

С. А. Гайворонский, канд. техн. наук, доц., saga@tpu.ru,
Т. А. Езангина, канд. техн. наук, науч. сотр., eza-tanya@yandex.ru,
И. В. Хожаев, аспирант, ivh1@tpu.ru,

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск,

А. А. Несенчук, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., anes@newman.bas-net.by,
Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, г. Минск

Определение вершинных полиномов для анализа степени робастной устойчивости интервальной системы¹

Рассматривается характеристический полином интервальной системы автоматического управления, у которого коэффициенты априорно точно неизвестны или могут произвольно изменяться в заранее известных числовых пределах. При этом корни интервального характеристического полинома мигрируют по комплексной плоскости, образуя области их локализации. По границам этих областей возможно определить степень робастной устойчивости интервальной системы автоматического управления. Для ее анализа рассматривается отображение на корневую комплексную плоскость параметрического многогранника интервальных коэффициентов характеристического полинома системы управления. При этом учитывается известное свойство определения степени робастной устойчивости интервальной системы управления в вершинах этого многогранника. Для нахождения данных проверочных вершин предлагается использовать основное фазовое уравнение метода корневого годографа. Исходя из требований к расположению областей локализации полюсов системы управления проведено интервальное расширение углов от нулей и полюсов, входящих в основное фазовое уравнение. Для этого доказаны утверждения, определяющие суммы интервалов углов полюсов в случае колебательной степени робастной устойчивости интервальной системы управления. Из условий определения полюсом степени колебательной устойчивости системы получены двойные интервальные угловые неравенства, задающие диапазоны углов выхода из этого полюса всех реберных ветвей многопараметрического интервального корневого годографа. В результате проведенных исследований разработана процедура нахождения у многогранника коэффициентов характеристического полинома координат проверочных вершин и соответствующих им вершинных полиномов. Определены вершинные полиномы для анализа степени робастной устойчивости интервальных систем управления второго, третьего и четвертого порядков. Доказано утверждение для нахождения координат вершины, которая определяет степень робастной апериодической устойчивости. Приведены числовые примеры вершинного анализа степени колебательной и апериодической робастной устойчивости интервальных систем управления третьего и четвертого порядков. Для проверки полученных результатов построены области локализации корней рассмотренных интервальных полиномов, подтверждающие правильность выбора проверочных вершин многогранника интервальных коэффициентов.

Ключевые слова: характеристический полином, многогранник интервально-неопределенных коэффициентов, углы выхода ветвей корневого годографа, степень робастной устойчивости, интервальные угловые неравенства

Введение

Для систем автоматического управления с интервальным характеристическим полиномом (ИХП) существует задача анализа робастной устойчивости, т. е. возможности сохранения устойчивости системы при любых значениях интервальных коэффициентов полинома. Основополагающие результаты в области анализа устойчивости интервальных полиномов были получены В. Л. Харитоновым [1]. Позднее появились работы по исследованию робастной устойчивости ИХП с различными типами неопределенности коэффициентов [2–4].

Заметим, что наряду с анализом робастной устойчивости не меньший интерес с практической точки зрения представляет задача определения робастного качества систем с ИХП. Согласно работам [5–8] эта задача может быть успешно решена с использованием корневого подхода, который является достаточно простым и наглядным.

Известно, что корни характеристического полинома системы определяют такой важный показатель, как степень устойчивости, характеризующую длительность переходного процесса. У интервальных систем, в отличие от стационарных, корни ИХП мигрируют по комплексной плоскости, образуя области локализации. По границам этих областей можно определить степень η робастной устойчивости системы — минимальное расстояние от мни-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-58-00045 Бел_а).

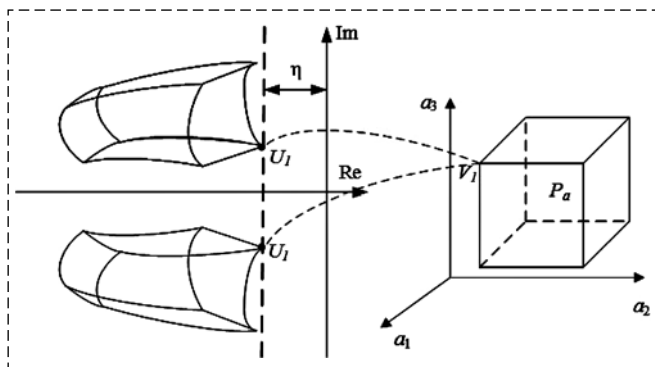


Рис. 1. Отображение многогранника коэффициентов ИХП на корневую плоскость

Fig. 1. ICP coefficients polytope projection on a complex plane

мой оси до ближайшей границы области локализации полюса.

Рассмотрим определение степени робастной устойчивости по отображению на корневую плоскость многогранника интервальных коэффициентов ИХП. Согласно работам [9, 10] степень робастной устойчивости определяется образами вершин многогранника (рис. 1).

Задача определения степени робастной устойчивости системы во всех 2^m вершинах (m — число интервальных коэффициентов ИХП) достаточно трудоемкая. Поэтому существуют работы [8, 10], посвященные сокращению числа проверочных вершин. Однако анализ показал, что предложенные в указанных работах подходы дают избыточное число этих вершин. В связи с этим представляет интерес задача определения минимального числа проверочных вершин и соответствующих им вершинных полиномов для анализа степени робастной устойчивости интервальных систем.

