УДК 531.36; 62-50 DOI: 10.17587/mau.19.147-152

В. И. Воротников, д-р физ.-мат. наук, проф., vorotnikov-vi@rambler.ru,
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург,
Ю. Г. Мартышенко, канд. физ.-мат. наук, доц., j-mart@mail.ru,
Российский государственный университет нефти и газа, г. Москва

К задаче устойчивости по вероятности "частичных" положений равновесия нелинейных стохастических систем

Рассматривается общий класс нелинейных стохастических систем дифференциальных уравнений в форме Ито, допускающих "частичное" (по части переменных) нулевое положение равновесия. В контексте метода функций Ляпунова получены условия устойчивости по вероятности данного положения равновесия по отношению не ко всем определяющим его переменным, а к их заданной части. Наряду с основной функцией Ляпунова рассматривается дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная функция для корректировки области, в которой строится основная функция Ляпунова. Обсуждается вопрос унификации исследований частичной устойчивости стационарных и нестационарных стохастических систем.

Ключевые слова: *стохастическая система в форме Ито, частичная устойчивость по вероятности, метод функций Ляпунова*

Введение

Начиная с работ французского физика П. Ланжевена, стохастические системы дифференциальных уравнений широко применяются при моделировании процессов (в том числе и управляемых), подверженных воздействию случайных факторов [1—3].

Сначала в основном исследовались системы дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) + \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x})\xi(t) \qquad (1)$$

в конечномерном евклидовом пространстве с минимальными требованиями к случайному процессу $\xi(t)$. Однако если предположить, что система (1) сохраняет такое фундаментальное свойство "укороченной" системы дифференциальных уравнений $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$, как отсутствие последействия, то случайный процесс $\xi(t)$ необходимо считать белым шумом. Поскольку указанное предположение достаточно реалистично, то модели с белыми шумами относятся к часто используемым. Если $\xi(t)$ — "физический" белый шум, когда компоненты вектора $\xi(t)$ являются нормальными случайными процессами с конечным временем корреляции, пренебрежимо малым в масштабе времени, принятом для "укороченной" системы, то такая нестрогая модель получила название системы уравнений Ланжевена.

Модель Ланжевена приобретает строгий математический смысл при замене физического белого шума абстрактным. Такая замена не является однозначной. Наибольшее распространение получили стохастические системы дифференциальных уравнений К. Ито и Р. Л. Стратоновича. Стохастические уравнения Стратоновича более адекватно описывают физические явления, в то время как уравнения Ито более удобны с точки зрения математического анализа. Связь между данными формами стохастических уравнений, позволяющая перейти от одной формы уравнений к другой, дает конструктивную схему анализа динамических моделей, содержащих случайные процессы: построение моделей Ланжевена и, на их базе, стохастических моделей Стратоновича, с последующим переходом к более удобным для математических исследований моделям стохастических систем дифференциальных уравнений Ито.

Разработка подходов к исследованию устойчивости стохастических систем началась во второй половине XX столетия. Как и в случае детерминированных систем, при этом использовался метод функций Ляпунова в соответствующей модификации. Первоначально результаты выражались либо в терминах существования функций Ляпунова, для которых математические ожидания производных в силу системы дифференциальных уравнений являются неотрицательными, либо в терминах существования функций Ляпунова для "укороченной" системы. Однако для вычисления математических ожиданий производных требуется знание оценок решений исходной системы, а получаемые результаты на основе анализа "укороченной" системы являются слишком грубыми [1]. Более конструктивной оказалась идея И. Я. Каца и Н. Н. Красовского [4] использования усредненной производной V-функции, предложенная для изучения стохастических систем дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \eta(t)), \tag{2}$$

где $\eta(t)$ — однородная марковская цепь с конечным числом состояний. В этом случае для вычисления производной V-функции достаточно знать лишь правую часть системы (2) и вероятностные характеристики случайного процесса. Данный подход в значительной степени предопределил последующие исследования устойчивости стохастических систем дифференциальных уравнений Ито [1, 2], решения которых являются непрерывными марковскими процессами. Более того, оказалось возможным исследование устойчивости и более общих стохастических систем, совмещающих свойства систем указанных типов, включая системы, где в момент скачкообразного изменения марковской цепи $\eta(t)$ решение также может меняться скачком (случайным или неслучайным образом) [3, 5].

