УДК 681.513 DOI: 10.17587/mau.20.131-142

В. И. Ловчаков, д-р техн. наук, проф., lovvi50@mail.ru,
Тульский государственный университет

Применение многомерной линеаризации в синтезе квазиоптимальных регуляторов по функционалу обобщенной работы

Исследуется решение задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) в постановке А. А. Красовского для устойчивых многомерных объектов, описываемых матричным дифференциальным уравнением с полиномиальными нелинейностями от фазовых координат. Исследуемый класс объектов управления, получивших название полиномиальных, достаточно широк для приложений: указанные модели используются для описания движения систем самой различной природы — устройств электромеханики, химических реакторов, промышленных объектов с рециклом, биологических и экологических систем и др.

Для решения указанной задачи АКОР наиболее приспособлен метод степенных рядов, который в отличие от других позволяет найти законы управления в наиболее широкой области фазового пространства объекта. Однако его реализация сопряжена с выполнением большого объема вычислений, является в меньшей степени формализованной и соответственно приспособленной к программированию. В данной работе предложен метод синтеза квазиоптимальных регуляторов, который во многом ослабляет отмеченные недостатки метода степенных рядов за счет использования процедуры многомерной линеаризации описания полиномиальных объектов, осуществляемой за счет расширения пространства состояния объекта новыми координатами, представляющими собой произведения исходных фазовых координат, и применения аппарата теории матриц с кронекеровским (прямым) произведением. Предлагаемый метод синтеза позволяет найти в форме полиномиальной функции приближенное решение задачи АКОР с высокой точностью, причем его реализация отличается предельной простотой вследствие использования в основном известного программного обеспечения решения линейно-квадратичных задач оптимального управления.

Точность решения задачи АКОР определяется точностью выбираемой для исследуемого объекта квазилинеаризованной модели соответствующей степени ($k = 2, 3,...$). Подчеркнем, что в линеаризованной модели k-й степени учитываются полиномиальные составляющие k-й степени описания объекта управления. В связи с этим предложенный метод синтеза обеспечивает точность решения не меньшую, чем стандартный метод степенных рядов с удержанием его членов до k-й степени включительно. Однако точность разработанного метода синтеза, как правило, существенно выше вследствие учета при конструировании регулятора функциональной матрицы используемой квазилинеаризованной модели, зависящей от расширенного вектора состояния объекта, содержащего произведения фазовых координат исходного объекта.

Ключевые слова: *объект управления, полиномиальная нелинейность, линеаризация модели, функционал обобщенной работы, аналитическое конструирование оптимальных регуляторов*

1. Введение

Современные объекты управления являются, как правило, нелинейными и многомерными по своей природе. Однако в настоящее время для многих практически важных классов нелинейных объектов отсутствуют простые, инженерные методы проектирования систем управления. В связи с этим проблема синтеза нелинейных многомерных систем является центральной в теории управления [1, 2].

Среди большого разнообразия нелинейных объектов в данной работе выделен достаточно широкий для приложений их класс, для которого оказалось возможным разработать относительно эффективный метод синтеза квазиоптимальных нелинейных регуляторов, использующий в основном известные алгоритмы, и программное обеспечение синтеза оптимальных линейных систем управления. Модели динамики данных объектов описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными нелинейностями от их фазовых координат. Такие модели применяются для описания движения систем самой различной природы: устройств электромеханики, химических реакторов и промышленных объектов с рециклом, биологических и экологических систем (модели Лотки и Вольтерра) и др. Исследуемый класс объектов, получивший название полиномиальных [3], можно значительно расширить, включив в него объекты с нелинейными характеристиками, являющимися непрерывными функциями, при последующей их аппроксимации полиномиальными зависимостями.

В связи с указанным широким распространением объектов с полиномиальными нелинейностями целесообразно провести анализ задачи управления данными объектами, которую сформулируем как задачу оптимального управления в рамках перспективного с теоретической и практической точек зрения направления аналитического конструирования оптимальных регуляторов [4—7]. В настоящей работе предполагается использование базовых результатов широко известной теории решения линейно-квадратичных задач управления — задач аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), к которым относятся задачи структурно-параметрического синтеза линейных систем управления на основе минимизации квадратичного функционала качества [1]. Данная теория получила признание у специалистов автоматического управления [8], что связано с такими ее очевидными достоинствами, как

1) логическая завершенность и принципиальная математическая простота;

2) законченность и аналитический характер получаемых решений;

3) применимость к широкому классу линейных стационарных и нестационарных динамических объектов как с конечным, так и с бесконечным временем функционирования.

В работе [8] одновременно отмечается и чрезмерное "безраздельное господство" методологии линейно-квадратичной оптимизации в теории управления и проводится критический анализ данной ситуации. Критика в главном сводится к следующим положениям:

1) квадратичные функционалы качества не имеют ясного физического смысла, и их широкое распространение в основном предопределяется простотой вычисления и удобством использования в аналитических исследованиях;

2) в теории АКОР не решена проблема выбора значений весовых коэффициентов квадратичного функционала и их связи с общепринятыми в инженерной практике первичными показателями качества синтезируемых систем (временем переходного процесса, перерегулированием, статической ошибкой регулирования и др.).

На наш взгляд, данные критические замечания являются вполне обоснованными применительно к линейным системам управления, для которых разработаны многие другие методы анализа и синтеза, обеспечивающие желаемые значения первичных показателей качества, запасов устойчивости и грубости. Вслед за Уонем (W. M. Wonham) [9] для линейных систем метод АКОР действительно можно "рассматривать лишь как один из многих подходов к обеспечению устойчивости", причем являющийся далеко не самым эффективным.

