УДК 681.5.015 DOI: 10.17587/mau.20.195-205

Н. Н. Карабутов, д-р техн. наук, проф., kn22@yandex.ru,
МИРЭА (Российский технологический университет), МГАВТ, г. Москва

Структурная идентифицируемость нелинейных динамических систем

Предложен подход к анализу структурной идентифицируемости (СИ) нелинейных динамических систем в условиях неопределенности. Данный подход имеет отличие от методов, применяемых для оценки СИ динамических систем в параметрическом пространстве. СИ трактуется как возможность структурной идентификации нелинейной части системы. Введено понятие S-синхронизируемости системы. Показано, что вход системы должен обеспечивать синхронизацию (S-синхронизируемость) системы для решения задачи СИ. Несинхронизируемый вход приводит к получению незначимой структуры, которая не дает решение задачи структурной идентификации. Это приводит к структурной неидентифицируемости системы. Выделено подмножество входов, обладающих свойством S-синхронизируемости, на которых системы являются неразличимыми. Метод оценки СИ основан на анализе специального класса структур. Для класса симметричных нелинейностей предложен метод оценки СИ.

Изучено влияние параметров входа на возможность оценки СИ системы. Показано, что требования постоянства возбуждения входа в адаптивных системах и системах СИ различаются.

Ключевые слова: *структура, нелинейная динамическая система, фазовый портрет, структурная идентифицируемость, нелинейность, синхронизация*

Введение

Проблема идентификации динамических систем, несмотря на множество полученных результатов, является одним из актуальных направлений исследования. Основополагающие результаты получены по параметрической идентификации систем. Наряду с этим выполнялись исследования по оценке идентифицируемости динамических систем. Подход к оценке идентифицируемости основан на идеях Р. Калмана [1]. Дальнейшее развитие этих идей дано в работах [2, 3]. Для линейных динамических систем условие идентифицируемости сводится к невырожденности информационной матрицы и наблюдаемости системы. Анализ результатов показывает, что оценка идентифицируемости линейной динамической системы заключается в возможности оценки ее параметров. Будем называть параметрическую идентифицируемость IP-идентифицируемостью (IPI). Исследованию IPI посвящено множество публикаций. Отличие от подхода, изложенного в работе [2], состоит в том, что результаты идентифицируемости представляют в виде, принятом в задачах параметрического оценивания. В работе [4] введено понятие структурной (СИ) и локальной (ЛИ) идентифицируемости. Показано, что ЛИ является необходимым условием глобальной идентифицируемости. Различные подходы и методы применяются для проверки СИ [5, 6]. В статье [7] введено понятие локальной параметрической идентифицируемости и дано его теоретическое обоснование. Следует заметить, что большинство работ, посвященных рассматриваемой предметной области и доступных автору, не содержат методов оценки структуры системы в общепринятом в теории идентификации смысле. Поэтому понятие СИ не отражает суть рассматриваемой проблемы. Так как эта терминология активно применяется в задачах оценки идентифицируемости, то в данном разделе будем придерживаться этой терминологии, чтобы продолжить анализ полученных результатов. В дальнейшем будет введено понятие, которое напрямую связано с СИ нелинейных систем в структурном пространстве. В работе [7] предложены критерии оценки ЛИ линеаризированной системы, ранг матрицы состояния которой должен быть равен m. Метод оценки ЛИ разработан для неоднородной линейной системы. Он основан на анализе характеристического показателя Ляпунова. В работе [8] вводится ряд критериев параметрической идентифицируемости, а также дается обобщение и развитие результатов, полученных в статье [7]. Условия полной идентифицируемости линейной стационарной системы по дискретным измерениям выхода и переменных состояния предложены в работах [9, 10].

Проблема IPI нелинейных систем исследовалась многими авторами (см. например, [9—12]). В работе [10] для исследования идентифицируемости применен анализ чувствительности системы по выходу. Эффективность данного подхода показана на примере исследования идентифицируемости комбинации параметров системы. Локальные условия параметрической идентифицируемости получены в работе [9] для различных вариантов измерения экспериментальных данных. Определены условия совместной наблюдаемости и идентифицируемости для линейной стационарной системы. Критический анализ подходов, применяемых для оценки идентифицируемости биологических моделей, дан в статье [11]. Модели для оценки идентифицируемости нелинейных систем основаны на применении ряда Тейлора, таблиц идентифицируемости, дифференциальной алгебры. Вопросам исследования практической идентифицируемости посвящена работа [12]. Оценка практической идентифицируемости основана на анализе экспериментальной информации и применении дифференциальной алгебры.

Вопросы СИ статической модели рассмотрены в работе [13]. Несмотря на то что изучается статическая система, ее СИ представляет определенный интерес в плане постановки задачи. Поэтому существующие трактовки и постановки задач СИ будет полезно сравнить. Здесь применяются методы для оценки ранга матрицы.

Анализ публикаций показывает, что идентифицируемость модели направлена на возможность оценки ее параметров. Предлагаемые методы основаны на оценке невырожденности информационной матрицы. Аналогичные результаты получены в теории параметрического оценивания, а условие невырожденности (полноты ранга) матрицы представлено в легко проверяемом условии предельной невырожденности входа и выхода системы. Как правило, структура модели задается априори, и поэтому не всегда понятно, какой смысл вкладывается в понятие структурной локальной идентифицируемости. Понятие "структура" широко применяется в задачах оценки идентифицируемости. Идентифицируемость нелинейной системы также сводится к задаче IPI на основе применения различных методов линеаризации модели по параметрам. Эта обширная область исследований не включает задачи СИ нелинейных динамических систем в следующем смысле: можно ли принять решение о структуре (форме, зависимости) нелинейной части системы в условиях неопределенности. Задача в таком виде не ставилась. Следует заметить, что сама по себе это очень сложная проблема, так как методы формализации структуры системы не разработаны до настоящего времени.

Понятие СИ (h-идентифицируемости) нелинейных систем было введено в работе [14]. Предлагаемый подход направлен на решение задачи оценки структуры нелинейной части динамической системы. Он основан на анализе специального класса структур, отражающих состояние нелинейной части системы. Ниже дается изложение и обобщение результатов, полученных в работах [14, 15]. Задача IP-идентифицируемости не рассматривается. Ее решения можно получить, применив рассмотренные выше подходы.

Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\dot{X} = AX + B_{\varphi}\varphi(y) + B_u u; \\ &y = C^{\mathrm{T}} X, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u \in R$, $y \in R$ — вход и выход системы; $A \in R^{q \times q}$, $B_u \in R^q$, $B_{\varphi} \in R^q$, $C \in R^q$ — матрицы соответствующих размерностей; $\varphi(y)$ — скалярная нелинейная функция. Матрица A является гурвицевой.

Относительно структуры функции $\chi = \varphi(y)$ могут делаться различные предположения [16, 17]. Они определяются уровнем априорной информации. Далее предполагается, что $\varphi(y)$ в системе (1) удовлетворяет секторному условию

$$\begin{aligned} &\chi \in \mathcal{F}_{\varphi} = \{\gamma_1\xi^2 \leqslant \varphi(\xi)\xi \leqslant \gamma_2\xi^2, \\ &\xi \neq 0,\ \varphi(0) = 0,\ \gamma_1 \geqslant 0, \gamma_2 < \infty\}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\xi \in R$ — комбинация элементов вектора X.