Интервальное расширение углов выхода реберных ветвей из комплексного полюса

Пусть ИХП имеет вид

$$A(s) = \sum_{i=0}^n [a_i] s^i = [a_n] s^n + [a_{n-1}] s^{n-1} + \dots + [a_0], [a_i] > 0, \quad (1)$$

где $m = n + 1$ коэффициентов могут изменяться в известных пределах. Образующий этими коэффициентами многогранник M является прямоугольным гиперпараллелепипедом с вершинами V_q , $q = 1, 2^m$. Координаты любой точки M относительно вершины V_q определяются выражениями

$$a_i = a_i^q + \Delta a_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad (2)$$

$$(a_{i \min} - a_i^q) \leq \Delta a_i \leq (a_{i \max} - a_i^q),$$

где Δa_i — приращение i -го интервального коэффициента; a_i^q — его значение в вершине V_q ; $a_i = a_{i \max}$, $a_i = a_{i \min}$ — соответственно верхний и нижний пределы коэффициента a_i . Соотношение, связывающее точки M с корнями полинома (1), может быть получено подстановкой в соотношение (1) выражения (2):

$$A^q(s) + \sum_i \Delta a_i s^i = 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad (3)$$

где $A^q(s) = \sum_i a_i^q s^i$ — вершинный полином.

Введем в рассмотрение ребра M , которые обозначим R_i^q , где i — индекс интервального коэффициента, q — индекс вершины, из которой по ребру изменяется a_i . На основании соотношения (3) запишем уравнение отображения R_i^q на плоскость корней:

$$A^q(s) + \Delta a_i s^i = 0. \quad (4)$$

Согласно теории корневого годографа уравнение (4) может быть получено из реберной передаточной функции

$$W_i^q(\Delta a_i, s) = \frac{\Delta a_i s^i}{A^q(s)}. \quad (5)$$

Анализируя выражения (4) и (5), заметим, что при изменении Δa_i в интервале (2) корни движутся от полюсов функции (5), соответствующих одному концу R_i^q , к корням уравнения (4) на другом конце R_i^q . При этом корни образуют реберные ветви, а их начала и концы — корневые узлы.

Исходя из уравнения фаз корневого годографа [11] угол выхода реберной ветви из комплексного полюса P_1 , являющегося корневым узлом, при увеличении a_i находится по формуле

$$\Theta_1^i = \pi - \sum_{p=2}^n \Theta_p + i\Theta_0, \quad (6)$$

а при уменьшении a_i — по формуле

$$\Theta_1^i = - \sum_{p=2}^n \Theta_p + i\Theta_0, \quad (7)$$

где Θ_p и Θ_0 — углы между вещественной осью и векторами, направленными из P_1 соответственно к p -му полюсу и к i -м нулям с координатами $(0; j0)$. Поскольку P_1 может менять свое

положение внутри области локализации, угол Θ_0 будет изменяться в интервале $[\Theta_0]$. Так как область локализации P_1 расположена во втором квадранте, то $[\Theta_0] = [90^\circ; 180^\circ]$.

Интервальное расширение касается и углов Θ_p , изменяющихся в своих интервалах $[\Theta_p]$. Определим сумму $[\Theta_p]$ для двух характерных случаев, когда левее пары полюсов P_1 и P_2 лежит другая пара P_3 и P_4 (рис. 2, а) или вещественный полюс P_3 (рис. 2, б). Зная сумму $[\Theta_p]$ для этих случаев, можно определить интервал искомых углов для любого расположения произвольного числа полюсов, локализованных левее P_1 .

Утверждение 1. Если пара комплексно-сопряженных полюсов P_3 и P_4 мигрирует в области, расположенной левее полюсов P_1 и P_2 (рис. 2, а), то сумма углов $[\Theta_3]$ и $[\Theta_4]$, образованных P_3 и P_4 относительно P_1 , принадлежит интервалу $[0^\circ; 180^\circ]$.

Доказательство. Рассмотрим углы треугольника $\Delta P_1 P_3 P_4$. Определим интервалы изменения углов Θ_3 и Θ_4 . Из рис. 2, а видно, что $\Theta_3 = \gamma - 90^\circ$ и $\Theta_4 = 90^\circ - \psi$. Из этого следует, что $\Theta_3 + \Theta_4 = \gamma - \psi$. Тогда из правила углов треугольников находим $\min(\gamma - \psi) = 0^\circ$ и $\max(\gamma - \psi) = 180^\circ$. Следовательно, $[\Theta_3] + [\Theta_4] = [0^\circ; 180^\circ]$.

Утверждение 2. Если вещественный полюс P_3 перемещается по вещественной оси влево от полюсов P_1 и P_2 (рис. 2, б), то угол $[\Theta_3]$, образованный P_3 относительно P_1 , принадлежит интервалу $[0^\circ; 90^\circ]$.

Доказательство. Если P_3 расположен вблизи слева от вертикальной прямой, проходящей через P_1 и P_2 , то $\Theta_3 \rightarrow 90^\circ$. Если же P_3 удален

от указанной прямой на значительное расстояние, то $\Theta_3 \rightarrow 0^\circ$. Следовательно, получаем $[\Theta_3] = [0^\circ; 90^\circ]$.