Для нелинейных объектов ситуация принципиально иная, так как для них по большому счету практически отсутствуют простые инженерные методы (за исключением методов линеаризации) синтеза систем управления, обеспечивающие им устойчивость и первичные показатели качества. Другим перспективным подходом к синтезу нелинейных многомерных систем являются, на наш взгляд, методы АКОР в сочетании с теорией функций Ляпунова. Использование в них интегральных функционалов качества управления, в частности квадратичных критериев, позволяет определить требования к переходным процессам динамических систем заданием значений их весовых коэффициентов, число которых может быть значительно меньше числа параметров системы дифференциальных уравнений, описывающей желаемые движения синтезируемой многомерной системы, и меньше числа первичных показателей качества, определяемых для каждой координаты многомерного объекта. При этом важно подчеркнуть, что практически произвольный выбор весовых коэффициентов квадратичного критерия обеспечивает синтезируемой системе фундаментальное свойство — свойство асимптотической устойчивости. Дальнейший же целенаправленный перебор значений данных коэффициентов, как правило, удовлетворяет разумным требованиям к первичным показателям качества систем. Более широкие возможности в этом направлении обеспечивают функционалы с интегрантами полиномиального вида, содержащими совместно с квадратичными составляющими и, например, слагаемые четвертой степени, которые для электромеханических систем имеют глубокий физический смысл — смысл квадратичных отклонений соответствующих мощностей или энергий. В связи с этим в данной работе предпринята попытка разработать для объектов с полиномиальными нелинейностями метод синтеза систем управления, сочетающий достоинства методов линеаризации, АКОР и функций Ляпунова.

Решение задачи АКОР по квадратичному функционалу качества (задачи Летова — Калмана) для многомерных объектов управления с полиномиальными нелинейностями, как показал анализ работ [1, 2, 4—7], представляет серьезные трудности, связанные с необходимостью решения нелинейного уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана в частных производных. Это делает метод Летова — Калмана практически неприменимым к нелинейным объектам выше третьего порядка. Более приспособленным к решению указанной задачи является метод А. А. Красовского [1, 6]: применение функционала обобщенной работы (ФОР), оптимизация по которому мало что меняет в техническом существе требований, предъявляемых к движению оптимальной системы по сравнению с квадратичным интегральным функционалом, позволяет существенно сократить вычислительные затраты в решении сложных задач управления. Более того, сравнение систем управления, оптимальных в смысле минимума ФОР и классических функционалов, в отношении традиционных прямых показателей качества переходных процессов свидетельствует в пользу ФОР [1, 2].

В рамках теории АКОР по критерию обобщенной работы разработаны три основных подхода определения оптимальных управлений: метод степенных рядов [1], операторный метод [6] и метод прогнозирующей модели [7]. Для применения к полиномиальным объектам наиболее приспособлен метод степенных рядов, который в отличие от других позволяет найти законы управления, работоспособные в более широкой области фазового пространства объекта. Однако он в меньшей степени формализован и, соответственно, приспособлен для программной реализации, которая при этом сопряжена с выполнением большого объема вычислений. В данной работе преследуется цель по возможности ослабить эти недостатки метода степенных рядов на основе использования процедуры многомерной линеаризации описания полиномиальных объектов [11, 12], осуществляемой за счет расширения пространства состояния объекта новыми координатами, представляющими собой произведения исходных координат. Предлагаемый метод синтеза, так же как и метод степенных рядов, позволяет найти в форме полиномиальной функции приближенное решение задачи АКОР, но с относительно высокой точностью и меньшим объемом вычислений.

2. Постановка задачи синтеза оптимальных систем управления

Динамика многих технических объектов и технологических процессов может быть описана векторным нелинейным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{X}(t) = A(X) + B(X)U(t), \tag{2.1}$$

где $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор состояния объекта управления, координаты которого имеют физический смысл отклонений от заданного режима работы; $U = (u_1, u_2, ..., u_m)^{\mathrm{T}}$ — вектор управляющих воздействий; $A(X)$ — матрица-столбец с элементами $a_i(X) \equiv a_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, представляющими собой полиномиальные функции от компонент вектора состояния объекта; $B(X)$ — матрица размерности $n \times m$ с элементами-функциями $b_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., m$, удовлетворяющими известным условиям существования решений дифференциальных уравнений [5].

Задачу оптимального управления данными объектами, как обосновано выше, рассмотрим в постановке А. А. Красовского [1, 6]: требуется найти закон управления $U(X)$ в функции фазовых координат, который вместе с объектом (2.1) образует асимптотически устойчивую систему управления, переводящую ее из произвольного начального состояния $X(t = 0) = X_0$ в конечное $X(t \to \infty) = 0$ с минимальным значением ФОР, задаваемого симметричными, положительно определенными матрицами Q, R:

$$J = \int_0^\infty \Bigg(X^{\mathrm{T}}(t)QX(t) + U^{\mathrm{T}}(t)RU(t) + \\ + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial S(X)}{\partial X}\right)^{\mathrm{T}} B(X)R^{-1}B^{\mathrm{T}}(X)\frac{\partial S(X)}{\partial X}\Bigg)dt, \tag{2.2}$$

где $\dfrac{\partial S(X)}{\partial X}$ — вектор-столбец градиента функции Беллмана — Ляпунова синтезируемой оптимальной системы управления.

Использование ФОР (2.2) существенным образом облегчает нахождение оптимальных управлений

$$U(X) = -0,5R^{-1}B^{\mathrm{T}}(X)\frac{\partial S(X)}{\partial X} \qquad (2.3)$$

вследствие линейности дифференциального уравнения в частных производных

$$\left(\frac{\partial S(X)}{\partial X}\right)^{\mathrm{T}} A(X) = -X^{\mathrm{T}}QX, \qquad (2.4)$$

определяющего функцию Беллмана — Ляпунова $S(X)$ [2, 6, 7].

Основным общим методом решения дифференциального уравнения (2.4), известного в литературе как уравнение Ляпунова, в настоящее время является метод степенных рядов. Его применение к объектам высокого порядка связано с выполнением большого числа аналитических операций дифференцирования, перемножения, сложения полиномов многих переменных и приведения подобных слагаемых после указанных операций. В настоящей работе разрабатывается метод решения уравнения (2.4) и соответствующий метод синтеза оптимальных систем управления, в котором данные операции осуществляются аналитически с использованием матричного аппарата, включающего операцию кронекеровского произведения матриц. С этой целью с использованием результатов работы [12] описание объектов управления (2.1) представим в следующей оригинальной форме:

$$\dot{X}(t) = A_1X(t) + A_2[X(t)\otimes X(t)] + B(X)U(t), \qquad (2.5)$$

где A_1, A_2 — матрицы параметров объекта размерности $n\times n$, $n\times n^2$, $X \otimes X = X^{[2]}$ — кронекеровское произведение (степень) вектора состояния объекта. Для справки укажем, что кронекеровское произведение векторов (матриц) $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, ..., m$ и $B = (b_{ij})$, $i, j = 1, ..., n$ определяется как блочная матрица $A \otimes B = (a_{ij}\cdot B)$ размерности $mn\times mn$ [10].