Пусть известно информационное множество для системы (1):

$$\mathrm{I}_o = \{u(t), y(t),\ t \in J = [t_0, t_k]\}. \tag{3}$$

Задача: оценить СИ нелинейной части системы (1) на основе анализа и обработки I_o.

Применение параметрических методов идентификации в условиях неопределенности не позволяет подойти к решению задачи СИ. Поэтому далее применяется подход, предложенный в работах [15, 16]. Он основан на переходе в специальное структурное пространство и построении структуры S_{ey}, отражающей свойства нелинейной части (1). Анализ S_{ey} связан с решением задачи СИ системы. Далее используется термин *h*-идентифицируемости (HI), чтобы излагаемый далее подход отличить от IP-идентифицируемости. Рассмотрим метод построения S_{ey}-структуры.

Метод построения S_{ey}-структуры

Построение S_{ey}-структуры требует предварительного формирования множества $\mathrm{I}_{N,\,g}$, содержащего информацию о функции $\varphi(y)$. Изложим способ получения $\mathrm{I}_{N,\,g}$, следуя работе [18].

Применим к $y(t)$ операцию дифференцирования и обозначим новую переменную x_1. Тогда получим расширение информационного множества системы: $\mathrm{I}_{ent} = \{\mathrm{I}_o,\ x_1\}$. Если переменные u, y измеряются с ошибкой, то к u, y следует применить процедуру фильтрации или сглаживания.

Выделим подмножество $\mathrm{I}_g \subset \mathrm{I}_{ent}$, соответствующее частному решению системы (1) (установившемуся состоянию). Множество $\mathrm{I}_g = \mathrm{I}_{ent} \backslash \mathrm{I}_{tr}$ не содержит данные I_{tr} о переходном процессе в системе. Применим математическую модель

$$\hat{x}_1^l(t) = H^{\mathrm{T}}[1\ u(t)\ y(t)]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

для выделения линейной составляющей в x_1. Переменная x_1 определена на интервале $J_g = J \backslash J_{tr}$. Здесь $H \in R^3$ — вектор параметров модели.

Найдем вектор H из решения задачи

$$\min_H Q(e)\Big|_{e=\hat{x}_1^l - x_1} \to H_{opt},$$

где $Q(e) = 0{,}5e^2$.

Определим прогноз для переменной x_1 на основе модели (4) и сформируем ошибку $e(t) = \hat{x}_1^l(t) - x_1(t)$. Ошибка $e(t)$ зависит от нелинейности $\varphi(y)$ в системе (1). Итак, получено множество $\mathrm{I}_{N,\,g} = \{y(t),\ e(t),\ t \in J_g\}$. Далее применяется обозначение $y(t)$ и полагается, что $y(t) \in \mathrm{I}_{N,\,g}$.

Замечание 1. Выбор структуры модели (4) является одним из этапов структурной идентификации системы (1). Результаты моделирования показывают, что модель (4) применима в системах идентификации объектов со статическими нелинейностями. Решение задачи выбора структуры модели (4) для более сложного класса нелинейностей дано в работе [14].

Применение фазового портрета S, описываемого функцией Γ:$\{y\} \to \{y'\}$, не всегда позволяет сделать заключение о нелинейных свойствах системы в условиях неопределенности. Поэтому рассмотрим множество $\mathrm{I}_{N,\,g}$ и перейдем в пространство $\mathcal{P}_{ye} = (y,\ e)$, которое будем называть структурным.

Рассмотрим функцию $\Gamma_{ey}: \{y\} \to \{e\}$, которая на плоскости $(y,\ e)$ описывает изменение структуры S_{ey}. Так как $\mathrm{I}_{N,\,g}$ содержит информацию о $\varphi(y)$, то S_{ey} будет в обобщенном виде описывать изменение нелинейной функции. Вход системы (1) должен удовлетворять определенным условиям для получения представления о $\varphi(y)$, а именно иметь свойство постоянства возбуждения (предельной невырожденности). Такой вход обеспечивает замкнутость структуры S_{ey}.

О необходимости оценки *h*-идентифицируемости нелинейной системы

Обзор работ по СИ показывает, что основное внимание уделяется проблеме IP-идентифицируемости. Чтобы понять актуальность задачи *h*-идентифицируемости, рассмотрим возникающие проблемы на примере системы (1) второго порядка со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix};\ B_u = B_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ y(0) = 3;\ y'(0) = 2;$$

$$\varphi(y) = \begin{cases} 2{,}2, & \text{если } (y - d > 2.2)\,\&\,(y' > 0); \\ y - d, & \text{если } (y - d \leqslant 2{,}2)\,\&\,(y' > 0); \\ 1{,}5, & \text{если } (y - d \leqslant 1{,}5)\,\&\,(y' > 0); \\ 2{,}2, & \text{если } (y > 2{,}2)\,\&\,(y' < 0); \\ y, & \text{если } (y \leqslant 2{,}2)\,\&\,(y' < 0); \\ 1{,}5, & \text{если } (y \leqslant 1{,}5)\,\&\,(y' < 0), \\ d = 1. & \end{cases}$$

Представленные ниже результаты основаны на применении подхода из раздела "Метод построения S_{ey}-структуры". Они показывают влияние входа $u(t)$ на нелинейные свойства системы (1). Свойства системы оцениваются на основе анализа структуры S_{ey} и восстановленной функции $\varphi(y)$, соответствующей входу $u(t)$.

На рис. 1 показаны фазовый портрет S и структура S_{ey} для случая $u_{6,\,-4}(t) = 6 - 4\sin(0{,}1\pi t)$, а также функция $\varphi(y)$, восстановленная по данным $\{y(t),\ y'(t)\}$. Рассматривается случай установившегося движения. Рис. 1 показывает, что $u_{6,\,-4}(t)$ дает эталонную функцию $\varphi(y)$.

Из рис. 1 видно, что структура S_{ey} является практически симметричной и имеет особенности, которые также присущи и структуре S.

Дальнейшее уменьшение амплитуды синусоиды приводит к потере свойства симметрии структурой S_{ey}. Следствием этого является невозможность восстановления вида функций $\varphi(y)$. На рис. 2 показан случай, когда $u_{6,\,-2}(t) = 6 - 2\sin(0{,}1\pi t)$. Из рис. 2 видно, что уменьшение амплитуды синусоиды приводит к сужению области определения структуры, причем левая часть подвергается более активным изменениям. Это приводит к тому, что область насыщения функции $\varphi_{6,\,-2}(t)$ снизу существенно сокращается. Эту область невозможно восстановить путем идентификации.

Еще более кардинальные изменения в $\varphi(y)$ появляются при $u_{6,\,-0,5}(t) = 6 - 0{,}5\sin(0{,}1\pi t)$. Вид функции $\varphi(y)$ и структур S, S_{ey} показан на рис. 3.

Анализ результатов моделирования показывает, что существует некоторая совокупность параметров входа $u(t)$, при которой возможна структурная идентификация нелинейной системы (структурная идентифицируемость). Для рассматриваемой системы с $\omega = 0{,}1\pi$ эти результаты представлены на рис. 4, где использованы следующие обозначения: D_y, D_e — диаметр области изменения y, e; a_u — амплитуда изменения синуса.