Таким образом, зная число полюсов и учитывая варианты их возможного расположения относительно комплексного полюса P_1 , а также тот факт, что $\Theta_2 = 90^\circ$, можно к формулам (6) и (7) применить интервальное расширение:

$$[\Theta_1^i] = \pi - \sum_{p=2}^n [\Theta_p] + i[\Theta_0]; \quad (8)$$

$$[\Theta_1^i] = -\sum_{p=2}^n [\Theta_p] + i[\Theta_0]. \quad (9)$$

Формирование двойных интервальных угловых неравенств

Для того чтобы полюс P_1 (образ вершины V_q , $q \in 1, 2^m$) определял степень робастной устойчивости системы, необходимо наложить ограничения на диапазоны углов $[\Theta_1^i]$ выхода реберных ветвей из P_1 :

$$\underline{\Theta} \leq [\Theta_1^i] \leq \bar{\Theta}, i = \overline{0, n}, \quad (10)$$

где $\underline{\Theta}$ и $\bar{\Theta}$ — соответственно заданные минимальный и максимальный углы выхода реберных ветвей из P_1 . Очевидно, что если P_1 определяет степень устойчивости, то условие (10) имеет вид

$$90^\circ \leq [\Theta_1^i] \leq 270^\circ, i = \overline{0, n}. \quad (11)$$

Необходимо, чтобы интервальные неравенства (11) выполнялись для всех коэффициентов a_i . Поэтому в соотношениях (8) и (9) предлагается ввести слагаемое πr_i , где $r_i = 0$ или $r_i = 1$. Выбор $r_i = 0$ не меняет угол выхода корневого годографа по ребру a_i , а при $r_i = 1$ угол изменяется на 180° . Так, например, если при условии (11) имеем $[\Theta_1^i] = [180^\circ; 270^\circ]$, то выбираем $r_i = 0$, что соответствует $\bar{a}_i$. Если же $[\Theta_1^i] = [270^\circ; 360^\circ]$, то выбираем $r_i = 1$ и получаем $\underline{a}_i$. В случае, когда $[\Theta_1^i] = [180^\circ; 360^\circ]$, следует выбрать $r_i = 0$ и $r_i = 1$. Это означает, что нужно рассматривать оба предела коэффициента a_i .

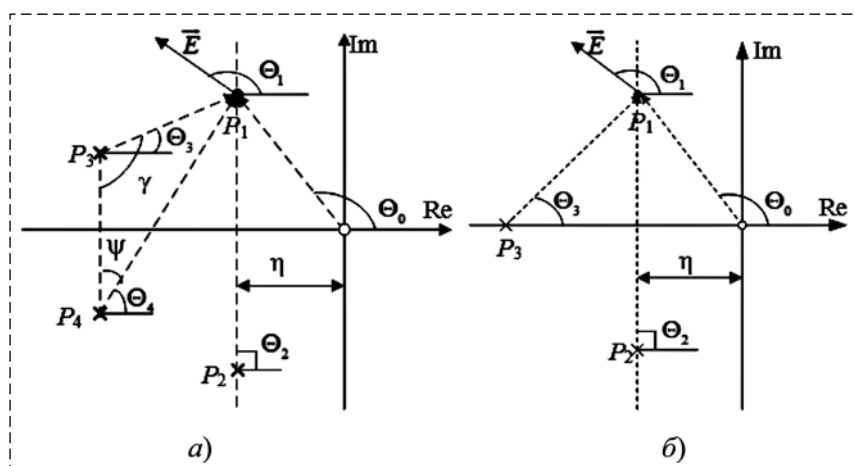


Рис. 2. Полюса слева от P_1 :

а — пара комплексно-сопряженных полюсов P_3 и P_4 ; б — вещественный полюс P_3

Fig. 2. System poles on the left of P_1 :

а — a pair of complex-conjugate poles P_3 and P_4 ; б — a real pole P_3

Таким образом, с учетом слагаемого πr_i запишем неравенства (11) в виде

$$90^\circ \leq [\Theta_0]i - \sum_{p=2}^n [\Theta_p] \pm \pi r_i \leq 270^\circ, \quad i = \overline{0, n}. \quad (12)$$

Неравенства (12) назовем двойными интервальными угловыми неравенствами (ДИУН).

Определение вершин для нахождения степени робастной колебательной устойчивости

Для определения координат проверочных вершин доказано следующее утверждение.

Утверждение 3. Если три интервальных коэффициента ИХП a_{i-1} , a_i , a_{i+1} имеют один и тот же предел, то образ вершины, в координаты которой входят указанные коэффициенты, не может лежать на границе области локализации корней ИХП.

Доказательство. Пусть коэффициенты ИХП a_{i-1} , a_i , a_{i+1} имеют верхний предел, т. е. $\overline{a_{i-1}}$, $\overline{a_i}$, $\overline{a_{i+1}}$. Тогда на основании выражения (8) запишем углы выхода реберных ветвей при изменении этих коэффициентов:

$$\begin{aligned} [\Theta_{i-1}] &= - \sum_{p=2}^n [\Theta_p] + (i-1)[\Theta_0]; \\ [\Theta_i] &= - \sum_{p=2}^n [\Theta_p] + i[\Theta_0]; \\ [\Theta_{i+1}] &= - \sum_{p=2}^n [\Theta_p] + (i+1)[\Theta_0]. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что во все выражения (13) входят одинаковые значения суммы углов полюсов $\sum_{p=2}^n [\Theta_p]$, которые не меняют соотношения между углами выхода. Поэтому уберем их из соотношения (13) и получим $[\Theta_{i-1}] = (i-1)[\Theta_0]$; $[\Theta_i] = i[\Theta_0]$; $[\Theta_{i+1}] = (i+1)[\Theta_0]$.