Необходимо подчеркнуть, что хотя предлагаемая модель (2.5) содержит только квадратичные нелинейности, однако она способна описывать движения достаточно широкого класса полиномиальных объектов. Действительно, описание объектов, содержащих нелинейные члены в виде произведений фазовых координат выше второй степени, можно привести к виду (2.5) путем расширения пространства состояния объекта новыми координатами, представляющими собой произведения исходных координат. Покажем это на примере объекта первого порядка с кубической нелинейностью

$$\dot{x}(t) = a_1x(t) + a_2x^2(t) + a_3x^3(t) + bu(t).$$

Для него введем фазовые координаты $x_1(t) = x(t)$, $x_2 = x_1^2(t)$. Уравнение рассматриваемого объекта в указанных координатах принимает вид

$$\dot{x}_1(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + a_3x_1(t)x_2(t) + bu(t),$$

а соответственно производная $\dot{x}_2(t)$ — вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= 2x_1(t)\dot{x}_1(t) = \\ &= 2x_1(t)[a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + a_3x_1(t)x_2(t) + bu(t)] = \\ &= 2a_1x_2(t) + 2a_2x_1(t)x_2(t) + 2a_3x_2^2(t) + 2bx_1(t)u(t).\end{aligned}$$

Систему двух последних уравнений можно записать в виде уравнения (2.5) со следующими матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 2a_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_2 & 0 & 2a_3 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} b \\ 2bx_1(t) \end{pmatrix}.$$

Данный пример показывает, что описание объектов (2.1) с высокой степенью нелинейности (выше двух) действительно можно свести к модели (2.5), которая описывает достаточно широкий для приложений класс нелинейных объектов управления.

Подчеркнем, что, на наш взгляд, описание нелинейных объектов управления в форме (2.5) является достаточно универсальным и одновременно наиболее простым приближением к модели линейных систем. Модель (2.5) позволяет для решения задач анализа и синтеза систем управления непосредственно использовать результаты теории матриц, включающей операцию кронекеровского произведения, что систематизирует и упрощает процедуру решения сформулированной задачи АКОР.

3. Метод многомерной линеаризации в решении задачи АКОР

Применение линеаризованной модели второй степени

Следующим шагом в упрощении процедуры синтеза рассматриваемых полиномиальных систем управления является линеаризация их описания. Метод многомерной линеаризации основан на повторном использовании указанной выше процедуры расширения пространства состояния системы новыми координатами, представляющими собой произведения исходных фазовых координат. Для объекта (2.5) по аналогии с работой [11] введем вектор

$$Y(t) = [X(t) \otimes X(t)] = X^{[2]}(t), \qquad (3.1)$$

производная по времени от которого с использованием операций теории матриц с кронекеровским произведением [10] принимает вид

$$\begin{aligned}
&\dot{Y}(t) = \dot{X}(t) \otimes X(t) + X(t) \otimes \dot{X}(t) = \\
&= (A_1X(t) + A_2[X(t) \otimes X(t)] + BU(t)) \otimes X(t) + \\
&+X(t) \otimes (A_1X(t) + A_2[X(t) \otimes X(t)] + BU(t)) = \\
&= A_1X \otimes X + A_2Y \otimes X + BU \otimes X + \\
&+ X \otimes A_1X + X \otimes A_2Y + X \otimes BU = \\
&= (A_1 \otimes I_n)(X \otimes X) + (A_2 \otimes I_n)(Y \otimes X) + \\
&+ BU \otimes X + (I_n \otimes A_1)(X \otimes X) + \\
&+ (I_n \otimes A_2)(X \otimes Y) + X \otimes BU = \\
&= (A_1 \otimes I_n + I_n \otimes A_1)Y + \\
&+ (A_2 \otimes I_n + I_n \otimes A_2)(X \otimes Y) + \\
&+ BU \otimes X + X \otimes BU,
\end{aligned} \qquad (3.2)$$

где I_n — единичная матрица размерности $n \times n$. Введением в рассмотрение расширенного вектора состояния $V(t) = (X(t), Y(t))^{\mathrm{T}}$ объекта объединим уравнения (2.5) и (3.2) в одну систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O_{n^2 \times n} & A_1 \otimes I_n + I_n \otimes A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} O_n \\ (A_2 \otimes I_n + I_n \otimes A_2)[X(t) \otimes Y(t)] \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} B(X) \\ B_{[2]}(X) \end{pmatrix} U(t),
\end{aligned} \qquad (3.3)$$

где O_n — нулевой вектор размерности n, $O_{n^2 \times n}$ — нулевая матрица указанной в индексе размерности, а матрица $B_{[2]}(X)$ находится из уравнения

$$B(X)U \otimes X + X \otimes B(X)U = B_{[2]}(X)U. \qquad (3.4)$$

Наиболее просто данное уравнение решается в случае одномерного управления с использованием следующего свойства кронекеровского произведения матриц [10]: если $\mu = \mathrm{const}$, то $(\mu A) \otimes B = A \otimes (\mu B) = \mu(A \otimes B)$. При $U = u_1 = \mu = \mathrm{const}$ уравнение (3.4) представляется в форме

$$[B(X) \otimes X + X \otimes B(X)]u_1 = B_{[2]}(X)u_1,$$

из которого непосредственно находим

$$B_{[2]}(X) = B(X) \otimes X + X \otimes B(X). \qquad (3.5)$$

Данный результат можно обобщить на многомерное управление, воспользовавшись представлением

$$BU = B_1u_1 + B_2u_2 + \ldots + B_mu_m = \sum_{k=1}^{m} B_ku_k, \qquad (3.6)$$

где B_k — k-й вектор-столбец матрицы B. На основе (3.6) находим

$$\begin{aligned}
&BU \otimes X + X \otimes BU = \\
&= \left(\sum_{k=1}^{m} B_ku_k\right) \otimes X + X \otimes \left(\sum_{k=1}^{m} B_ku_k\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{m} (B_k \otimes X + X \otimes B_k)u_k.
\end{aligned} \qquad (3.7)$$

Из соотношений (3.4), (3.7) следует, что искомая величина $B_{[2]}(X)$ определяется следующей блочной матрицей:

$$\begin{aligned}
B_{[2]}(X) = (&B_1(X) \otimes X + X \otimes B_1(X), \ldots, \\
&B_m(X) \otimes X + X \otimes B_m(X)).
\end{aligned} \qquad (3.8)$$

Таким образом, описание (3.3) объекта в расширенном фазовом пространстве $V(t)$ полностью определено.