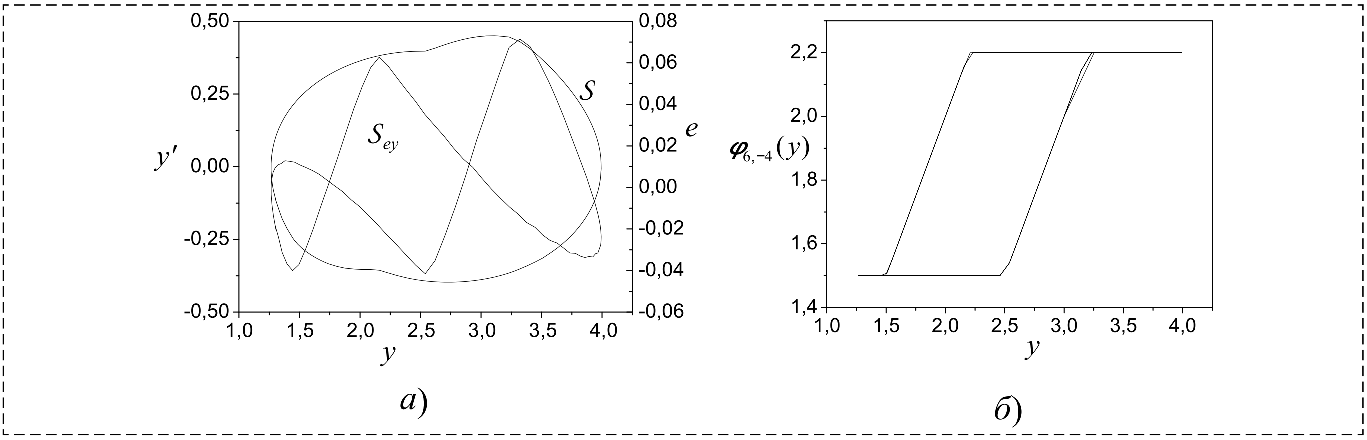

Рис. 1. Результаты оценки структуры для $u_{6,\,-4}(t)$:
а — структуры; *б* — нелинейность

Fig. 1. Framework estimation results for $u_{6,\,-4}(t)$:
a — structures; *б* — nonlinearity

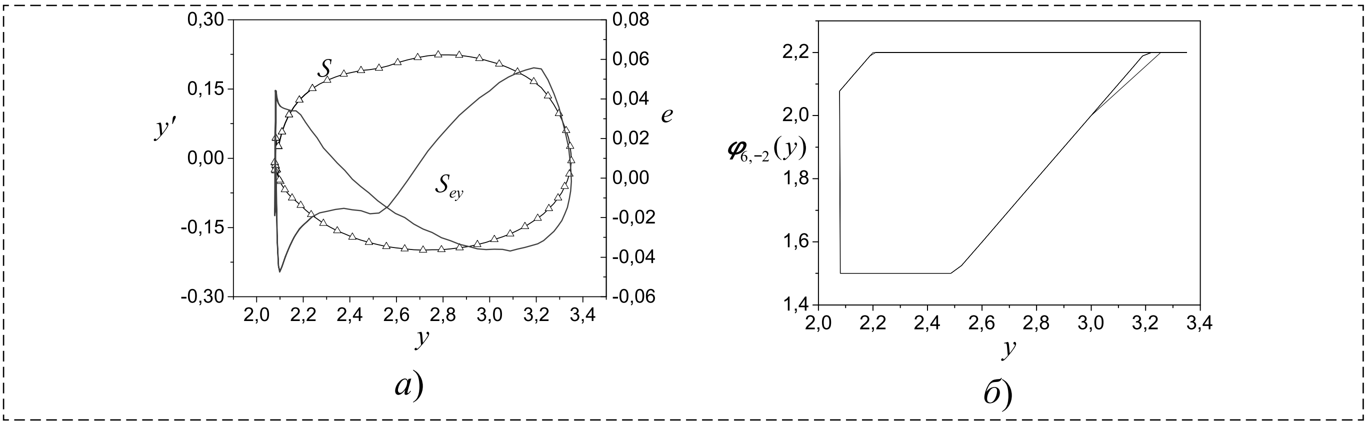

Рис. 2. Результаты оценки структуры для $u_{6,\,-2}(t)$:
а — структуры; *б* — нелинейность

Fig. 2. Framework estimation results for $u_{6,\,-2}(t)$:
a — structures; *б* — nonlinearity

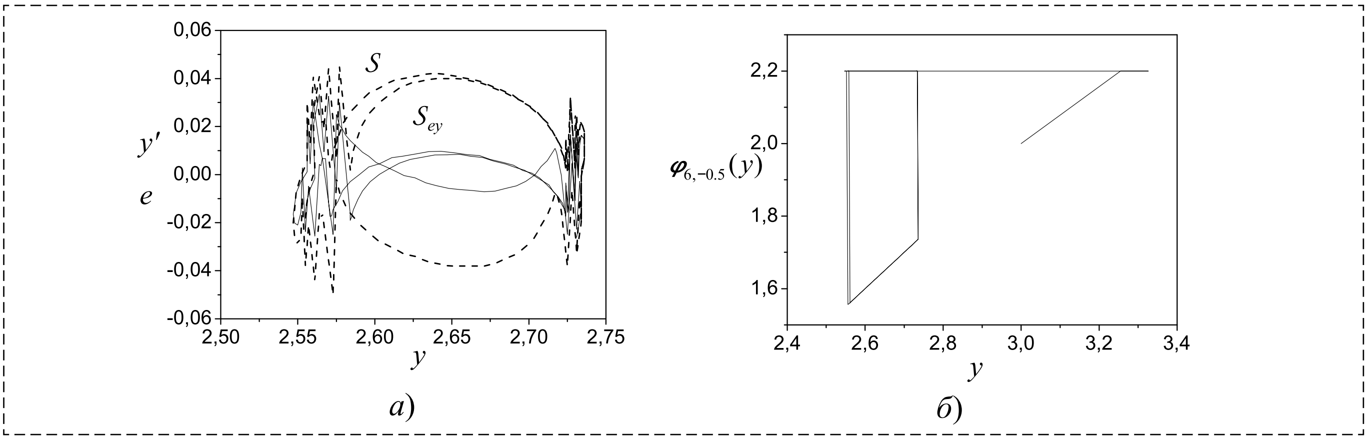

Рис. 3. Результаты оценки структуры для $u_{6,\,-0,5}(t)$:
а — структуры; *б* — нелинейность
Fig. 3. Framework estimation results for $u_{6,\,-0,5}(t)$:
a — structures; *б* — nonlinearity

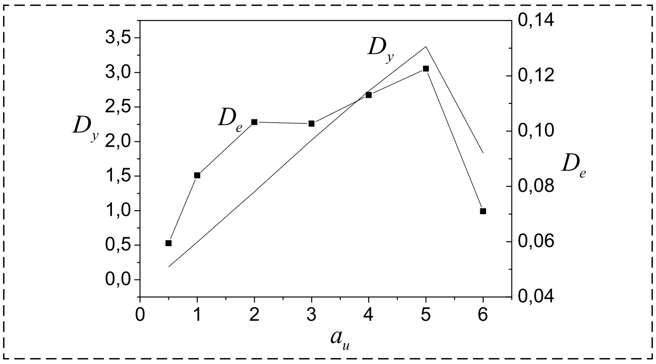

Рис. 4. Влияние входа на идентифицируемость системы (1)
Fig. 4. Effect of input on system (1) identifiability

Из рис. 4 видно, что для рассматриваемого случая существует вход (a_u = 5), который обеспечивает возможность СИ системы. Как следует из рис. 1, система (1) может быть идентифицируема и при a_u = 4. Заметим, что здесь рассматривался случай влияния только амплитуды входа. Аналогичным эффектом обладает и влияние частоты (рис. 5).