Для того чтобы образ вершины принадлежал границе области локализации корня ИХП, необходимо, чтобы выполнялось условие $\Theta_{\max} - \Theta_{\min} < 180^\circ$, где $\Theta_{\max}$, $\Theta_{\min}$ — соответственно максимальный и минимальный углы выхода реберных ветвей. Проверим выполнение данного условия для вершины, где $\overline{a_{i-1}}$, $\overline{a_i}$, $\overline{a_{i+1}}$. Очевидно, что $[\Theta_{i-1}] = \Theta_{\min}$, а $[\Theta_{i+1}] = \Theta_{\max}$. В результате находим $\Theta_{\max} - \Theta_{\min} = ((i+1) - (i-1))[\Theta_0] = 2[\Theta_0] = [180^\circ; 360^\circ] \Rightarrow \Theta_{\max} - \Theta_{\min} \geq 180^\circ$.

Если a_{i-1} , a_i , a_{i+1} имеют нижний предел, то на основании выражения (9) получаем: $[\Theta_{i-1}] = \pi + (i-1)[\Theta_0]$; $[\Theta_i] = \pi + i[\Theta_0]$; $[\Theta_{i+1}] =$

$= \pi + (i+1)[\Theta_0]$. Проверая выполнение условия граничности, получаем $\Theta_{\max} - \Theta_{\min} = [180^\circ; 360^\circ]$. Таким образом, при одинаковых пределах трех соседних коэффициентов a_{i-1} , a_i , a_{i+1} образ вершины не принадлежит границе области локализации корней ИХП.

На основании *утверждений 1 и 2* запишем ДИУН для систем низкого порядка. Так, для $n = 2$ имеем

$$90^\circ \leq [90^\circ; 180^\circ]i - 90 \pm \pi r_i \leq 270^\circ, \quad i = \overline{0, n}. \quad (14)$$

Преобразуем неравенство (14) к виду

$$180^\circ \leq [90^\circ i; 180^\circ i] \pm \pi r_i \leq 360^\circ, \quad i = \overline{0, n}. \quad (15)$$

Решая ДИУН (15) для всех i , находим значения r_i : $r_0 = 1$ или $r_0 = 0$; $r_1 = 1$; $r_2 = 0$. Они определяют координаты двух проверочных вершин $V_1 = \overline{a_0 a_1 a_2}$, $V_2 = \underline{a_0 a_1 a_2}$. Данные вершины задают два вершинных полинома для нахождения степени робастной колебательной устойчивости:

$$A_1(s) = \overline{a_2} s^2 + \overline{a_1} s + \overline{a_0}; \quad A_2(s) = \underline{a_2} s^2 + \underline{a_1} s + \underline{a_0}.$$

Для $n = 3$ (рис. 2, б) на основании *утверждения 2* имеем: $\Theta_2 + [\Theta_3] = 90^\circ + [0^\circ; 90^\circ]$. Учитывая, что $[\Theta_0] = [90^\circ; 180^\circ]$, запишем ДИУН

$$90^\circ \leq [90^\circ; 180^\circ]i - (90^\circ + [0^\circ; 90^\circ]) \pm \pi r_i \leq 270^\circ, \quad i = \overline{0, n}. \quad (16)$$

В результате преобразования (16) получаем:

$$180^\circ \leq [90i - 90^\circ; 180^\circ i] \pm \pi r_i \leq 360^\circ, \quad i = \overline{0, n}. \quad (17)$$

Решением ДИУН (17) являются значения $r_0 = 0$; $r_1 = 1$; $r_2 = 0$ или $r_2 = 1$, $r_3 = 0$ или $r_3 = 1$. Этим значениям соответствуют координаты следующих проверочных вершин: $V_1 = \overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$, $V_2 = \underline{a_0 a_1 a_2 a_3}$, $V_3 = \overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$, $V_4 = \underline{a_0 a_1 a_2 a_3}$. Заметим, что вершина $V_4 = \underline{a_0 a_1 a_2 a_3}$ не может быть граничной и, следовательно, проверочной для определения степени робастной колебательной устойчивости. Поэтому получаем три вершинных полинома:

$$\begin{aligned} A_1(s) &= \overline{a_3} s^3 + \overline{a_2} s^2 + \overline{a_1} s + \overline{a_0}; \\ A_2(s) &= \underline{a_3} s^3 + \underline{a_2} s^2 + \underline{a_1} s + \underline{a_0}; \\ A_3(s) &= \overline{a_3} s^3 + \overline{a_2} s^2 + \underline{a_1} s + \underline{a_0}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для $n = 4$ возможны два варианта расположения корней ИХП: пара комплексно-сопряженных полюсов P_3 и P_4 мигрирует левее полюсов P_1 и P_2 или два вещественных полюса P_3 и P_4 лежат в отрезке слева от полюсов P_1 и P_2 . В первом случае на основании *утверждения 1* имеем $\Theta_2 + [\Theta_3] + [\Theta_4] = 90^\circ + [0^\circ; 180^\circ]$. Тогда с учетом $[\Theta_0] = [90^\circ; 180^\circ]$ ДИУН примет вид

$$90^\circ \leq [90^\circ; 180^\circ]i - (90^\circ + [0^\circ; 180^\circ]) \pm \pi r_i \leq 270^\circ, \quad (19)$$

$$i = \overline{0}, n.$$

После преобразования неравенства (19) получаем

$$180^\circ \leq [90^\circ i - 180^\circ; 180^\circ i] \pm \pi r_i \leq 360^\circ, i = \overline{0}, n. \quad (20)$$

