эту систему, определить неизвестные коэффициенты полиномов $M(s)$ и $N(s)$;
- подставив найденные полиномы $M(s)$ и $N(s)$, а также полученные при факторизации передаточной функции объекта полиномы $P^+(s)$ и $R^-(s)$ в формулу (5)

$$W_p(s) = \frac{R^-(s)}{P^-(s)} \frac{M(s)}{N(s)s^{r_p}},$$

определить искомую передаточную функцию регулятора.

Пример. Передаточная функция объекта имеет вид

$$W_o(s) = \frac{0,5s + 1}{(s + 1)(2s + 1)s}.$$

Коэффициенты позиционной и скоростной ошибки равны нулю, время регулирования $t_p = 4$, перерегулирование $\sigma = 20$. Определить передаточную функцию регулятора, обеспечивающую заданные требования к синтезированной системе.

Решение. Система должна обладать астатизмом второго порядка, чтобы обеспечить равенство нулю коэффициентов позиционной и скоростной ошибок. Но поскольку объект обладает астатизмом только первого порядка ($r_o = 1$), то регулятор должен также обладать астатизмом первого порядка ($r_p = 1$)

Найдем степень ЖПФ. Из соотношения (14) имеем

$$n_G - 3 \geq 1 + 1 - 1 - 1, n_G = 3.$$

В качестве типовой примем геометрическую НПФ, так как при астатической системе высокого порядка перерегулирование получается минимальным именно при геометрической НПФ [4].

Первый член a знаменатель q нормированного геометрического полинома порядка n связаны соотношением

$$q = 1/a^{2/(n-1)}.$$

Поэтому нормированный геометрический полином третьего порядка при первом члене прогрессии $a = 0,5$ и соответственно знаменателе прогрессии $q = 2$ имеет вид

$$(q + a)(q + aq)(q + aq^2) = q^3 + 3,5q^2 + 3,5q + 1.$$

Допустим, выбором типа и параметров нормированного характеристического полинома мы обеспечили требуемые показатели качества, кроме времени регулирования. Тогда желаемой НПФ будет

$$W_n^*(q) = (3,5q + 1)/(q^3 + 3,5q^2 + 3,5q + 1).$$

Время регулирования τ_p и перерегулирования σ (определяется путем моделирования) си-

стемы с желаемой НПФ соответственно равны $\tau_p = 7,1$; $\sigma = 20$.

Коэффициент преобразования

$$\alpha = t_p / \tau_p = 4/7,1 = 0,56.$$

Чтобы получить ЖПФ, нужно проделать обратное преобразование (12), положив $a_n = 1$:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0,56 \cdot 3,5 = 1,6; \quad b_1 = 1; \\ a_0 &= 0,56^3 = 0,1756; \quad a_1 = 0,56^2 \cdot 3,5 = 1,098; \\ a_2 &= 0,56 \cdot 3,5 = 1,96; \quad a_3 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, ЖПФ имеет вид

$$W_{\text{ж}} = (1,96s + 1) / (0,1756s^3 + 1,098s^2 + 1,96s + 1).$$

Условия разрешимости, физической реализуемости и грубости принимают вид

$$\begin{aligned} 3 &\leq n_M + n_N + 1; \\ 1 + n_M &\leq 1 + n_N + 1; \\ 3 &= 1 + n_N + 1. \end{aligned}$$

Решив эту систему, находим

$$\begin{aligned} n_N &= 1, \quad n_M = 1, \\ M(s) &= b_0s + b_1, \quad N(s) = a_0s + a_1. \end{aligned}$$

Полиномиальные уравнения (6) принимают вид

$$\begin{aligned} b_0s + b_1 + s(a_0s + a_1)s &= \\ = 0,1756s^3 + 1,098s^2 + 1,96s + 1. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,1756; \quad a_1 = 1,098; \quad b_0 = 1,9; \quad b_1 = 1; \\ M(s) &= 1,9s + 1; \quad N(s) = 0,1756s + 1,098. \end{aligned}$$

Поставив найденные полиномы и полиномы, полученные в процессе факторизации передаточной функции объекта $P^-(s)$ и $R^-(s)$, в соотношение (5), находим

$$W_p(s) = \frac{(s+1)(2s+1)(1,9s+1)}{(0,5s+1)(0,1756s+1,098)s}.$$

Как показывает моделирование, синтезированная система удовлетворяет заданным требованиям качества: время регулирования $t_p = 4$ и перерегулирование $\sigma = 20$.

Заключение

Если синтезируемая система обладает астатизмом первого порядка, то переходный процесс получается монотонным, если в качестве типового НПФ выбрать биномиальную НПФ.