В данной статье рассматривается общий класс нелинейных стохастических систем дифференциальных уравнений в форме Ито, допускающих "частичное" (по некоторой части переменных) нулевое положение равновесия. Устойчивость данного положения равновесия, в свою очередь, анализируется также по отношению не ко всем определяющим его переменным, а только к их заданной части. При этом делается допущение о том, что начальные возмущения переменных, не определяющих "частичное" положение равновесия, могут быть большими (принадлежащими произвольному компактному множеству) по одной части и произвольными по оставшейся части этих переменных. Ранее такая задача рассматривалась для детерминированных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью [6—8], функционально-дифференциальных систем с последействием [9], а также для дискретных (конечно-разностных) систем [10].

Для решения поставленной задачи частичной устойчивости применяется стохастический вариант метода функций Ляпунова в соответствующей модификации. Получены условия частичной устойчивости указанного вида, обобщающие известные результаты. На основе предложенной в статье постановки задачи частичной устойчивости также обсуждается вопрос унификации исследований частичной устойчивости стационарных и нестационарных стохастических систем.

Обзор проблемы частичной устойчивости динамических систем можно найти в работе [11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное действительное конечномерное пространство векторов $\mathbf{x}$ со стандартной евклидовой нормой $\|\mathbf{x}\|$. Введем разбиение $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ ($^{\mathrm{T}}$ обозначает транспонирование).

Пусть дана нелинейная система стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито [1—3]

$$d\mathbf{x} = \mathbf{X}(t,\mathbf{x})dt + \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\sigma}_k(t,\mathbf{x})dw_k(t),$$

которую с учетом сделанного разбиения $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ представим в виде двух групп дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\mathbf{y} &= \mathbf{Y}(t,\mathbf{y},\mathbf{z})dt + \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}k}(t,\mathbf{y},\mathbf{z})dw_k(t); \\ d\mathbf{z} &= \mathbf{Z}(t,\mathbf{y},\mathbf{z})dt + \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{z}k}(t,\mathbf{y},\mathbf{z})dw_k(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Вектор-функции $\mathbf{X} = (\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{Z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\sigma}_k = (\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}k}{}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{z}k}{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, определяющие правые части системы (3), непрерывны по t, $\mathbf{x}$ в области $t \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\| < \infty$; w_k — независимые одномерные винеровские процессы.

Если имеют место условия $\mathbf{Y}(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}k}(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv \mathbf{0}$, то множество $M = \{\mathbf{x}\colon \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$ является "частичным" положением равновесия системы (3). Имея в виду анализ устойчивости положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ по отношению не ко всем определяющим его переменным, а только к их некоторой части, предположим также, что $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Будем считать, что вектор-функции $\mathbf{X}$, $\boldsymbol{\sigma}_k$ равномерно по t удовлетворяют локальным условиям Коши—Липшица: для всякого числа $h > 0$ существует постоянная $K(h) > 0$ такая, что при $t \geqslant t_0$, $\|\mathbf{x}\| \leqslant h$ имеют место неравенства

$$\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x}') - \mathbf{X}(t, \mathbf{x}'')\| \leqslant K\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|,$$
$$\|\boldsymbol{\sigma}_k(t, \mathbf{x}') - \boldsymbol{\sigma}_k(t, \mathbf{x}'')\| \leqslant K\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|.$$

Тогда для любых $t_0 \geqslant 0$, $\mathbf{x}_0$ существует единственный непрерывный почти наверное марковский процесс $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)$, являющийся решением (сильным) стохастической системы (3), а "частичное" положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ является инвариантным множеством этой системы. Продолжимость при всех $t \geqslant t_0$ указанных решений гарантируют условия "линейного роста": существует постоянная $M > 0$ такая, что $\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x})\| \leqslant M(1 + \|\mathbf{x}\|)$, $\|\boldsymbol{\sigma}_k(t, \mathbf{x})\| \leqslant M(1 + \|\mathbf{x}\|)$ при $t \geqslant t_0$, $\|\mathbf{x}\| < \infty$.