Во втором случае на основании *утверждения 2* $\Theta_2 + [\Theta_3] + [\Theta_4] = 90^\circ + [0^\circ; 180^\circ]$. Для этого случая ДИУН после преобразования будет также иметь вид (20), и, следовательно, проверочные вершины будут иметь те же координаты, что для первого случая.

В результате решения (20) и на основании *утверждения 3* находим координаты следующих проверочных вершин:

$$\begin{aligned} V_1 &= \overline{a_0} \underline{a_1} \overline{a_2} \underline{a_3} \overline{a_4}; & V_2 &= \overline{a_0} \underline{a_1} \underline{a_2} \overline{a_3} \overline{a_4}; \\ V_3 &= \overline{a_0} \underline{a_1} \underline{a_2} \underline{a_3} \overline{a_4}; & V_4 &= \overline{a_0} \underline{a_1} \underline{a_2} \underline{a_3} \underline{a_4}; \\ V_5 &= \overline{a_0} \underline{a_1} \underline{a_2} \underline{a_3} \underline{a_4}; & V_6 &= \overline{a_0} \underline{a_1} \underline{a_2} \underline{a_3} \underline{a_4}; \\ V_7 &= \overline{a_0} \underline{a_1} \underline{a_2} \underline{a_3} \underline{a_4}; & V_8 &= \overline{a_0} \underline{a_1} \underline{a_2} \underline{a_3} \underline{a_4}. \end{aligned}$$

Этим вершинам соответствуют восемь вершинных полиномов:

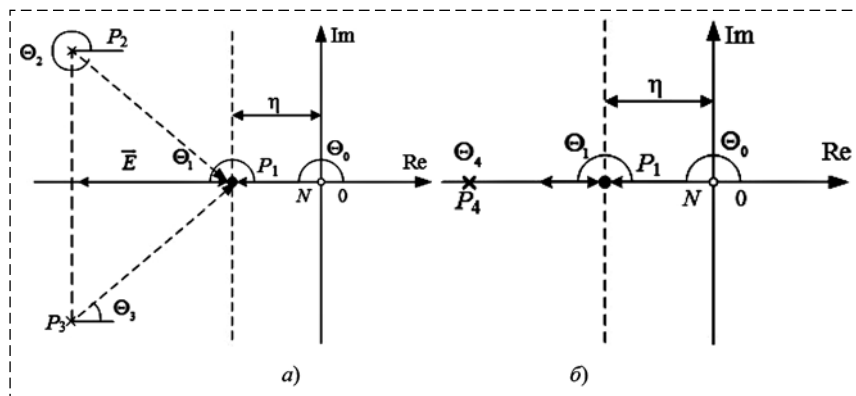


Рис. 3. Полюса левее P_1 :

a — пара комплексно-сопряженных полюсов P_2 и P_3 ; b — вещественный полюс P_4

Fig. 3. Poles on the left of P_1 :

a — a pair of complex-conjugate poles P_2 and P_3 ; b — a real pole P_4

$$\begin{aligned} A_1(s) &= \underline{a_4} s^4 + \underline{a_3} s^3 + \overline{a_2} s^2 + \underline{a_1} s + \overline{a_0}; \\ A_2(s) &= \overline{a_4} s^4 + \overline{a_3} s^3 + \underline{a_2} s^2 + \overline{a_1} s + \underline{a_0}; \\ A_3(s) &= \underline{a_4} s^4 + \overline{a_3} s^3 + \underline{a_2} s^2 + \underline{a_1} s + \overline{a_0}; \\ A_4(s) &= \overline{a_4} s^4 + \underline{a_3} s^3 + \underline{a_2} s^2 + \underline{a_1} s + \underline{a_0}; \\ A_5(s) &= \underline{a_4} s^4 + \underline{a_3} s^3 + \overline{a_2} s^2 + \underline{a_1} s + \overline{a_0}; \\ A_6(s) &= \overline{a_4} s^4 + \underline{a_3} s^3 + \underline{a_2} s^2 + \overline{a_1} s + \overline{a_0}; \\ A_7(s) &= \underline{a_4} s^4 + \overline{a_3} s^3 + \underline{a_2} s^2 + \overline{a_1} s + \underline{a_0}; \\ A_8(s) &= \overline{a_4} s^4 + \overline{a_3} s^3 + \overline{a_2} s^2 + \underline{a_1} s + \underline{a_0}. \end{aligned} \quad (21)$$

Определение вершин для нахождения степени робастной аperiodической устойчивости

Если ближайшим к мнимой оси является вещественный полюс P_1 , то область его локализации служит отрезок отрицательной вещественной полуоси. В этом случае $\Theta_0 = 180^\circ$.