Если система обладает астатизмом второго порядка и выше, то перерегулирование получается большим. Оно тем больше, чем выше порядок астатизма и выше порядок синтезируемой системы. В этом случае перерегулирование получается меньшим, если в качестве типовой выбрать геометрическую или арифметическую НПФ. Если при построении характеристического полинома в качестве его корней принимается возрастающая геометрическая прогрессия, то ее первый член будет степенью устойчивости, и чем меньше степень устойчивости, тем меньше перерегулирование. Поэтому, имея таблицы или графики зависимости перерегулирования от степени устойчивости геометрической НПФ, путем выбора первого члена характеристического полинома можно обеспечить заданное перерегулирование.

Список литературы

1. Солодовников В. В., Филимонов Н. Б. Динамическое качество систем автоматического регулирования. М.: МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1987.
2. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962.
3. Соколов Н. И. Аналитический метод синтеза систем управления. М.: Машиностроение, 1966.
4. Ким Д. П. Алгебраические методы синтеза систем автоматического управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 164 с.
5. Ким Д. П. Алгебраический метод синтеза систем линейных непрерывных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 9–15.
6. Ким Д. П. Определение желаемой передаточной функции при синтезе систем управления алгебраическим методом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 5. С. 15–21.

Algebraic Method for the Synthesis of Astatic Continuous-Time Control Systems

D. P. Kim, dpkim@yandex.ru,

Moscow Technological University (MIREA), Moscow, Russian Federation

Corresponding author: Kim Dmitry P., D. Sc., Professor,
Moscow Technological University (MIREA), Moscow, Russian Federation,
e-mail: dpkim@yandex.ru

Accepted on December 25, 2018

Abstract

An algebraic method for the synthesis of astatic continuous-time control systems is considered. The method is based on the construction of the desired transfer function (DTF) from given performance indicators (setting time, overshoot, etc.) and a given plant transfer function. The construction of DTF is based on the use of the desired normalized transfer function (NTF). The desired NTF is the transfer function whose denominator is a monic polynomial with unit free term and whose performance indicators, except for the setting time, coincide with those of the DTF. Therefore, one can obtain the DTF by constructing the desired NTF and then by applying the inverse transform with transformation ratio equal to the ratio of the setting time of the system to be synthesized to that of the system with the desired NTF. The desired NTF is assembled from standard NTFs. There are various standard NTFs: binomial, arithmetic, and geometric. The type of an NTF is determined by its characteristic polynomial; an NTF is said to be binomial if its characteristic polynomial is the Newton binomial and arithmetic or geometric if the roots of its characteristic polynomial form an arithmetic or a geometric progression, respectively. When constructing the desired NTF, three conditions must be met: the physical feasibility of the controller, solvability, and robustness. These three conditions determine the degrees of the characteristic equation of the system to be synthesized and the degrees of the unknown polynomials that are introduced in the synthesis process. After that, according to the given performance indicators, the type of the desired NTF is determined. Here we find only the denominator of the desired NTF. If the system to be synthesized is r^{th} -order astatic and the plant does not contain right poles and zeros, then the numerator of the desired NTF is equal to the sum of the last r terms of the characteristic polynomial. After the system DTF has been obtained, the transfer function of the controller is determined by equating the transfer function of the closed-loop system with the DTF.

Keywords: the desired transfer function of the normalized transfer function, control time, overshoot, order astatism

For citation:

Kim D. P. Algebraic Method for the Synthesis of Astatic Continuous-Time Control Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 5, pp. 274–279.

DOI: 10.17587/mau.20.274-279

References

1. Solodovnikov V. V., Filimonov N. B. *Dinamicheskoe kachestvo sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* (Dynamic Performance of Automatic Control Systems), Moscow, Bauman Technical University, 1987 (in Russian).
2. Krasovsky A. A., Pospelov G. S. *Osnovy avtomatiki i tekhnicheskoy kibernetiki* (Foundations of Automation and Technical Cybernetics), Moscow-Leningrad, GOSENERGOIZDAT, 1962 (in Russian).

3. Sokolov N. I. *Analiticheskij metod sinteza sistem upravleniya* (An Analytical Method for the Synthesis of Control Systems), Moscow, Mashinostroenie, 1966 (in Russian).

4. Kim D. P. *Algebraicheskie metody sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya* (Algebraic Methods for the Synthesis of Automatic Control Systems), Moscow, Fizmatlit, 2014 (in Russian).

5. Kim D. P. *Algebraicheskij metod sinteza sistem lineynykh nepreryvnykh sistem upravleniya* (Algebraic method for the synthesis of systems of linear continuous control systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2011, no. 1, pp. 9–15 (in Russian).

6. Kim D. P. *Opredelenie zhelaemoj peredatochnoj funktsii pri sinteze sistem upravleniya algebraicheskim metodom* (Determination of the desired transfer function in the synthesis of control systems by the algebraic method), *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2011, no. 5, pp. 15–21 (in Russian).