Представим компоненту $\mathbf{z}$ вектора $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}})$ и обозначим D_δ область значений $\mathbf{x}_0$

таких, что $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_{10}\| \leqslant L$, $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$. Случайный процесс $\mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)$ будем рассматривать на вероятностном пространстве [1—3], с вероятностной мерой $\mathbf{P}$.

Определения. "Частичное" положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (3) *при больших значениях* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$:

1) $\mathbf{y}_1$-*устойчиво по вероятности* (устойчиво по вероятности по отношению к $\mathbf{y}_1$), если для каждого $t_0 \geqslant 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon,\ \gamma,\ L,\ t_0) > 0$ такое, что

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\ \geqslant\ t_0} \|\mathbf{y}_1(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)\| > \varepsilon\} < \gamma \tag{4}$$

для всех $t \geqslant t_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$;

2) *равномерно* $\mathbf{y}_1$-*устойчиво*, если $\delta = \delta(\varepsilon,\ \gamma,\ L)$.

2. Условия частичной устойчивости по вероятности

Введем V-функции, $V(t,\ \mathbf{0}) \equiv 0$, являющиеся в области $G = \{t \geqslant 0,\ \|\mathbf{y}_1\| < h,\ \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty\}$ дважды непрерывно дифференцируемыми по $\mathbf{x}$ и один раз по t. Обозначим $\mathbf{L}V$ — дифференциальный производящий оператор V-функции в силу системы дифференциальных уравнений (3) ($\langle\cdot\rangle$ — знак скалярного произведения векторов) [1—3]:

$$\mathbf{L}V = \frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \right\rangle + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\left(\left\langle \boldsymbol{\sigma}_k^{\mathrm{T}}(t, \mathbf{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle\right)^2 V,$$

являющийся стохастическим аналогом производной V-функции в силу детерминированной системы дифференциальных уравнений.

Для нахождения условий частичной устойчивости также рассмотрим: 1) вспомогательные скалярные функции $V^*(t,\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}_1)$, $V^*(\mathbf{y},\ \mathbf{z}_1)$ и вектор-функцию $\boldsymbol{\mu}(t,\ \mathbf{x})$, непрерывные в области G; 2) непрерывную монотонно возрастающую по $r > 0$ скалярную функцию $a(r)$, $a(0) = 0$.

Теорема 1. *Допустим, что для системы* (3), *наряду со скалярной V-функцией, можно указать векторную функцию* $\boldsymbol{\mu}(t,\ \mathbf{x})$, $\boldsymbol{\mu}(t,\ \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, *причем для данных функций в области*

$$t \geqslant 0,\ \|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(t,\ \mathbf{x})\| < h_1 < h,\ \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty \tag{5}$$

выполняются условия:

$$V(t,\ \mathbf{x}) \geqslant a(\|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(t,\ \mathbf{x})\|), \tag{6}$$

$$V(t,\ \mathbf{x}) \leqslant V^*(t,\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}_1),\ V^*(t,\ \mathbf{0},\ \mathbf{z}_1) \equiv 0; \tag{7}$$

$$\mathbf{L}V(t,\ \mathbf{x}) \leqslant 0. \tag{8}$$

Тогда "частичное" положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы* (3) $\mathbf{y}_1$-*устойчиво по вероятности при больших значениях* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$.