Утверждение 4. Если вещественный полюс P_1 мигрирует в отрезке, левее которого расположены области локализации пары комплексно-сопряженных полюсов P_2 и P_3 (рис. 3, a) или отрезок другого вещественного полюса P_4 (рис. 3, b), то сумма углов Θ_2 и Θ_3 , образованных P_2 , P_3 относительно P_1 , равна 360° , а угол $\Theta_4 = 0^\circ$.

Доказательство. Так как полюса P_2 и P_3 — комплексно-сопряженные, то треугольник $\Delta P_1 P_2 P_3$ является равнобедренным и, следовательно, $\Theta_2 = 360^\circ - \Theta_3$. Следовательно, $\Theta_2 + \Theta_3 = 360^\circ$. Во втором случае P_4 лежит на оси слева от P_1 . Тогда по определению углов полюсов из теории корневого годографа $\Theta_4 = 0^\circ$.

Для нахождения вершины, которая определяет степень робастной аperiodической устойчивости, доказано следующее утверждение.

Утверждение 5. Степень робастной аperiodической устойчивости системы любого порядка определяется в вершине $\underline{a_0}, \underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, \underline{a_4} \dots$.

Доказательство. Пусть P_1 является вещественным и самым ближним к мнимой оси полюсом. При изменении любого коэффициента a_i полюс P_1 будет двигаться влево по вещественной оси. Следовательно, его углы выхода по всем a_i равны 180° . Учитывая, что сумма углов всех других полюсов относительно P_1 равна нулю

(утверждение 4) и $\Theta_0 = 180^\circ$, получаем уравнение углов выхода

$$180^\circ i \pm \pi r = 180^\circ. \tag{22}$$

Решением (22) является следующий набор значений r_i : $r_0 = 1$; $r_1 = 0$, $r_2 = 1$; $r_3 = 0$, $r_4 = 1$. Полученные чередующиеся значения r_i соответствуют вершине $V_1 = \underline{a_0} \underline{a_1} \underline{a_2} \underline{a_3} \underline{a_4} \dots$ и вершинному полиному:

$$A(s) = \underline{a_0} + \overline{a_1} s + \underline{a_2} s^2 + \overline{a_3} s^3 + \underline{a_4} s^4 \dots + a_n s^n. \tag{23}$$

Числовые примеры

Пример 1. Пусть ИХП системы имеет вид:

$$D(s) = [d_3]s^3 + [d_2]s^2 + [d_1]s^1 + [d_0], \tag{24}$$

где $[d_3]=[0,03; 0,04]$; $[d_2]=[0,9; 1,1]$; $[d_1]=[80;100]$; $[d_0] = [250; 350]$.

Для определения степени робастной устойчивости системы найдены и приведены в табл. 1 корни вершинных полиномов (18) и (23).

Из полученных значений выбираем корень полинома $A(s)$ $s_1 = -2,55$, определяющий степень апериодической устойчивости системы.

Таблица 1
Table 1

Значения корней вершинных полиномов
Roots of vertex polynomials

Вершинный полином	Значения корней		
	s_1	s_2	s_3
$A_1(s)$	-4,63	-16 + j47,55	-16 - j47,55
$A_2(s)$	-4,56	-8,97 + j42,87	-8,97 - j42,87
$A_3(s)$	-4,61	-11,44 + j41,99	-11,44 - j41,99
$A(s)$	-2,55	-9,97 + j48,47	-9,97 - j48,47

Для проверки на рис. 4 (см. вторую сторону обложки) построены области локализации корней ИХП (24). Из рис. 4 видно, что степень робастной апериодической устойчивости системы $\eta = 2,55$ и определяется образом вершины $V_4 = \underline{a_0} \underline{a_1} \underline{a_2} \underline{a_3}$.

Пример 2. Зададим ИХП системы:

$$D(s) = [d_3]s^3 + [d_2]s^2 + [d_1]s^1 + [d_0], \tag{25}$$

где $[d_3] = [82;176]$; $[d_2] = [587, 25; 635]$; $[d_1] = [717, 5; 850]$; $[d_0] = [450; 1000]$. Аналогично с первым примером для анализа степени робастной устойчивости системы найдены и приведены в табл. 2 значения корней вершинных полиномов.

Из табл. 2 следует, что степень робастной колебательной устойчивости системы определяется корнями полинома $A_2(s)$ $s_{2,3} = -0,3639 \pm j1,4302$, являющимися образами вершины $V_2 = \underline{a_0} \underline{a_1} \underline{a_2} \underline{a_3}$.

На рис. 5 (см. вторую сторону обложки) представлена область локализации корней ИХП (25). Из рис. 5 можно сделать вывод, что найденное значение степени робастной колебательной устойчивости $\eta = 0,3639$ соответствует значению, полученному в результате отображения многогранника интервальных коэффициентов ИХП на корневую плоскость.

Пример 3. Для случая $n = 4$ рассмотрим ИХП

$$D(s) = [d_4]s^4 + [d_3]s^3 + [d_2]s^2 + [d_1]s^1 + [d_0], \tag{26}$$

где $[d_0] = [14\ 400; 25\ 920]$; $[d_1] = [25\ 696; 33\ 933]$; $[d_2] = [29\ 888; 32\ 854]$; $[d_3] = [12\ 820; 15\ 564]$; $[d_4] = [3000; 5256]$.