Замечание 2. Результаты моделирования показывают (рис. 5), что обеспечение требования постоянства возбуждения для *u*(*t*) может привести к невозможности решения задачи СИ (*h*-идентифицируемости). Как следует из представленных рисунков, так называемое требование постоянства возбуждения (частотного богатства) входа существенно различается в задачах структурной и параметрической идентификации. Это следует учитывать в задачах активной идентификации.

Результаты моделирования позволяют подойти к постановке проблемы *h*-идентифицируемости в следующем виде: найти такой вход

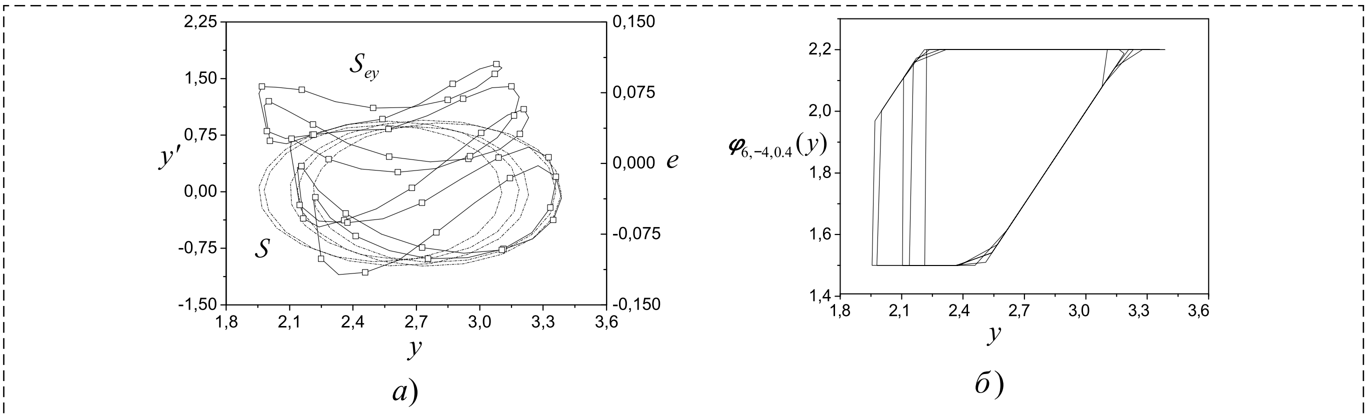

Рис. 5. Результаты оценки структуры для $u_{6,\,-4,\,0,4}(t)$:
а — структуры; *б* — нелинейность
Fig. 5. Framework estimation results for $u_{6,\,-4,\,0,4}(t)$:
a — structures; *б* — nonlinearity

$u(t)$ для системы (1), который обеспечивает максимум области определения выхода $y(t)$.

h-идентифицируемость

Результаты, полученные в разделе "О необходимости оценки h-идентифицируемости нелинейной системы", показывают, что подходы, применяемые для оценки IP-идентифицируемости, являются неприменимыми в случае оценки h-идентифицируемости. Ниже излагается метод оценки HI, предложенный в работе [18].

Прежде всего рассмотрим свойства множества $\mathrm{I}_{N,\ g}$, позволяющие решить задачу СИ, а следовательно, и h-идентифицируемости. Анализ $\mathrm{I}_{N,\ g}$ позволяет определить важные свойства информационного множества I_o, определяющие возможность дальнейшего рассмотрения изучаемой проблемы.

Пусть выполняются следующие условия.

B1. Исходное множество I_o дает решение задачи параметрической идентификации системы (1). Это значит, что вход $u(t)$ является постоянно возбуждаемым на интервале J.

B2. Вход $u(t)$ обеспечивает получение информативной структуры $S_{ey}(\mathrm{I}_{N,\ g})$. Это означает, что анализ S_{ey} дает решение задачи оценки нелинейных свойств системы (1).

Определение 1. Вход $u(t)$ будем называть представительным, если он удовлетворяет условиям B1, B2.

Пусть структура S_{ey} является замкнутой и ее площадь не равна нулю. Обозначим высоту S_{ey} через $h(S_{ey})$, где высота понимается как расстояние между двумя точками противоположных сторон структуры S_{ey}.

Утверждение 1 [18]. *Пусть: 1) линейная часть системы (1) является устойчивой, а нелинейность* $\varphi(y)$ *удовлетворяет условию (2); 2) вход* $u(t)$ *является ограниченным, кусочно-непрерывным и постоянно возбуждаемым; 3) существует такое* $\delta_S > 0$, *что* $h(S_{ey}) \geqslant \delta_S$. *Тогда структура* S_{ey} *является идентифицируемой на множестве* $\mathrm{I}_{N,\ g}$.

Определение 2. Структура S_{ey}, имеющая указанные свойства, является h-идентифицируемой.

Предположим, что S_{ey} является h-идентифицируемой.

Особенности понятия h-идентифицируемости:

1) h-идентифицируемость является понятием не параметрической, а структурной идентификации;

2) требование параметрической идентифицируемости является основой h-идентифицируемости;

3) h-идентифицируемость предъявляет более жесткие требования ко входу системы.

Особенность 3 означает, что "плохой" вход (см. раздел "О необходимости оценки h-идентифицируемости нелинейной системы") может удовлетворять условию постоянства возбуждения. Но такой вход может привести к получению так называемой незначимой S_{ey}-структуры ($\mathcal{NS}_{ey}$-структуры). Но при этом $\mathcal{NS}_{ey}$-структура может быть h-идентифицируемой. Идентификация нелинейности в условиях неопределенности на основе анализа $\mathcal{NS}_{ey}$-структуры может дать результаты, нетипичные для исследуемой системы.

Приведем условия существования $\mathcal{NS}_{ey}$-структуры. Рассмотрим класс нелинейных функций, к которым применима операция гомотетии. Гомотетия [19] представляет собой метод получения одной части геометрической фигуры из другой на основе ее поворота и растяжения около определенной точки на плоскости (y, e). Этот подход применим для нелинейностей, симметричных относительно некоторой точки или прямой.

Рассмотрим структуру S_{ey}. Пусть $S_{ey} = \mathcal{F}^l_{S_{ey}} \cup \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$, где $\mathcal{F}^l_{S_{ey}}, \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$ — левый и правый фрагменты S_{ey}. Определим для $\mathcal{F}^l_{S_{ey}}, \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$ секущие

$$\gamma^r_S = a^r y;\ \gamma^l_S = a^l y, \tag{5}$$

где a^l, a^r — числа, определяемые с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

Теорема 1 [14]. *Пусть: 1) структура* S_{ey} *является* h*-идентифицируемой и имеет вид* $S_{ey} = \mathcal{F}^l_{S_{ey}} \cup \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$, *где* $\mathcal{F}^l_{S_{ey}}, \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$ *— левый и правый фрагменты* S_{ey}; *2) секущие для* $\mathcal{F}^l_{S_{ey}}, \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$ *описываются уравнениями (5). Тогда* S_{ey} *является* $\mathcal{NS}_{ey}$*-структурой, если*

$$\big||a^l| - |a^r|\big| > \delta_h, \tag{6}$$

где $\delta_h > 0$ *— некоторое заданное число.*

Замечание 3. $\mathcal{NS}_{ey}$-структуры характерны для систем с многозначными нелинейностями. Они являются результатом неадекватного применения входных воздействий.