Синтез системы управления объектом (2.5), который также эквивалентно описывается уравнениями (3.3), можно существенно упростить, если для него по аналогии с работой [11] ввести соответствующую линеаризованную модель.

Определение 1: для нелинейного объекта (2.5) многомерная частично линеаризованная модель второй степени, описывается дифференциальным уравнением

$$\begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O_{n^2\times n} & A_1 \otimes I_n + I_n \otimes A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} B(X) \\ B_{[2]}(X) \end{pmatrix} U(t). \quad (3.9)$$

Так как в модели (3.9) по сравнению с исходным описанием (3.3) отсутствует нелинейное слагаемое с произведением $X(t) \otimes Y(t)$, но сохранены нелинейные функции, являющиеся множителями управляющего воздействия $U(t)$, то полученная модель называется частично линеаризованной или квазилинеаризованной. Присутствие в названии модели (3.9) словосочетания "второй степени" связано с наличием в описании (3.9) вектора $Y(t) = [X(t) \otimes X(t)] = X^{[2]}(t)$.

С применением описания объекта управления в форме (3.9) исследуемая задача АКОР (2.2), (2.5) может быть решена достаточно просто с использованием известных результатов теории решения линейно-квадратичных задач управления [1, 2]. Например, воспользуемся результатами работы [1], в которой доказана следующая ***теорема:***

пусть матрица A линейного объекта управления

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \quad (3.10)$$

устойчива, P_+ — положительно определенное решение матричного уравнения Ляпунова

$$PA + A^{\mathrm{T}}P = -Q. \quad (3.11)$$

Тогда управление, минимизирующее функционал (2.2) с положительно определенными матрицами Q, R на движениях замкнутой системы, возбужденной произвольными начальными условиями $X(0) = X_0$, определяется выражением

$$U = -K_P X;\ K_P = R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_+, \quad (3.12)$$

причем замкнутая система $\dot{X}(t) = [A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_+]X(t)$ асимптотически устойчива, а функция $S(X) = X^{\mathrm{T}}P_+X$ является для нее функцией Ляпунова.

Применим данную теорему к решению задачи АКОР для нелинейного объекта (3.9), линейная составляющая описания которого определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O_{n^2\times n} & A_1 \otimes I_n + I_n \otimes A_1 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Представив искомое решение уравнения (2.4) — функцию Беллмана — Ляпунова в квадратичной форме $S(X) = V^{\mathrm{T}}P_+V$, $V = (X, Y)^{\mathrm{T}} = (X, X \otimes X)^{\mathrm{T}}$ с матрицей P_+, подлежащей определению, приходим к необходимости решения уравнения (3.11) с матрицами (3.13) и

$$Q_{[2]} = \begin{pmatrix} Q & O_{n\times n^2} \\ O_{n^2\times n} & O_{n^2\times n^2} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Матрицу P_+ можно найти известными методами: 1) сведением матричного уравнения Ляпунова к стандартной системе линейных алгебраических уравнений; 2) методом рядов; 3) методом матричной сигнум-функции и др. [1, 5]. При этом можно воспользоваться готовыми программными продуктами, например, математическим пакетом MATLAB, содержащим функцию *lyap*(A, Q). Эта функция по заданным матрицам A, Q определяет решение уравнения (3.11).

Определив матрицу P_+ и, соответственно, функцию Беллмана — Ляпунова $S(X) = V^{\mathrm{T}}P_+V$, на основе выражения (2.3) находим нелинейный закон обратной связи

$$U_{[2]}(X) = -R^{-1} \begin{pmatrix} B(X) \\ B_{[2]}(X) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} P_+ \begin{pmatrix} X \\ X^{[2]} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Управление (3.15) конкретизирует оптимальное управление (3.12) для объекта (3.9) с функциональной матрицей $\overline{B}(X) = (B(X)\ \ B_{[2]}(X))^{\mathrm{T}}$. Вместе с тем этот закон обратной связи является приближенно оптимальным для исходного объекта (2.5), ошибка приближения которого определяется погрешностью квазилинеаризованной модели (3.9) в сравнении с описанием (3.3).

Применение линеаризованной модели третьей степени

Неточность частично линеаризованной (квазилинеаризованной) модели второй степени (3.9) определяется отсутствием в ней нелинейного слагаемого

$$\begin{pmatrix} O_n \\ (A_2 \otimes I_n + I_n \otimes A_2)[X(t) \otimes Y(t)] \end{pmatrix}.$$

Данное слагаемое предлагается учесть в линеаризованной модели третьей степени введением координаты $Z(t) = X(t) \otimes Y(t) = X^{[3]}(t)$. Для записи этой модели найдем производную $\dot{Z}(t)$ на основе описания (3.3):

$$\begin{gathered} \dot{Z}(t) = \dot{X}(t) \otimes Y(t) + X(t) \otimes \dot{Y}(t) = \\ = [A_1 X(t) + A_2 Y(t) + BU(t)] \otimes Y(t) + \\ + X(t) \otimes [(A_1 \otimes I_n + I_n \otimes A_1) Y(t) + \\ + (A_2 \otimes I_n + I_n \otimes A_2) Z(t) + B_{[2]} U(t)]. \end{gathered}$$

После введения обозначений

$$\begin{aligned} A_{1[2]} &= (A_1 \otimes I_n + I_n \otimes A_1); \\ A_{2[2]} &= (A_2 \otimes I_n + I_n \otimes A_2) \end{aligned} \qquad (3.16)$$