Для нахождения степени робастной устойчивости необходимо найти корни восьми вер-

Таблица 2
Table 2

Значения корней вершинных полиномов
Roots of vertex polynomials

Вершинный полином	Значения корней		
	s_1	s_2	s_3
$A_1(s)$	-6,7108	-0,5165 + j1,2452	-0,5165 - j1,2452
$A_2(s)$	-2,6088	-0,3639 + j1,4302	-0,3639 - j1,4302
$A_3(s)$	-2,8774	-0,3653 + j1,3569	-0,3653 - j1,3569
$A(s)$	-1,1403 + j1,0587	-1,1403 - j1,0587	-1,0560

Значения корней вершинных полиномов
Roots of vertex polynomials

Вершинный полином	Значение корней			
	s_1	s_2	s_3	s_4
$A_1(s)$	$-1,8501 + j2,0706$	$-1,8501 - j2,0706$	$-0,2866 + j1,0191$	$-0,2866 - j1,0191$
$A_2(s)$	$-1,2274 + j0,8821$	$-1,2274 - j0,8821$	$-0,2532 + j1,4473$	$-0,2532 - j1,4473$
$A_3(s)$	$-2,4092 + j1,0640$	$-2,4092 - j1,0640$	$-0,1848 + j1,1007$	$-0,1848 - j1,1007$
$A_4(s)$	$-1,3247 + j1,2894$	$-1,3247 - j1,2894$	$-0,1559 + j1,1911$	$-0,1559 - j1,1911$
$A_5(s)$	$-2,3827 + j1,4690$	$-2,3827 - j1,4690$	$-0,2113 + j1,0286$	$-0,2113 - j1,0286$
$A_6(s)$	$-0,2857 + j1,6919$	$-0,2857 + j1,6919$	$-0,9338 + j0,8961$	$-0,9338 - j0,8961$
$A_7(s)$	$-2,2332 + j0,1757$	$-2,2332 - j0,1757$	$-0,3608 + j1,2616$	$-0,3608 - j1,2616$
$A_8(s)$	$-0,8738 + j1,7179$	$-0,8738 - j1,7179$	$-0,3458 + j1,0991$	$-0,3458 - j1,0991$
$A(s)$	$-2,9013$	$-0,7612 + j1,2591$	$-0,7612 - j1,2591$	$-0,7642$

шинных полиномов (21) и одного вершинного полинома (23). Их значения приведены в табл. 3.

Из табл. 3 найдем $\eta = 0,1559$, определяющую степень робастной колебательной устойчивости системы в образе вершины $V_4 = \overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$. На рис. 6 (см. вторую сторону обложки) представлена область локализации корней ИХП (26). Из рис. 6 видно, что степень робастной колебательной устойчивости $\eta = 0,1559$ определяется вершинным полиномом $A_4(s) = \overline{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$.

Заключение

В статье рассмотрен интервальный характеристический полином, коэффициенты которого образуют параметрический многогранник. На основе теории корневого годографа получены условия для углов выхода реберных ветвей из полюсов системы, определяющих ее степень устойчивости. С использованием этих условий разработана процедура определения проверочных вершин многогранника интервальных коэффициентов. Найдены наборы вершинных характеристических полиномов для определения степени робастной устойчивости интервальных систем низкого порядка. Приведенные числовые примеры подтверждают правильность полученных результатов.

Список литературы

1. Харитонов В. Л. Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 11. С. 2086—2088.
2. Anderson B. D. O., Kraus F., Mansour M., Desgupta S. Easily testable sufficient conditions for the robust stability of systems with multi-affine parameter dependence // in M. Mansour, S. Balemi, Truol, editors, Robustness of dynamic systems with parameter uncertainties. Birkhauser, Basel, Switzerland, 1992. P. 81—92.
3. Kawamura T., Shima M. Robust stability analysis of characteristic polynomials whose coefficients are polynomials of interval parameters // Journal of Mathematical System, Estimation and Control. 1996. Vol. 6, № 4. P. 1—12.
4. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
5. Римский Г. В. Корневые методы исследования интервальных систем. Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1999. 186 с.
6. Несенчук А. А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода. Минск: ОИПИ, 2005. 232 с.
7. Вадутов О. С., Гайворонский С. А. Применение реберной маршрутизации для анализа устойчивости интервальных полиномов // Изв. АН. ТиСУ. 2003. № 6. С. 7—12.
8. Гайворонский С. А. Определение реберного маршрута для анализа робастной секторной устойчивости интервального полинома // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. № 5. С. 11—15.
9. Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Техническая кибернетика. 1991. № 1. С. 3—30.
10. Гайворонский С. А. Вершинный анализ корневых показателей качества системы с интервальными параметрами // Известия Томского политехнического университета. 2006. Т. 309, № 7. С. 6—9.
11. Удерман Э. Г. Метод корневого годографа в теории автоматических систем. М.: Наука, 1972. 448 с.