Рассмотрим структуру S_{ey}. Введем обозначения: $\mathcal{D}_y = \mathrm{dom}(S_{ey})$ — область определения S_{ey},

$D_y = D_y(\mathcal{D}_y) = \max_t y(t) - \min_t y(t)$ — диаметр $\mathcal{D}_y$. Пусть $u(t) \in$ U, где U — допустимое множество входов для системы (1).

Определение 3. Вход $u(t) \in$ U будем называть S-синхронизирующим систему (1), если на множестве $\{y(t),\ t \in J\}$ область определения $\mathcal{D}_y$ структуры S_{ey} имеет максимальный диаметр D_y.

Синхронизацию $u(t) \in$ U будем понимать как выбор такого входа $u_h(t) \in$ U, который позволяет отразить все особенности S_{ey}, характерные для $\varphi(y)$. Это возможно только в случае, когда $u(t)$ обеспечивает $\max_{u_h} D_y$. В отличие от понятия синхронизации, принятого в теории колебаний, здесь выбор свойств входа направлен на возможность получения структуры $S_{ey} \neq \mathcal{NS}_{ey}$. Так как такой подбор $u_h(t) \in$ U можно трактовать как синхронизацию между структурами модели и системы, то выполнение условия $\max_{u_h} D_y$ приводит к h-идентифицируемости системы. Требование обеспечения условия $\max_{u_h} D_y$ связано с рассматриваемым классом нелинейностей. Оно следует из анализа результатов, полученных в разделе "О необходимости оценки h-идентифицируемости нелинейной системы". В рассматриваемых условиях это один из доступных критериев принятия решения о СИ системы (1), который можно оценить на основе анализа структуры S_{ey}. Он вычисляется на основе анализа фрагментов $\mathcal{F}^l_{S_{ey}}, \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$.

Пусть вход $u_h(t)$ синхронизирует множество $\mathcal{D}_y$. Если $u(t)$ является S-синхронизирующим, то будем писать $u_h(t) \in$ S. Заметим, что для системы (1) существует конечное множество $\{u_h(t)\} \in$ S. Выбор оптимального $u_h(t)$ зависит от $d_{h,\ y}$. Обеспечение этого условия является одной из предпосылок СИ системы (1).

Определение 4. Структуру S_{ey} (систему (1)) будем называть структурно идентифицируемой или h_{δ_h}-идентифицируемой, если S_{ey} является h-идентифицируемой и выполняется условие $\|a^l| - |a^r\| \leqslant \delta_h$.

Из этого определения следует, что если система (1) h_{δ_h}-идентифицируема, то структура S_{ey} имеет максимальный диаметр области $\mathcal{D}_y$.

Пусть структура S содержит m особенностей. Под особенностями функции $\varphi(y)$ будем понимать как потерю непрерывности на интервале I_y^j, так и точки перегиба функции или экстремумы. Эти особенности являются признаками нелинейности исследуемой функции.

Определение 5. Модель (4) будем называть *SM*-идентифицирующей, если структура S_{ey} является h_{δ_h}-идентифицируемой.

Теорема 2 [15]. *Пусть: 1) вход u(t) является постоянно возбуждаемый и обеспечивает S-синхронизацию системы (1); 2) фазовый портрет S системы (1) содержит m особенностей; 3)* S_{ey}*-структура является* h_{δ_h}*-идентифицируемой и содержит фрагменты, соответствующие особенностям фазового портрета S. Тогда модель (4) является SM-идентифицируемой.*

Теорема 2 показывает, что если модель (4) не является *SM*-идентифицирующей, то необходимо менять структуру модели (4) или информационное множество для ее построения.

Рассмотрим структуру S_{ey}. Обозначим c_s — центр структуры S_{ey} на множестве $\mathrm{J}_y = \{y(t)\}$, а c_{D_y} — центр области $\mathcal{D}_y$.

Теорема 3. *Пусть на множестве* U *представительных входов u(t) системы (1): 1) существует такое* $\varepsilon \geqslant 0$*, что* $\left|c_S - c_{D_y}\right| \leqslant \varepsilon$*; 2) выполняется условие* $||a^l| - |a^r|| \leqslant \delta_h$*. Тогда система (1) является* h_{δ_h}*-идентифицируемой, а вход* $u_h(t) \in$ S.

Заметим, что может существовать некоторое подмножество $\{u_{h,\ i}(t)\} \subset U_h \subseteq$ U $(i \geqslant 1)$, элементы которого обладают свойством S-синхронизируемости. Каждому $u_{h,\ i}(t)$ соответствует структура $S_{ey,\ i}(u_{h,\ i})$ с диаметром $D_{y,\ i}$ области определения $\mathcal{D}_{y,\ i}$. Так как $u_{h,\ i}(t) \in$ S, то диаметры $D_{y,\ i}$ будут обладать свойством $d_{h,\ \Sigma}$-оптимальности. Пусть гипотетическая структура S_{ey} системы (1) имеет диаметр $d_{h,\ \Sigma}$.

Определение 6. Структура $S_{ey,\ i}$ обладает свойством $d_{h,\ \Sigma}$-оптимальности на множестве U_h, если существует такое $\varepsilon_\Sigma > 0$, что $|d_{h,\ \Sigma} - D_{y,\ i}| \leqslant \varepsilon_\Sigma$, $\forall i = \overline{1, \#\mathrm{U}_h}$, где # — мощность множества U_h.

Определение 7. Если существует подмножество входов $\{u_{h,\ i}(t)\} = \mathrm{U}_h \subset$ U $(i \geqslant 1)$, элементы которого $u_{h,\ i}(t) \in$ S, и соответствующие им структуры $S_{ey,\ i}(u_{h,\ i})$, обладающие свойством $d_{h,\ \Sigma}$-оптимальности, то структуры $S_{ey,\ i}(u_{h,\ i})$ являются неразличимыми на множествах $\{u_{h,\ i}(t)\}$, $J_y(u(t) = u_{h,\ i}(t))$.

Из определений 6, 7 следует, что в случае существования множества U_h оценку h_{δ_h}-идентифицируемости можно проводить по любому входу $u(t) \subset \mathrm{U}_h$.

Замечание 4. Здесь рассматривается случай симметричных нелинейностей. Поэтому остаются справедливыми сделанные выше замечания относительно $\mathcal{NS}_{ey}$-структуры. Если нелинейная функция не обладает свойством симметрии, то требуется дальнейшее исследование данной проблемы. Это связано с тем, что любая нелинейность имеет свои особенности, и их учет возможен только при имеющейся априорной информации о системе.

Перейдем теперь к методам оценки h_{δ_h}-идентифицируемости системы (1).

Подход к оценке h_{δ_h}-идентифицируемости

Рассмотрим задачу построения интегрального показателя, который позволял бы на основе обработки множества $\mathrm{I}_{N,\,g}$ принимать решение об h_{δ_h}-идентифицируемости системы (1). Он должен быть основан на анализе свойств структуры S_{ey}.