получаем

$$\begin{gathered} \dot{Z} = [A_1 X + A_2 Y + BU] \otimes I_{n^2} Y + \\ + I_n X \otimes [A_{1[2]} Y + A_{2[2]} Z + B_{[2]} U] = \\ = (A_1 \otimes I_{n^2})(X \otimes Y) + (A_2 \otimes I_{n^2})(Y \otimes Y) + \\ + BU \otimes Y + (I_n \otimes A_{1[2]})(X \otimes Y) + \\ + (I_n \otimes A_{2[2]})(X \otimes Z) + X \otimes B_{[2]} U = \\ = [(A_1 \otimes I_{n^2}) + (I_n \otimes A_{1[2]})] Z + \\ + [(A_2 \otimes I_{n^2}) + (I_n \otimes A_{2[2]})](Y \otimes Y) + \\ + BU \otimes Y + X \otimes B_{[2]} U. \end{gathered} \qquad (3.17)$$

Используя расширенный вектор состояния $W(t) = (X(t), Y(t), Z(t))^{\mathrm{T}}$, объединим уравнения (3.3) и (3.17) в одну систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \\ \dot{Z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & O_{n \times n^3} \\ O_{n^2 \times n} & A_{1[2]} & A_{2[2]} \\ O_{n^3 \times n} & O_{n^3 \times n^2} & A_{1[3]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} O_n \\ O_{n^2} \\ A_{2[3]}(X \otimes Z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B(X) \\ B_{[2]}(X) \\ B_{[3]}(X) \end{pmatrix} U(t), \end{gathered} \qquad (3.18)$$

в которой приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_{1[3]} &= A_1 \otimes I_{n^2} + I_n \otimes A_{1[2]}; \\ A_{2[3]} &= A_2 \otimes I_{n^2} + I_n \otimes A_{2[2]}, \end{aligned} \qquad (3.19)$$

а матрица $B_{[3]}$ определяется решением уравнения

$$B(X)U \otimes Y + X \otimes B_{[2]}(X)U = B_{[3]}(X)U. \qquad (3.20)$$

Используя представление (3.6), уравнение (3.20), аналогично уравнению (3.4), можно записать в форме

$$\sum_{k=1}^{m} (B_k \otimes Y + X \otimes B_{[2]k}) u_k = B_{[3]} U.$$

Из него вытекает, что искомая матрица $B_{[3]}(X)$ имеет следующую блочную структуру:

$$\begin{gathered} B_{[3]}(X) = (B_1(X) \otimes Y + X \otimes B_{[2]1}(X), \\ \ldots, B_m(X) \otimes Y + X \otimes B_{[2]m}(X)). \end{gathered} \qquad (3.21)$$

Теперь, отталкиваясь от описания (3.18), по аналогии с моделью (3.9) введем **определение 2:** для нелинейной системы (2.5) многомерная частично линеаризованная (квазилинеаризованная) модель третьей степени описывается дифференциальным уравнением

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \\ \dot{Z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & O_{n \times n^3} \\ O_{n^2 \times n} & A_{1[2]} & A_{2[2]} \\ O_{n^3 \times n} & O_{n^3 \times n^2} & A_{1[3]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} B(X) \\ B_{[2]}(X) \\ B_{[3]}(X) \end{pmatrix} U(t). \end{gathered} \qquad (3.22)$$

С ее использованием, повторяя рассуждения (3.10)—(3.15), получаем следующее приближение решения исследуемой задачи АКОР:

$$\begin{gathered} U_{[3]}(X) = -R^{-1} \bar{B}(X)^{\mathrm{T}} P_+ \begin{pmatrix} X \\ X^{[2]} \\ X^{[3]} \end{pmatrix}; \\ \bar{B}(X) = \begin{pmatrix} B(X) \\ B_{[2]}(X) \\ B_{[3]}(X) \end{pmatrix}, \end{gathered} \qquad (3.23)$$

в котором симметричная, положительно определенная матрица P_+ размерности $(n + n^2 + n^3) \times (n + n^2 + n^3)$ находится решением уравнения

$$PA + A^{\mathrm{T}} P = -Q_{[3]} \qquad (3.24)$$

с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & O_{n\times n^3} \\ O_{n^2\times n} & A_{1[2]} & A_{2[2]} \\ O_{n^3\times n} & O_{n^3\times n^2} & A_{1[3]} \end{pmatrix};$$
$$Q_{[3]} = \begin{pmatrix} Q & O_{n\times n^2} & O_{n\times n^3} \\ O_{n^2\times n} & O_{n^2\times n^2} & O_{n^2\times n^3} \\ O_{n^3\times n} & O_{n^3\times n^2} & O_{n^3\times n^3} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Заметим, что полученное решение задачи АКОР легко обобщить на задачи с расширенным классом функционалов качества, которые в отличие от критерия (2.2) с функцией $Q(X) = X^{\text{т}}QX$ содержат, например, функции

$$Q(X) = X^{\text{т}}Q_2X + (X^{[2]})^{\text{т}}Q_4X^{[2]} + (X^{[3]})^{\text{т}}Q_6X^{[3]}, \quad (3.26)$$

задаваемые положительно определенными матрицами Q_2, Q_4, Q_6. В этом случае для определения оптимального управления придется решать матричное уравнение (3.24) с блочно-диагональной матрицей

$$Q_{[3]} = \begin{pmatrix} Q_2 & O_{n\times n^2} & O_{n\times n^3} \\ O_{n^2\times n} & Q_4 & O_{n^2\times n^3} \\ O_{n^3\times n} & O_{n^3\times n^2} & Q_6 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Введение в функционал качества положительно определенных форм четвертой и шестой степеней может привести к увеличению запасов устойчивости системы управления и улучшению других показателей системы. Очевидно, что в функционале качества помимо функций (3.26) можно использовать и другие функции $Q(X)$, приводящие к появлению матрицы (3.27) общего вида.

Этапы метода синтеза квазиоптимальных регуляторов

По аналогии с полученными частично линеаризованными (квазилинеаризованными) моделями (3.9) и (3.22) для объекта управления (2.5) возможно ввести в рассмотрение также линеаризованные модели 4-й и более высокой k степени и на их основе указать решения задачи АКОР с повышенной точностью. Однако это в данной статье делать не будем, так как указанные модели при решении прикладных задач управления дают, как правило, приемлемую точность. Последнее утверждение следует из результата, установленного в работе [11]: *многомерная линеаризованная модель k степени позволяет описать свободное движение ($U(t) \equiv 0$) нелинейной системы (2.5) с точностью, соответствующей ее описанию k членами функционального ряда Вольтера (ФРВ).* Работы же по анализу нелинейных систем с использованием ФРВ утверждают [13], что применение трех членов ряда Вольтера обеспечивает, как правило, инженерную точность описания движения систем. Если дополнительно учесть, что в квазилинеаризованных моделях сохраняются все нелинейные слагаемые, содержащие сигналы управления, то можно утверждать, что модели (3.9) и (3.22) с более высокой точностью будут описывать вынужденные движения объекта (2.5) по сравнению с его свободными движениями.