Доказательство. Возьмем произвольное ε ($0 < \varepsilon < h_1$), произвольный момент времени t_0, а также начальную точку $\mathbf{x}_0$ из области $D_\varepsilon = \{\|\mathbf{y}_0\| < \varepsilon,\ \|\mathbf{z}_{10}\| \leqslant L,\ \|\mathbf{z}_{20}\| < \infty\}$. Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)$ ($t \geqslant t_0$) системы дифференциальных уравнений (3) и обозначим τ_ε момент первого достижения процессом $\mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)$ поверхности $\|\mathbf{y}_1\| = \varepsilon$. Если некоторые траектории этого процесса ни за какое конечное время не достигают поверхности $\|\mathbf{y}_1\| = \varepsilon$, то для них τ_ε считаем равным ∞. Положим $\tau_\varepsilon(t) = \min(\tau_\varepsilon,\ t)$.

На основании теории марковских процессов [1] имеем равенство ($\mathbf{E}$ — знак математического ожидания)

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}[V(\tau_\varepsilon(t),\ \mathbf{x}(\tau_\varepsilon(t);\ t_0, \mathbf{x}_0)) - V(t_0, \mathbf{x}_0)] = \\ &= \mathbf{E}\int_{t_0}^{\tau_\varepsilon(t)} \mathbf{L}V(s,\ \mathbf{x}(s;\ t_0, \mathbf{x}_0))ds. \end{aligned} \tag{9}$$

Поэтому из равенства (9) на основании условия (8) следует, что

$$\mathbf{E}[V(\tau_\varepsilon(t),\ \mathbf{x}(\tau_\varepsilon(t);\ t_0, \mathbf{x}_0))] \leqslant V(t_0, \mathbf{x}_0). \tag{10}$$

Если правильно неравенство $t > \tau_\varepsilon$ (в этом случае имеем $\tau_\varepsilon(t) = \tau_\varepsilon$), то выполняются соотношения $\|\mathbf{y}_1(\tau_\varepsilon(t);\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{y}_1(\tau_\varepsilon;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\| = \varepsilon$. Если же справедливо неравенство $t < \tau_\varepsilon$ (в этом случае имеем $\tau_\varepsilon(t) = t$), то на основании неравенства Чебышева и оценки (10) находим

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}[\|\ \mathbf{y}_1(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)\ \| > \varepsilon] \leqslant \\ &\leqslant a^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}[a(\|\ \mathbf{y}_1(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)\ \|)] \leqslant \\ &\leqslant a^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}[a(\|\ \mathbf{y}_1(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)\ \| + \|\ \boldsymbol{\mu}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)\ \|)] \leqslant \\ &\leqslant a^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}[V(t,\ \mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0))] = \\ &= a^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}[V(\tau_\varepsilon(t),\ \mathbf{x}(\tau_\varepsilon(t);\ t_0, \mathbf{x}_0))] \leqslant \\ &\leqslant a^{-1}(\varepsilon)V(t_0, \mathbf{x}_0). \end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку функция $V(t,\ \mathbf{x})$ непрерывна, $V(t,\ \mathbf{0}) \equiv 0$, а также выполняются условия (7), то для всех $t_0 \geqslant 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение

$$\lim_{\mathbf{y}_0 \to 0} V(t_0, \mathbf{x}_0) = 0 \tag{12}$$

выполняется при $\|\mathbf{z}_{10}\| \leqslant L$ равномерно по $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$.

Поэтому для всех $t_0 \geqslant 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ на основании неравенств (11), (12) имеем предельное соотношение

$$\lim_{\mathbf{y}_0 \to 0} \mathbf{P}[\lim_{t\ >\ t_0} \|\ \mathbf{y}_1(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)\ | > \varepsilon] = 0,$$

выполняющееся при $\|\mathbf{z}_{10}\| \leqslant L$ равномерно по $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$.

В результате для каждого $t_0 \geqslant 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon,\ \gamma,\ L,\ t_0) > 0$ такое, что неравенство (4) имеет место для всех $t \geqslant t_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Следовательно, при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ "частичное" положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (3) $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если условия* (7) *теоремы* 1 *заменить условиями*

$$V(t, \mathbf{x}) \leqslant V^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1),\ V^*(\mathbf{0}, \mathbf{z}_1) \equiv 0, \tag{13}$$

то "частичное" положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы* (3) *равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво по вероятности при больших значениях* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$.