В нелинейной динамике и теории фракталов для оценки показателя размерности структуры применяются подходы, основанные на принципе покрытия [20]. Предложены различные виды размерности. Одним из простейших показателей является топологическая размерность. Она оценивает геометрию структуры и не всегда отражает ее внутренние особенности. Аттракторы и фракталы часто являются неоднородными. Неоднородность отражает неравномерность распределения точек по структуре (фракталу). Оценки неоднородности этих структур получают с помощью параметров, отражающих свойства системы. Причина неоднородности связана с разными вероятностями заполнения определенными объектами (телами) геометрически одинаковых элементов фрактала. Неоднородность в общем случае характеризует несоответствие между вероятностями заполнения фрактала заданными телами и геометрическими размерами соответствующих областей. Такие неоднородные фрактальные объекты называют мультифракталами [20]. S_{ey}-структуры динамических систем с многозначными нелинейностями являются примером неоднородных структур. Некоторые из неоднородных структур представлены в разделе "О необходимости оценки h-идентифицируемости нелинейной системы".

Различные показатели покрытия (корреляционная размерность, информационная размерность и т. п.) являются приближенными и трудоемкими [20]. Они не всегда дают оценку геометрического различия фрагментов структуры. Поэтому далее вводится интегральная характеристика структуры, которая представляет собой функцию распределения переменной e на множестве $\{y(t)\}$ [15]. Такой подход исключает различные априорные предположения относительно покрытия структуры локальными объектами. Суть предлагаемого подхода состоит в следующем.

Пусть для системы (1) получена структура S_{ey}. Выполним фрагментацию $S_{ey} = \mathcal{F}^l_{S_{ey}} \cup \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$, где $\mathcal{F}^l_{S_{ey}}, \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$ — левая и правая части структуры S_{ey}. Фрагменты $\mathcal{F}^l_{S_{ey}}, \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$ описываются функциями $e^l(y)$, $e^r(y)$, где $\{e^l\} \subseteq \{e\}$, $\{e^r\} \subseteq \{e\}$. Построим частотные функции распределения (гистограммы) $\mathcal{H}^l$, $\mathcal{H}^r$ для $\mathcal{F}^l_{S_{ey}}, \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$. Получим интегральные функции распределения $I\mathcal{H}^l$, $I\mathcal{H}^r$ на основе $\mathcal{H}^l$, $\mathcal{H}^r$. Пусть $\mathrm{I}_{\mathcal{H}} = \left\{i\Delta e,\ i = \overline{1,k}\right\}$ — область определения функций $\mathcal{H}^l$, $\mathcal{H}^r$. Представим область значений функций $I\mathcal{H}^l$, $I\mathcal{H}^r$ в виде векторов

$$L(I\mathcal{H}^l) = [I\mathcal{H}^l_1, I\mathcal{H}^l_2, \ldots, I\mathcal{H}^l_k]^{\mathrm{T}},$$
$$R(I\mathcal{H}^r) = [I\mathcal{H}^r_1, I\mathcal{H}^r_2, \ldots, I\mathcal{H}^r_k]^{\mathrm{T}}.$$

Здесь k — число карманов, заданных на $\mathrm{I}_{\mathcal{H}}$; Δe — величина кармана по e.

Применим модель

$$\widehat{R} = a_H L(I\mathcal{H}^l) \tag{7}$$

и определим параметр a_H с помощью МНК.

Модель является адекватной, если параметр $a_H \in O(1)$, где $O(1)$ — окрестность 1. Если условие $a_H \in O(1)$ справедливо, то система (1) является h_{δ_h}-идентифицируемой и $s_{ey} \neq \mathcal{N}S_{ey}$. Иначе структура S_{ey} является незначимой.

Итак, справедливо утверждение.

Утверждение 2. *Пусть для системы (1): 1) структура $S_{ey} = \mathcal{F}^l_{S_{ey}} \cup \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$, где $\mathcal{F}^l_{S_{ey}}, \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$ — фрагменты структуры S_{ey}, определенные на множестве $\{y(t)\}$; 2) известны частотные $\mathcal{H}^l$, $\mathcal{H}^r$ и интегральные $I\mathcal{H}^l$, $I\mathcal{H}^r$ функции распределения для $\mathcal{F}^l_{S_{ey}}, \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$; 3) зависимость между $R(I\mathcal{H}^l)$ и $L(I\mathcal{H}^l)$ имеет вид (7). Тогда система (1) является h_{δ_h}-идентифицируемой, если $a_H \in O(1)$.*

Определение 8. Если система (1) является h_{δ_h}-идентифицируемой, то структура S_{ey} имеет размерность $DH_h = a_H$.

Определение 8 показывает: если $u(t) \in S$, то размерность структурно идентифицируемой системы близка к 1. Такое значение DH_h означает, что структура S_{ey} не имеет сложных участков и фрагменты $\mathcal{F}^l_{S_{ey}}, \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$ являются структурно идентичными или гомотетными. Если $DH_h \notin O(1)$, то это признак наличия $\mathcal{H}S_{ey}$-структуры или системы с более сложной формой нелинейности.

Результаты, полученные на основе утверждения 2, можно дополнить гистограммным анализом структуры S_{ey}. Для этого следует получить характеристики функций $\mathcal{H}^l$, $\mathcal{H}^r$ и $I\mathcal{H}^l$, $I\mathcal{H}^r$ и проанализировать их связи на основе учета особенностей S_{ey}. Некоторые подходы предложены в работах [14, 15].

Примеры

Рассмотрим систему из раздела "О необходимости оценки h-идентифицируемости нелинейной системы" с входом $u_N(t) = 6 - 4\sin(0,5\pi t) + 0,4\sin(0,1\pi t)$. Структуры S, S_{ey} для установившегося состояния системы показаны на рис. 5. Из рис. 5 видно, что условия теоремы 3 не выполняются. Сектор, которому принадлежит функция $f_e = e(y)$, не существует для S_{ey}. Поэтому система является не S-синхронизируемой и $S_{ey} = \mathcal{N}S_{ey}$. Следовательно, система не h-идентифицируема.

Пусть $u(t) = 6 - 2\sin(0,1\pi t)$. Система имеет структуры, показанные на рис. 2. Построим сегменты $\mathcal{F}^l_{S_{ey}}, \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$ структуры S_{ey}. Это можно сделать на основе рис. 2. Секущие для $\mathcal{F}^l_{S_{ey}}, \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma^l_S &= -0,0359y + 0,0792; \\ \gamma^r_S &= 0,0211y - 0,0649. \end{aligned} \tag{8}$$

Применение теоремы 1 показывает, что $S_{ey} = \mathcal{N}S_{ey}$, т. е. система не h-неидентифицируема. Этот вывод подтверждают значения диаметров: $D_{\mathcal{F}^l_S} = 0,478$, $D_{\mathcal{F}^r_S} = 0,792$. Результаты оценки h-идентифицируемости системы на основе утверждения 2 показаны на рис. 6. Модель (7) имеет вид

$$\widehat{R} = 26 + 0,656L(I\mathcal{H}^l). \tag{9}$$

Адекватность модели (9) равна 97 %, а размерность структуры S_{ey} — 0,65. Результаты анализа показывают, что система (1) с входом $u(t) = u_{6,\,-4}(t)$ является структурно неидентифицируемой.