Более того, точность квазилинеаризованных моделей (3.9), (3.22) можно существенно увеличить, если одновременно с многомерной линеаризацией использовать известные стандартные методы линеаризации (аппроксимации). Действительно, например, погрешность модели (3.9) можно уменьшить, если нелинейное слагаемое $(A_2 \otimes I_n + I_n \otimes A_2)[X(t) \otimes Y(t)]$ не исключать из модели (3.3), а провести его линейную или, строже говоря, полиномиальную аппроксимацию

$$(A_2 \otimes I_n + I_n \otimes A_2)[X(t) \otimes Y(t)] \simeq C_1X(t) + C_2Y(t), \quad (3.28)$$

определив матричные коэффициенты C_1, C_2 каким-либо известным методом (методом наименьших квадратов [1], методом равномерной (чебышевской) линеаризации [13]). При использовании линейной функции (3.28) в предлагаемом методе синтеза квазиоптимальных регуляторов произойдет только замена матрицы (3.13) на матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & A_1 \otimes I_n + I_n \otimes A_1 + C_2 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Аналогичным образом можно уменьшить погрешность и квазилинеаризованной модели (3.22), воспользовавшись аппроксимацией

$$A_{2[3]}(X \otimes Z) \simeq C_1X + C_2Y + C_3Z. \quad (3.30)$$

В этом случае при синтезе квазиоптимального регулятора необходимо будет заменить матрицу (3.25) на следующую:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & O_{n \times n^3} \\ O_{n^2 \times n} & A_{1[2]} & A_{2[2]} \\ C_1 & C_2 & A_{1[3]} + C_3 \end{pmatrix}. \qquad (3.31)$$

В связи с указанными причинами при синтезе квазиоптимальных регуляторов объектами (2.5) предлагается ограничиться моделями (3.9), (3.22) с матрицами параметров (3.13), (3.25) или (3.29), (3.31).

В предыдущих разделах было раскрыто содержание и дано обоснование предлагаемого метода синтеза квазиоптимальных регуляторов на основе совместного использования процедур многомерной и классической линеаризации. Теперь, обобщая полученные результаты, конкретизируем основные этапы его применения.

1. Задаются исходные данные для конструирования системы управления: матрицы параметров A_1, A_2 и B объекта управлении (2.5); матрицы Q, R критерия качества (2.2).

2. Проверяется условие применимости метода синтеза: по любой известной методике проверяется устойчивость матрицы A_1 (отрицательность вещественных частей ее собственных чисел). Если матрица A_1 устойчива, то метод применим; если нет, то проводится регуляризация описания объекта управления [1].

3. Проводится моделирование исходного объекта (2.5) и сравнение по точности его линеаризованных моделей (3.9), (3.22) с различными матрицами параметров (3.13), (3.27) или (3.29), (3.31). По этим результатам выбирается наиболее подходящая для синтеза квазилинеаризованная модель объекта.

4. Любым методом решается относительно P_+ матричное уравнение Ляпунова (3.11) с матрицами A, $Q_{[2]}$ (или $Q_{[3]}$), соответствующими выбранной линеаризованной модели объекта.

5. По формуле (3.15) или (3.23) определяется квазиоптимальный закон управления.

6. Осуществляется моделирование системы с синтезированным законом управления с последующей оценкой показателей качества переходных процессов системы.

7. При необходимости в целях получения требуемых заказчиком показателей качества системы управления пп. 4—6 повторяются при уточненных значениях матриц Q и R или дополнительно вводимых составляющих $(X^{[2]})^{\mathrm{T}} Q_4 X^{[2]}$, $(X^{[3]})^{\mathrm{T}} Q_6 X^{[3]}$ критерия качества (2.2).

4. Пример синтеза квазиоптимального регулятора

Решим предложенным методом задачу управления, сформулированную в работе [14], в которой для объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{222}x_2^2 + bu \end{cases} \qquad (4.1)$$

с параметрами $a_{11} = -0{,}1$, $a_{22} = -3$, $a_{222} = -1$, $b = 1$ определялось оптимальное управление по критерию обобщенной работы (2.2) с весовыми коэффициентами $q_{11} = 1$, $q_{22} = 1$, $R = r = 1$. Квазиоптимальный закон управления объектом (4.1), найденный стандартным методом степенных рядов с точностью до квадратичных составляющих, описывается выражением

$$u = -\frac{b}{2r}(A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2 + 2A_{122}x_1x_2 + 3A_{222}x_2^2) \qquad (4.2)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} &A_{11} = \frac{-q_{11}}{2a_{11}} = 5; \quad A_{12} = \frac{-2a_{12}A_{11}}{a_{11} + a_{22}} = 3,226; \\ &A_{22} = \frac{-(q_{22} + a_{12}A_{12})}{2a_{22}} = 0,704; \\ &A_{111} = A_{112} = 0; \quad A_{122} = -\frac{2a_{222}A_{12}}{a_{11} + 2a_{22}} = -0,529; \\ &A_{222} = -\frac{a_{12}A_{122} + 2a_{222}A_{22}}{3a_{22}} = -0,215. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Сравним управление (4.2) с решением задачи АКОР предложенным методом синтеза. Последовательно выполним его этапы.

1. Предварительно представим описание объекта (4.1) в принятой форме (2.5) с матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{222} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}. \qquad (4.4)$$

Соответственно критерий качества задается матрицами

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix},\ R = 1.$$

2. Так как матрица объекта

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

имеющая характеристическое уравнение $s^2 + 3{,}1s + 2{,}1 = 0$, согласно критерию Гурвица является устойчивой, то к решению рассматриваемой задачи АКОР можно применить предложенный метод.