Доказательство. При выполнении условий (13) для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение (12) выполняется при $\|\mathbf{z}_{10}\| \leqslant L$ равномерно не только $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$, но и по $t_0 \geqslant 0$.

В результате для каждого $t_0 \geqslant 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, L) > 0$ такое, что неравенство (4) имеет место для всех $t \geqslant t_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Следовательно, при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ "частичное" положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (3) равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности. Теорема доказана.

Замечания. 1. Вспомогательная V-функция и ее дифференциальный производящий оператор $\mathbf{L}V$ в силу системы (3) в теоремах 1, 2 являются, вообще говоря, *знакопеременными* в области

$$t \geqslant 0,\ \|\mathbf{y}_1\| < h_1 < h,\ \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty. \tag{14}$$

2. С использованием одной V-функции Ляпунова устойчивость по всем переменным ($\mathbf{y}$-устойчивость) "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (3) рассмотрена [12, 13] при предположении $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, где δ может зависеть не только от ε, γ, t_0, но и от $\mathbf{z}_0$ (это условие эквивалентно условиям $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_0\| \leqslant L$, где δ зависит не только от ε, γ, t_0, но и от L). Поскольку вспомогательная V-функция и ее дифференциальный производящий оператор в силу системы (3) в теоремах 1, 2 могут быть знакопеременными в области (14), то полученные результаты являются более общими. Они основаны на использовании двух вспомогательных функций Ляпунова: наряду с основной V-функцией для наиболее рациональной замены области (14) областью (5) вводится дополнительная векторная $\boldsymbol{\mu}$-функция. Кроме того, условия (7) и (13) являются "промежуточными" по отношению к условиям $V(t, 0, \mathbf{z}) \equiv 0$ и $V \leqslant V^*(\mathbf{y})$ в работах [12, 13], что можно использовать для поиска компромисса между содержательным смыслом понятия частичной устойчивости и соответствующими требованиями к функциям Ляпунова.

3. Устойчивость по части переменных положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (3) также изучалась ранее в работах [14—20] с использованием одной V-функции Ляпунова.

Пример. Пусть система (3) состоит из уравнений

$$\begin{gathered} dy_1 = (-y_1 + y_2 z_1 \sin z_2)dt + 0{,}1 y_1 dw_1; \\ dy_2 = (y_2^2 z_1 \sin z_2)dt + 0{,}2 y_2 dw_2; \\ dz_1 = -z_1[1 + \sin(t y_1)\cos z_2]dt + 0{,}1 z_1 dw_3; \\ dz_2 = [\sin(t y_1)\sin z_2]dt. \end{gathered} \tag{15}$$

Рассмотрим вспомогательные функции

$$V = 1/2(y_1^2 + y_2^2 z_1^2 \sin^2 z_2),\ \mu_1 = y_2 z_1 \sin z_2,$$

$$\begin{gathered} V = 1/2(y_1^2 + \mu_1^2) \leqslant \\ \leqslant V^*(y_1, y_2, z_1),\ V^*(0, 0, z_1) \equiv 0. \end{gathered}$$

В данном случае имеют место соотношения

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\sigma}_k = (\sigma_{k1}, \sigma_{k2}, \sigma_{k3}, \sigma_{k4})^{\mathrm{T}}; \\ \sigma_{11} = 0{,}1 y_1;\ \sigma_{22} = 0{,}2 y_2; \\ \sigma_{33} = 0{,}1 z_1;\ \sigma_{44} = 0;\ \sigma_{ij} = 0\ (i \neq j); \end{gathered}$$

$$\sum_{k=1}^{r}\left(\left\langle \boldsymbol{\sigma}_k^{\mathrm{T}}(t, \mathbf{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle\right)^2 V =$$

$$= \sigma_{11}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} + \sigma_{22}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} + \sigma_{33}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2} = 0{,}01 y_1^2 + 0{,}05 \mu_1^2.$$