Рассмотрим систему из раздела "О необходимости оценки h-идентифицируемости нелинейной системы" с $u(t) = u_{6,\,-4}(t) = 6 - 4\sin(0,1\pi t)$. Соответствующие структуры показаны на

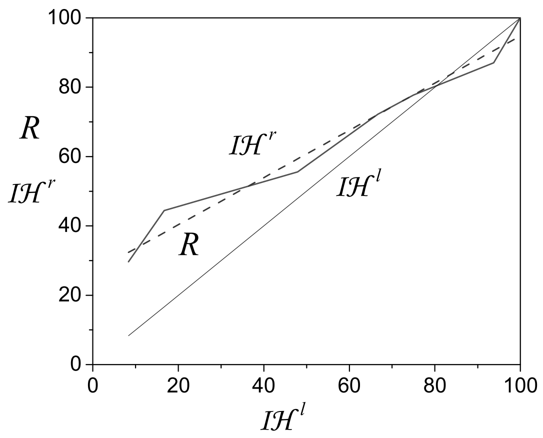

Рис. 6. Оценка *h*-идентифицируемости системы на основе интегральной функции распределения фрагментов

Fig. 6. Estimation *h*-identifiability of system on basis cumulative frequency function of fragments

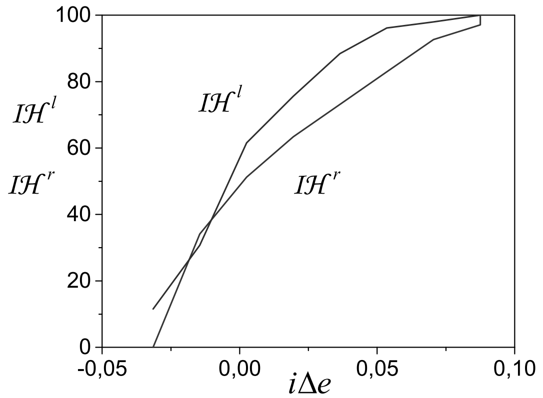

Рис. 7. Функции $I\mathcal{H}^l$, $I\mathcal{H}^r$

Fig. 7. Functions $I\mathcal{H}^l$, $I\mathcal{H}^r$

рис. 1. Из рис. 1 следует, что структура S_{ey} имеет некоторую несимметричность, что объясняется характеристиками нелинейной функции (рис. 1, *б*). Получены параметры секущих (5) для фрагментов $\mathcal{F}^l_{S_{ey}}, \mathcal{F}^r_{S_{ey}}$: $a^l = -0,025$, $a^r = -0,027$. Пусть $\delta_h = 0,003$. Условие (6) не выполнятся и, следовательно, $S_{ey} \neq \mathcal{N}S_{ey}$.

Чтобы подтвердить этот вывод, определим функции $I\mathcal{H}^l$, $I\mathcal{H}^r$. Они показаны на рис. 7, а результаты оценки размерности S_{ey}-структуры представлены на рис. 8.

Модель (7) имеет вид $\widehat{R} = -5,845 + 0,96L(I\mathcal{H}^l)$, а коэффициент детерминации равен 96 %. Условия утверждения 2 выполняются, и система является h_{δ_h}-идентифицируемой. Размерность DH_h структуры S_{ey} равна 0,96. Диаметры левого и правого фрагментов структуры S_{ey} равны: $D_{\mathcal{F}^l_S} = 1,16$, $D_{\mathcal{F}^r_S} = 1,43$. Диаметр S_{ey} равен 2,59. Это значение совпадает с $D_{\mathcal{F}^l_S} + D_{\mathcal{F}^r_S}$. Если вы-

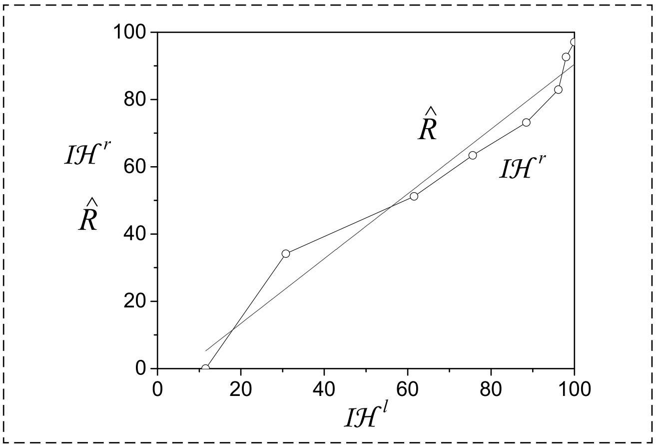

Рис. 8. Оценка *h*-идентифицируемости системы с $u_{6,\,-4}(t)$
Fig. 8. Estimation of system *h*-identifiability with $u_{6,\,-4}(t)$

брать $\varepsilon_{\mathcal{F}} = 0{,}4$, то условие $\left|D_{\mathcal{F}_S^l}(\mathcal{D}_{\mathcal{F}_S^l}) - D_{\mathcal{F}_S^r}(\mathcal{D}_{\mathcal{F}_S^r})\right| \leqslant$ $\leqslant \varepsilon_{\mathcal{F}}$ будет выполняться. Различие между областями определения фрагментов $\mathcal{F}_{S_{ey}}^l, \mathcal{F}_{S_{ey}}^r$ зависит на свойств S_{ey}. Условие 2 теоремы 3 выполняется с $\varepsilon = 0$. Поэтому система является СИ или h_{δ_h}-идентифицируемой с $u_{6,\,-4}(t)$, а $u_{6,\,-4}(t) \in$ S.

Заключение

Предложен подход к анализу СИ нелинейных динамических систем в условиях неопределенности. Данный подход имеет отличие от методов, применяемых для оценки СИ динамических систем в параметрическом пространстве. СИ трактуется как возможность структурной идентификации нелинейной части системы. Вход должен удовлетворять условию постоянства возбуждения в задачах СИ. Это условие отличается от требований к входам в адаптивных системах. Показано, что вход должен иметь свойство синхронизации (S-синхронизируемости) для решения задачи СИ. Оценка СИ основана на анализе специального класса структур S_{ey}, поэтому синхронизация должна давать максимальное значение области определения структуры. Показано, что несинхронизируемый вход приводит к получению незначимой структуры, которая не дает решение задачи структурной идентификации, следовательно, система не является структурно идентифицируемой. Получены условия, при которых возможно оценить структурную идентифицируемость системы. Выделено подмножество входов, обладающих свойством S-синхронизируемости, на которых структуры S_{ey} являются неразличимыми.