Analyzing Robust Stability of an Interval Control System on the Basis of Vertex Polynomials

S. A. Gayvoronskiy, saga@tpu.ru, T. A. Ezangina, eza-tanya@yandex.ru, I. V. Khozhaev, ivh1@tpu.ru,
National Research Tomsk Polytechnic University, 634050, Tomsk, Russian Federation,
A. A. Nesenchuk, anes@newman.bas-net.by
United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus,
220012, Minsk, Republic of Belarus

Corresponding author: **Ezangina Tatiana Al.**, Ph.D., Researcher,
National Research Tomsk Polytechnic University, 634050, Tomsk, Russian Federation,
e-mail: eza-tanya@yandex.ru

Accepted on January 14, 2019

Abstract

In the paper, a characteristic polynomial of an interval control system, whose coefficients are unknown or may vary within certain ranges of values, is considered. Parametric variations cause migration of interval characteristic polynomial roots within their allocation areas, whose borders determine robust stability degree of the interval control system. To estimate a robust stability degree, a projection of a polytope of interval characteristic polynomial coefficients on a complex plane must be examined. However, in order to find a robust stability degree it is enough to examine some vertices of a coefficient polytope and not the whole polytope. To find these vertices, which fully determine a robust stability degree, it is proposed to use a basic phase equation of a root locus method. Considering the requirements to placing allocation areas of system poles an interval extension of expressions for angles included to the phase equation. The set of statements, allowing to find a sum of pole angles intervals in the case of degree of oscillating robust stability, were formulated and proved. From these statements, a set of double interval angular inequalities was derived. The inequalities determine ranges of angles of all root locus edge branches departure from every pole. Considered research resulted in a procedure of finding coordinates of verifying vertices of a coefficients polytope and vertex polynomials according to these vertices. Such polynomials were found for oscillating robust stability degree analysis of interval control systems of the second, the third and the fourth order. Also, similar statements were derived for aperiodical robust stability degree analysis. Numerical examples of vertex analysis of oscillating and aperiodical robust stability degree were provided for interval control systems of the second, the third and the fourth order. Obtained results were proved by examining root allocation areas of interval characteristic polynomials examined in application examples of proposed methods.

Keywords: characteristic polynomial, polytope of interval coefficients, departure angles of root locus branches, robust stability degree, interval angle inequalities

Acknowledgements: This article was prepared with the financial support of Russian Foundation for Basic Research (project 18-58-00045 Bel_a).

For citation:

Gayvoronskiy S. A., Ezangina T. A., Khozhaev I. V., Nesenchuk A. A. Analyzing Robust Stability of an Interval Control System on the Basis of Vertex Polynomials, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 5, pp. 266–273.

DOI: 10.17587/mau.20.266-273

References

1. Haritonov V. L. *Asimptoticheskaya ustojchivost' semejstva sistem linejnykh differencial'nykh uravnenij* (Asymptotic stability of a linear differential equations family), *Differenc. Uravneniya*, 1978, vol. 14, no. 11, pp. 2086–2088 (in Russian).
2. Anderson B. D. O., Kraus F., Mansour M., Desgupta S. Easily testable sufficient conditions for the robust stability of systems with multi-affine parameter dependence, editors: M. Mansour, S. Balemi, Truol, *Robustness of dynamic systems with parameter uncertainties*, Birkhauser, Basel, Switzerland, 1992, pp. 81–92.
3. Kawamura T., Shima M. Robust stability analysis of characteristic polynomials whose coefficients are polynomials of interval parameters, *Journal of Mathematical System, Estimation and Control*, 1996, vol. 6, no. 4, pp. 1–12.
4. Polyak B. T., Shcherbakov P. S. *Robastnaya ustojchivost' i upravlenie* (Robust stability and control), Moscow, Nauka, 2002, 303 p. (in Russian).
5. Rimskiy G. V. *Kornevye metody issledovaniya interval'nykh sistem* (Root methods of interval systems examining), Minsk, Institut tekhnicheskoy kibernetiki NAN Belarusi, 1999, 186 p. (in Russian).
6. Nesenchuk A. A. *Analiz i sintez robastnykh dinamicheskikh sistem na osnove kornevogo podhoda* (Analysis and synthesis of robust dynamics systems on a base of root approach), Minsk, OIPI, 2005, 232 p. (in Russian).
7. Vadutov O. S., Gayvoronskiy S. A. *Primenenie rebernoj marshrutizacii dlya analiza ustojchivosti interval'nykh polinomov* (Application of edge routing to stability analysis of interval polynomials), *Izv. AN. TiSU*, 2003, no. 6, pp. 7–12 (in Russian).
8. Gayvoronskiy S. A. *Opredelenie rebernogo marshruta dlya analiza robastnoj sektornoj ustojchivosti interval'nogo polinoma* (Determination of the edge routing for the analysis of the robust sector stability of an interval polynomial), *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2005, no. 5, pp. 11–15 (in Russian).
9. Gusev Yu. M., Efanov V. N., Krymskiy V. G. *Analiz i sintez linejnykh interval'nykh dinamicheskikh sistem (sostoyanie problemy). Analiz s ispol'zovaniem interval'nykh harakteristicheskikh polinomov* (Analysis and synthesis of linear interval dynamic systems (problem condition). Analysis with the help of interval characteristic polynomials), *Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1991, no. 1, pp. 3–30 (in Russian).
10. Gayvoronskiy S. A. *Vershinnij analiz kornevykh pokazatelej kachestva sistemy s interval'nymi parametrami* (Vertex analysis of root quality indexes of the system with interval parameters), *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta*, 2006, vol. 309, no. 7, pp. 6–9 (in Russian).
11. Uderman E. G. *Metod kornevogo godografa v teorii avtomaticheskikh sistem* (Root locus method in control theory), Moscow, Nauka, 1972. 448 p. (in Russian).