Для дифференциального производящего оператора $\mathbf{L}V$ вдоль траекторий системы (15) в области (5) имеет место следующая оценка:

$$\begin{gathered} \mathbf{L}V = -y_1^2 + y_1\mu_1 - \mu_1^2 + \mu_1^3 + \\ + 0{,}005 y_1^2 + 0{,}025 \mu_1^2 \leqslant -l(y_1^2 + \mu_1^2) \leqslant 0, \\ l = \mathrm{const} > 0. \end{gathered}$$

На основании теоремы 2 "частичное" положение равновесия $y_1 = y_2 = 0$ системы (15) равномерно y_1-устойчиво по вероятности при большом z_{10} в целом по z_{20}.

Отметим, что дифференциальный производящий оператор введенной V-функции является знакопеременным в области (14).

3. К унификации исследований частичной устойчивости

Вводя обозначения $u = t$, $\tau = t - t_0$, нестационарную систему (3) представим в виде стационарной стохастической системы [12, 13]

$$\begin{aligned} & d\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{X}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))d\tau + \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))dw_k(\tau); \\ & du(\tau) = d\tau. \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что решение $\mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)$, $t \geqslant t_0$ нестационарной стохастической системы (3) эквивалентно определяется решением $\mathbf{x}(\tau;\ 0, \mathbf{x}_0)$, $\tau \geqslant 0$ стационарной стохастической системы (16).

Если система (3) допускает положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то система (16) допускает "частичное" положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. В результате как задача устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия, так и задача устойчивости "частичных" положений равновесия нестационарной системы (3) сводятся к задаче устойчивости по части переменных "частичного" положения равновесия стационарной системы (16). А именно, задача $\mathbf{y}$-устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ нестационарной системы (3) сводится к задаче $\mathbf{y}$-устойчивости "частичного" положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ стационарной системы (16), а задача устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ нестационарной системы (3) сводится к задаче устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ стационарной системы (16).

Особенность такого сведения состоит в том, что в случае равномерной (или неравномерной) по t_0 частичной устойчивости исходной системы (3) постановки обеих задач частичной устойчивости для системы (16) должны отвечать требованию "в целом по u_0" (или "при большом u_0"). Поскольку при этом постановки обеих задач частичной устойчивости для системы (16) допускают как требование "в целом по $\mathbf{z}_0$", так и требование "при большом $\mathbf{z}_0$", то в результате приходим к необходимости анализа задач устойчивости по части переменных "частичного" положения равновесия, рассмотренных в разделе 1. Кроме того, задача $\mathbf{y}_1$-устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ нестационарной системы (3) также сводится к задаче $\mathbf{y}_1$-устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ стационарной системы (16).

Отметим, что ранее обсуждались вопросы: 1) унификации исследований в задачах устойчивости по всем переменным нестационарных стохастических систем и в задачах частичной устойчивости стационарных стохастических систем [12, 13]; 2) унификации исследований частичной устойчивости стационарных и нестационарных детерминированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (непрерывных и дискретных) [8, 10].

Заключение

В работе получены условия устойчивости по части переменных по вероятности "частичного" положения равновесия нелинейной стохастической системы Ито в контексте метода функций Ляпунова. В отличие от ранее выполненных работ по частичной устойчивости стохастических систем, наряду с основной функцией Ляпунова рассматривается дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная функция для наиболее рациональной корректировки области, в которой строится основная функция Ляпунова. Рассмотрен пример, иллюстрирующий особенности предложенного подхода.

Показано, что предложенная в статье постановка задач частичной устойчивости позволяет унифицировать исследования частичной устойчивости стационарных и нестационарных стохастических систем.