Список литературы

1. **Калман Р. Е.** Об общей теории систем управления // Теория дискретных оптимальных и самонастраивающихся систем. Труды I Межд. конгресса ИФАК. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР. 1961. С. 521—647.
2. **Ли Р.** Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М.: Наука, 1966. 177 с.
3. **Elgerd O. I.** Control systems theory. New York: McGraw-Hill, 1967. 562 p.
4. **Walter E.** Identifiability of state space models. Berlin. Germany: Springer-Verlag, 1982. 197 p.
5. **Audoly S., D'Angio L., Saccomany M. P., Cobelli C.** Global identifiability of linear compartmental models — a computer algebra algorithm // IEEE Trans. Automat. Contr. 1998. Vol. 45. P. 36—47.
6. **Авдеенко Т. В.** Идентификация линейных динамических систем с использованием концепции сепараторов параметрического пространства // Автоматика и программная инженерия. 2013. № 1(3). С. 16—23.
7. **Бодунов Н. А.** Введение в теорию локальной параметрической идентифицируемости // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2012. № 2. 137 с.
8. **Балонин Н. А.** Теоремы идентифицируемости. СПб.: Изд-во "Политехника", 2010. 48 с.
9. **Справочник** по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
10. **Stigter J. D., Peeters R. L.M.** On a geometric approach to the structural identifiability problem and its application in a water quality case study // Proceedings of the European Control Conference 2007 Kos, Greece, July 2-5, 2007. P. 3450—3456.
11. **Chis O.-T., Banga J. R., Balsa-Canto E.** Structural identifiability of systems biology models: a critical comparison of methods // PLOS ONE. 2011. Vol. 6. Is. 4. P. 1—16.
12. **Saccomani M. P., Thomaseth K.** Structural vs practical identifiability of nonlinear differential equation models in systems biology. Bringing mathematics to life // Dynamics of mathematical models in biology. Ed. A. Rogato, V. Zazzu, M. Guarracino. Springer. 2010. P. 31—42.
13. **Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.** Прикладная статистика: Исследование зависимостей: Справ. изд. / Под ред. С. А. Айвазяна. М.: Финансы и статистика, 1985. 487 с.
14. **Karabutov N.** Structural identification of dynamic systems with hysteresis // International journal of intelligent systems and applications. 2016. Vol. 8. No. 7. P. 1—13.
15. **Karabutov N.** Structural methods of design identification systems // Nonlinearity problems, solutions and applications. Vol. 1. Ed. L. A. Uvarova, A. B. Nadykto, A. V. Latyshev. New York: Nova Science Publishers, Inc. 2017. P. 233—274.
16. **Казаков И. Е., Доступов Б. Г.** Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1962. 278 с.
17. **Фурасов В. Д.** Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977. 248 с.
18. **Karabutov N.** Structural identification of nonlinear dynamic systems // International journal of intelligent systems and applications. 2015. Vol. 7. No. 9. P. 1—11.
19. **Choquet G.** L'enseignement de la geometrie. Paris: Hermann, 1964, 173 c.
20. **Божокин С. В., Паршин Д. А.** Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 128 с.

Structural Identifiability of Nonlinear Dynamic Systems

N. N. Karabutov, kn22@yandex.ru
MIREA — Russian Technological University, Moscow, 119454, Russian Federation

Corresponding author: **Karabutov Nikolay N.,** DTS, Professor,
MIREA — Russian Technological University 119454Moscow, Russian Federation,
e-mail: kn22@yande.ru

Accepted on October 24, 2018

Abstract

Approach to the analysis of nonlinear dynamic systems structural identifiability (SI) under uncertainty is proposed. This approach has difference from methods applied to SI estimation of dynamic systems in the parametrical space. Structural identifiability is interpreted as of the structural identification possibility a system nonlinear part. We show that the input should synchronize the system for the SI problem solution. The S-synchronizability concept of a system is introduced. An unsynchronized input gives an insignificant framework which does not guarantee the structural identification problem solution. It results in structural not identifiability of a system. The subset of the synchronizing inputs on which systems are indiscernible is selected. The structural identifiability estimation method is based on the analysis of framework special class. The structural identifiability estimation method is proposed for systems with symmetric nonlinearities. The input parameter effect is studied on the possibility of the system SI estimation. It is showed that requirements of an excitation constancy to an input in adaptive systems and SI systems differ.

Keywords: *framework, nonlinear dynamic system, phase portrait, structural identification, nonlinearity, synchronizability*

For citation:

Karabutov N. N. Structural Identifiability of Nonlinear Dynamic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2019, vol. 20, no. 4, pp. 195—205.

DOI: 10.17587/mau.20.195-205

References

1. **Kalman R. E.** On the general theory of control systems. *Proceeding first IFAC Congress on Automatic Control.* Moscow, 1960; Butterworths, London. 1961. Vol. 1. P. 481—492 (in Russian).

2. **Lee R. C. K.** *Optimal estimation, identification, and control.* Cambridge, Mass: MIT Press, 1964. 340 p.

3. **Elgerd O. I.** *Control Systems Theory.* N. Y.: McGraw-Hill, 1967. 660 p.

4. **Walter E.** *Identifiability of state space models.* Berlin Germany: Springer-Verlag, 1982. 216 p.

5. **Audoly S., D'Angio L., Saccomany M. P., Cobelli C.** Global identifiability of linear compartmental models a computer algebra algorithm. *IEEE Trans. Automat. Contr.,* 1998, vol. 45, pp. 36—47.

6. **Avdeenko T. V.** Identificatsiya lineynih dinamicheskih system s ispolsovaniem contsepcii separatorov parametpichskogo prostranstva (Identification of linear dynamic systems with use parametrical space separators). *Automatics and program* engineering, 2013, no. 1(3), p. 16—23 (in Russian).

7. **Bodunov N. A.** Vvedenie v teoriu lokalnoi parametpichskoi identificiruemosti (Introduction to the theory of local parametrical identifiability). *Differential equations and management processes*, 2012, no. 2, 137 p. (in Russian).

8. **Balonin N. A.** *Teoriya identificiruemosti (Theorems of identifiability).* St. Petersburg: Politekhnika publishing house, 2010, 48 p. (in Russian).

9. *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya* (Reference book on automatic control theory). Ed. A. A. Krasovsky. Moscow: Nauka, 1987, 712 p. (in Russian).

10. **Stigter J. D., Peeters R. L. M.** On a geometric approach to the structural identifiability problem and its application in a water quality case study. *Proceedings of the European Control Conference 2007 Kos, Greece, July 2-5, 2007*, pp. 3450—3456.

11. **Chis O.-T., Banga J. R., Balsa-Canto E.** Structural identifiability of systems biology models: a critical comparison of methods, *PLOS ONE*, 2011, vol. 6, is. 4, pp. 1—16.

12. **Saccomani M. P., Thomaseth K.** Structural vs practical identifiability of nonlinear differential equation models in systems biology. *Bringing mathematics to life, in Dynamics of mathematical models in biology*, Ed. A. Rogato, V. Zazzu, M. Guarracino. Springer. 2010, pp. 31—42.

13. **Aivazyan S. A., Yenyukov I. S., Meshalkin L. D.** *Prikladnaya statistika* (Applied statistics. Study of relationships). Moscow: Finansy i statistika, 1985 (in Russian).

14. **Karabutov N.** Structural identification of dynamic systems with hysteresis. *International journal of intelligent systems and applications*, 2016, vol. 8, no. 7, pp. 1—13.

15. **Karabutov N. N.** Structural methods of design identification systems. *Nonlinearity problems, solutions and applications. Volume 1. Ed. L. A. Uvarova, A. B. Nadykto, A. V. Latyshev.* New York: Nova Science Publishers, Inc, 2017. pp. 233—274.

16. **Kazakov Y. E., Dostupov B. G.** *Statisticheskaya dinamika nelineinich avtomaticheskich system* (Statistical dynamics of nonlinear automatic systems). Moscow: Fizmatgis, 1962, 278 p. (in Russian).

17. **Furasov V. D.** *Ustoichovost dvizeniya ozenki i stabilizaciya* (Stability of motion, estimation and stabilization). Moscow: Nauka, 1977, 248 p. (in Russian).

18. **Karabutov N.** Structural identification of nonlinear dynamic systems. *International journal of intelligent systems and applications*, 2015, vol. 7, no. 9, pp. 1—11.

19. **Choquet G.** L'enseignement de la geometrie. Paris: Hermann, 173 p., 1964.

20. **Bozhokin S. V., Parshin D. A.** *Fraktali i multifraktali* (Fractals and Multifractals). Moscow-Izhevsk: Scientific Publishing Centre \"Regular and Chaotic Dynamics\", 2001, 128 p. (in Russian).