3. При решении задачи управления воспользуемся линеаризованной моделью объекта второй степени (3.9) с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O_{n^2 \times n} & A_1 \otimes I_n + I_n \otimes A_1 \end{pmatrix}.$$

Предварительно определив ее подматрицу

$$A_1 \otimes I_2 + I_2 \otimes A_1 = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a_{11}+a_{22} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{11}+a_{22} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{22} \end{pmatrix},$$

находим данную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{222} \\ 0 & 0 & 2a_{11} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11}+a_{22} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}+a_{22} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -0,2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3,1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3,1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

4. Зная весовые коэффициенты критерия обобщенной работы $q_{11} = 1$, $q_{22} = 1$, составляем матрицу

$$Q_{[2]} = \begin{pmatrix} Q & O_{n \times n^2} \\ O_{n^2 \times n} & O_{n^2 \times n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Далее с использованием функции $P = lyap(A,\ Q)$ пакета MATLAB решаем уравнение Ляпунова (3.11) с матрицами (4.5) и (4.6):

$$P_+ = \begin{pmatrix} 5,0000 & 1,6129 & 0 & 0 & 0 & -0,2644 \\ 1,6129 & 0,7043 & 0 & 0 & 0 & -0,1076 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2644 & -0,1076 & 0 & 0 & 0 & 0,0179 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

5. По формуле (3.15) определяем искомый закон управления. Предварительно находим матрицы

$$B_{[2]}(X) = B(X) \otimes X + X \otimes B(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = (0 \quad bx_1 \quad bx_1 \quad 2bx_2)^{\mathrm{T}};$$

$$\bar{B}(X) = \begin{pmatrix} B(X) \\ B_{[2]}(X) \end{pmatrix} = (0 \quad b \quad 0 \quad bx_1 \quad bx_1 \quad 2bx_2)^{\mathrm{T}}.$$

Тогда квазиоптимальный закон управления принимает вид

$$U_{[2]}(X) = -R^{-1} \begin{pmatrix} B(X) \\ B_{[2]}(X) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} P_+ \begin{pmatrix} X \\ X \otimes X \end{pmatrix} = -2(0 \quad 1 \quad 0 \quad x_1 \quad x_1 \quad 2x_2) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 5,0000 & 1,6129 & 0 & 0 & 0 & -0,2644 \\ 1,6129 & 0,7043 & 0 & 0 & 0 & -0,1076 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2644 & -0,1076 & 0 & 0 & 0 & 0,0179 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1x_1 \\ x_1x_2 \\ x_2x_1 \\ x_2x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= -2(1,6129x_1 + 0,7043x_2 - 0,5288x_1x_2 - 0,3228x_2x_2 + 0,0358x_2^3). \quad (4.8)$$

Заметим, что значения коэффициентов при линейных и квадратичных слагаемых управления (4.8) совпадают со значениями коэффициентов (4.3) закона обратной связи (4.2). В связи с тем, что данное свойство метода наблюдалось и при решении задач АКОР более высокого порядка, был проведен сравнительный анализ алгоритмов предложенного метода синтеза и метода степенных рядов и доказано утверждение: метод синтеза, использующий квазилинеризованную модель k-й степени нелинейного объекта, определяет полиномиальную функцию обратной связи совпадающую с функцией, найденной стандартным методом степенных рядов, при удержании в алгоритмах управления полиномиальных слагаемых до k-й степени включительно.

Необходимо подчеркнуть, что управление (4.8) отличается от (4.2) дополнительным кубическим слагаемым, которое, как показало моделирование, может уменьшить значение функционала качества приблизительно до 10 %. Так, например, при отработке начального отклонения $X(0) = X_0 = (2,5; 0)^{\text{т}}$ системами с законами управления (4.2) и (4.8) функционал качества принимал соответственно значения $J = 32{,}066$; $J = 28{,}488$. Аналогично в общем случае можно показать, что предложенный метод синтеза за счет дополнительных нелинейных слагаемых закона управления, возникающих вследствие учета функциональной матрицы $\bar{B}(X)$ квазилинеризованной модели объекта, обеспечивает точность решения, существенно большую, чем стандартный метод степенных рядов с удержанием его членов до k-й степени включительно.

5. Заключение

На основе совместного использования методов многомерной и классической линеаризации описания объектов с полиномиальными нелинейностями разработан достаточно эффективный метод приближенного решения задачи АКОР для исследуемых объектов достаточно широкого для приложений класса. Его реализация отличается предельной простотой вследствие использования в основном известного программного обеспечения решения линейно-квадратичных задач оптимального управления.

Точность решения задачи АКОР определяется точностью выбираемой для исследуемого объекта квазилинеаризованной модели соответствующей степени ($k = 2, 3,...$). В связи с тем, что в линеаризованной модели k-й степени учитываются полиномиальные составляющие k-й степени исходного описания объекта управления, то предложенный метод синтеза обеспечивает точность решения не меньшую, чем стандартный метод степенных рядов с удержанием его членов до k-й степени включительно. Однако точность разработанного метода синтеза, как правило, существенно выше вследствие учета при конструировании регулятора функциональной матрицы $\bar{B}(V)$, зависящей от расширенного вектора состояния объекта, используемой квазилинеаризованной модели.

Список литературы

1. **Красовский А. А.** и др. Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987.

2. **Колесников А. А.** и др. Современная прикладная теория управления: В 3 т. Москва; Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000.

3. **Портер В. А.** Обзор теории нелинейных систем // ТИИЭР. 1976. Т. 64, № 1. С. 23—30.

4. **Сейдж Э. П., Уайт Ч. С.** Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982. 392 с.

5. **Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1998. 576 с.

6. **Красовский А. А., Буков В. И., Шендрик В. С.** Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными объектами. М.: Наука, 1977. 272 с.

7. **Буков В. Н.** Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987. 232 с.

8. **Филимонов Н. Б.** Проблема качества процессов управления: смена оптимизационной парадигмы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 12. С. 2—10.

9. **Уонем М.** Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. М.: Наука, 1980. 376 с.

10. **Ланкастер П.** Теория матриц. М.: Наука, 1982. 269 с.

11. **Ловчаков В. И., Ловчаков Е. В., Сухинин Б. В.** Метод многомерной линеаризации полиномиальных систем управления // Изв. ТулГУ. Сер. Технические науки. 2009. Вып. 1. Ч. 2. С. 18—26.