Список литературы

1. **Хасьминский Р. З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
2. **Кушнер Г. Дж.** Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969.
3. **Mao X. R.** Stochastic Differential Equations, 2 ed., Oxford: Woodhead Publ., 2008.
4. **Кац И. Я., Красовский Н. Н.** Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 809—823.
5. **Kats I. Ya., Martynyuk A. A.** Stability and Stabilization of Nonlinear Systems with Random Structure. London: Taylor & Francis, 2002.
6. **Воротников В. И.** Об устойчивости и устойчивости по части переменных "частичных" положений равновесия нелинейных динамических систем // Доклады РАН. 2003. Т. 389. № 3. С. 332—337.
7. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К задаче частичной детектируемости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 2009. № 1. С. 25—38.
8. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. Т. 51. Вып. 5. С. 23—31.
9. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** Об устойчивости по части переменных "частичных" положений равновесия систем с последействием // Математические заметки. 2014. Т. 96. Вып. 4. С. 496—503.
10. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных систем // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2017. Т. 18. № 6. С. 371—375.
11. **Воротников В. И.** Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 3—59.
12. **Rajpurohit T., Haddad W. M.** Stochastic finite-time partial stability, partial-state stabilization, and finite-time optimal feedback control // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 2017. Vol. 29. № 2. art. 10. 37 p.
13. **Rajpurohit T., Haddad W. M.** Partial-state stabilization and optimal feedback control for stochastic dynamical systems // J. Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2017. Vol. 139. № 9. Paper DS-15-1602.
14. **Шаров В. Ф.** Устойчивость и стабилизация стохастических систем по отношению к части переменных // Автоматика и телемеханика. 1978. № 11. С. 63—71.
15. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998.
16. **Potcovaru G.** On the partial stability of a dynamical systems with random parameters // An. Univ. Bucur., Mat. 1999. Vol. 48. № 2. P. 163—168.
17. **Ignatyev O.** Partial asymptotic stability in probability of stochastic differential equations // Statistics & Probability Letters. 2009. Vol. 79. № 5. P. 597—601.
18. **Ignatyev O.** New criterion of partial asymptotic stability in probability of stochastic differential equations // Applied Mathematics and Computation. 2013. Vol. 219. № 23. P. 10961—10966.
19. **Зуев А. Л., Игнатьев А. О., Ковалев А. М.** Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. Киев: Наукова Думка, 2013.
20. **Kao Y., Wang C., Zha F., Cao H.** Stability in mean of partial variables for stochastic reaction — diffusion systems with Markovian switching // J. of the Franklin Institute. 2014. Vol. 351. № 1. P. 500—512.

On Problem of Stability in Probability for "Partial" Equilibrium Positions of Nonlinear Stochastic Systems

V. I. Vorotnikov, vorotnikov-vi@rambler.ru,
Ural federal university, Ekaterinburg, 620002, Russian Federation,
Yu. G. Martyshenko, j-mart@mail.ru, Russian state university of oil and gas,
Moscow, 119991, Russian Federation

Corresponding author: **Vorotnikov Vladimir I.,** D. Sc. (Phys. & Math.), Professor,
Ural federal university, Ekaterinburg, 620002, Russian Federation,
e-mail: vorotnikov-vi@rambler.ru

Accepted on November 23, 2017

The partial stability problems naturally arise in applications either from the requirement of proper performance of a system or in assessing system capability. In addition, a lot of actual (or desired) phenomena can be formulated in terms of these problems and be analyzed with these problems taken as the basis. The following multiaspect phenomena and problems can be indicated: adaptive stabilization; spacecraft stabilization (especially stabilization by rotors); drift of the gyroscope axis; Lotka-Volterra ecological principle, e.t.c. Also very effective is the approach to the problem of stability with respect to all variables based on preliminary analysis of partial stability. The article studies the problem of partial stability for nonlinear stochastic systems of differential equations Ito: stability with respect to a part of the variables in probability of "partial" zero equilibrium position. Initial perturbations of variables that do not define the given equilibrium position can be large (belonging to an arbitrary compact set) with respect to one part of the variables and arbitrary with respect to their other part. A conditions of stability of this type are obtained in the context of a stochastic analog of the Lyapunov functions method, which generalize a number of existing results. Example is given. The problem of unification of process of studying partial stability problems of stationary and non-stationary nonlinear stochastic systems of differential equations is also discussed.

Keywords: *Ito stochastic systems, partial stability in probability, Lyapunov functions*

For citation:

Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G. On Problem of Stability in Probability for "Partial" Equilibrium Positions of Nonlinear Stochastic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 3, pp. 147—152.

DOI: 10.17587/mau.19.147-152

References

1. **Khasminskii R. Z.** Stochastic Stability of Differential Equations, 2 ed., Berlin: Springer-Verlag, 2012.
2. **Kushner H. J.** Stochastic Stability and Control, New York: Acad. Press, 1967.
3. **Mao X. R.** Stochastic Differential Equations, 2 ed., Oxford: Woodhead Publ., 2008.
4. **Kats I. Ya., Krasovskii N. N.** On the stability of systems with random parameters, *J. Appl. Math. Mech.,* 1960, vol. 24, no. 5, pp. 1225—1246.
5. **Kats I. Ya., Martynyuk A. A.** Stability and Stabilization of Nonlinear Systems with Random Structure, London: Taylor & Francis, 2002.
6. **Vorotnikov V. I.** Partial-equilibrium position of nonlinear dynamical systems: their stability and stability with respect to some of variables, *Doklady Physics*, 2003, vol. 48, no. 3, pp. 151—155.
7. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** On partial detectability of the nonlinear dynamic systems, *Automation and Remote Control,* 2009, vol. 70, no. 1, pp. 20—32.
8. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** On the partial stability of nonlinear dynamical systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.,* 2010, vol. 49, no. 5, pp. 702—709.
9. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** Stability in a part of variables of "partial" equilibria of systems with aftereffect, *Mathematical Notes*. 2014, vol. 96, no. 3, pp. 477—483.
10. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** *K zadache chastichnoy ustoychivosti nelineynykh diskretnykh sistem* (To problem of partial stability of nonlinear discrete-time systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie,* 2017. vol. 18, no. 6, pp. 371—375 (in Russian).
11. **Vorotnikov V. I.** Partial stability and control: the state of the art and developing prospects, *Automation and Remote Control,* 2005, vol. 66, no. 4, pp. 511—561.
12. **Rajpurohit T., Haddad W. M.** Stochastic finite-time partial stability, partial-state stabilization, and finite-time optimal feedback control, *Mathematics of Control, Signals, and Systems,* 2017, vol. 29, no. 2, art. 10, 37 p.
13. **Rajpurohit T., Haddad W. M.** Partial-state stabilization and optimal feedback control for stochastic dynamical systems, *J. Dynamic Systems, Measurement, and Control,* 2017, vol. 139, no. 9, Paper DS-15-1602.
14. **Sharov V. F.** Stability and stabilization of stochastic systems vis-a-vis some of the variables, *Automation and Remote Control*, 1978, vol. 39, no. 11, pp. 1629—1636.
15. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control, Boston, Birkhauser, 1998.
16. **Potcovaru G.** On the partial stability of a dynamical systems with random parameters, *An. Univ. Bucur., Mat.*, 1999, vol. 48, no. 2, pp. 163—168.
17. **Ignatyev O.** Partial asymptotic stability in probability of stochastic differential equations, *Statistics & Probability Letters,* 2009, vol. 79, no. 5, pp. 597—601.
18. **Ignatyev O.** New criterion of partial asymptotic stability in probability of stochastic differential equations, *Applied Mathematics and Computation,* 2013, vol. 219, no. 23, pp. 10961—10966.
19. **Zuyev A. L., Ignatyev A. O., Kovalev A. M.** *Ustoychivost' i stabilizatsiya nelineynykh sistem* (Stability and Stabilization of Nonlinear Systems). Kiev, Naukova dumka, 2013 (in Russian).
20. **Kao Y., Wang C., Zha F., Cao H.** Stability in mean of partial variables for stochastic reaction—diffusion systems with Markovian switching, *J. of the Franklin Institute*, 2014, vol. 351, no. 1, pp. 500—512.