12. **Ловчаков В. И., Ловчаков Е. В., Шибякин О. А.** Многомерная линеаризация объектов управления с полиномиальными нелинейностями // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2018. Iss. 12 (в печати).

13. **Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С.** Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976. 448 с.

14. **Ловчаков В. И., Сухинин Б. В., Фомичев А. А., Феофилов Е. И.** Основы теории синтеза оптимальных систем управления электротехническими объектами: Уч. пособие с грифом УМО специальности. Тула, Издательство ТулГУ, 2009. 160 с.

Application of Multidimensional Linearization in Quasi-Optimal Controllers Synthesis in the Functional of Generalized Work

V. I. Lovchakov, lovvi50@mail.ru, Tula State University, Tula, 300600, Russian Federation

Corresponding author: **Lovchakov Vladimir I.,** Full Professor, Tula State University, department of electrical engineering and electrical equipment, Tula, 300600, Russian Federation, e-mail: lovvi50@mail.ru

Accepted on October 22, 2018

The paper investigates the task of the analytically design of an optimal controllers (ADOC) as defined by A. A. Krasovskij for stable multidimensional objects, which are described by matrix differential equations with polynomial non-linearity from phase coordinates. The investigated class of polynomial control objects has a wide application: these models are used to describe the motion of systems with a very different nature — electromechanical equipment, chemical reactors, industrial recycling facilities, biological and ecological systems, etc.

The most suitable task solution for the ADOC is the power series method, which in comparison with other methods, allows to finding control laws in widest range of the object's phase space. However, its realization is dealt with a large amount of calculations and it is less formalized, so it comparatively hard for programming. In this paper the quasi-optimal controller's synthesis method is suggested. It can reduce the disadvantages of the previously mentioned power series method. It uses the multidimensional linearization of polynomial objects procedure which implements extension of the object state space with new coordinates. These coordinates are the products of the original phase coordinates and the application of the matrix theory with the Kronecker product. The synthesis method can help to find an approximate ADOC task solution with a high degree of accuracy. The method is very easy to use, because it mainly based on uses of well-known software for the linear quadratic task solution in the optimal control.

The ADOC task solution accuracy is defined by the accuracy of the corresponding degree (k = 2, 3...) that chosen for the object of the quasi-linearized model under study. It must be noted, that the k^{th} power polynomial components of the control objects described, is considered in the k^{th} power linearized model. Therefore, suggested synthesis method provides an accurate solution as a common power series method, holding its terms to the k^{th} power inclusive. However, the devised synthesis method as a rule gives more accurate results, because it takes into account the functional matrix of the used quasilinear model of the object state augmented vector containing the original object's phase coordinates products.

Keywords: *control object, polynomial non-linearity, linearization of the model, functional of the generalized work, analytical design of optimal controllers (ADOC)*

For citation:

Lovchakov V. I. Application of Multidimensional Linearization in Quasi-optimal Controllers Synthesis in the Functional of Generalized Work, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2019, vol. 20, no. 3, pp. 131—142.

DOI: 10.17587/mau.20.131-142

References

1. **Krasovskij A. A.** *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravlenija* (Control Theory), Moscow, Nauka Publ., 1987 (in Russian).
2. **Kolesnikov A. A.** *Sovremennaja prikladnaja teorija upravlenija* (Modern Applied Control Theory), Moscow, Taganrog, TRTU Publ., 2000 (in Russian).
3. **Porter W. A.** The Review of the Non-linear Systems Theory, *IEEE Publ.,* 1976, vol. 64, no. 1, pp. 23—30 (in Russian).
4. **Sage A. P., White C. C.** Optimum Systems Control, Moscow, Radio i svjaz' Publ., 1982, 392 p. (in Russian).
5. **Afanas'ev V. N., Kolmanovskij V. B., Nosov V. R.** *Matematicheskaja teorija konstruirovanija sistem upravlenija* (Mathematical Theory of Control Systems' Design), Moscow, Vysshaja shkola Publ., 1998, 576 p. (in Russian).
6. **Krasovskij A. A., Bukov V. I., Shendrik V. S.** *Universal'nye algoritmy optimal'nogo upravlenija nepreryvnymi ob`ektami* (Universal Algorithms of the Optimum Continuous Object Control), Moscow, Nauka Publ., 1977, 272 p (in Russian).
7. **Bukov V. N.** *Adaptivnye prognozirujushhie sistemy upravlenija poletom* (Adaptive Predictive Flight-Control Systems), Moscow, Nauka Publ., 1987, 232 p. (in Russian).
8. **Filimonov N. B.** *Problema kachestva processov upravlenija: smena optimizacionnoj paradigmy* (Problem of quality of control processes: change of an optimising paradigm), *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2010, no. 12, pp. 2—10 (in Russian).
9. **Uonem M.** *Linejnye mnogomernye sistemy upravlenija. Geometricheskij podhod* (Linear multidimensional control systems. The geometrical approach), Moscow, Nauka, 1980, 376 p. (in Russian).
10. **Lankaster P.** *Teorija matric* (Matrix Theory), Moscow, Nauka Publ., 1982, 269 p. (in Russian).
11. **Lovchakov V. I., Lovchakov E. V., Suhinin B. V.** *Metod mnogomernoj linearizacii polinomial'nyh sistem upravlenija* (Linearization Method of the Polynomial Control Systems), Tula, *Izvestija TSU Publ.*, 2009, Tehnicheskie nauki Series, no. 1, part 2, pp. 18—26 (in Russian).
12. **Lovchakov V. I., Lovchakov E. V., Shibyakin O. A.** *Mnogomernaya linearizaciya ob"ektov upravleniya s polinomial'nymi nelinejnostyam* (Multidimensional linearization of control objects with polynomial nonlinearities), *Journal of Advanced Research in Technical Science*, 2018, iss. 12 (in print).
13. **Pupkov K. A., Kapalin V. I., Jushhenko A. S.** *Funkcional'nye rjady v teorii nelinejnyh system* (Series of Functions in the Non-linear systems Theory), Moscow, Nauka Publ., 1976, 448 p. (in Russian).
14. **Lovchakov V. I., Suhinin B. V., Fomichev A. A., Feofilov E. I.** *Osnovy teorii sinteza optimal'nyh sistem upravlenija jelektrotehnicheskimi ob`ektami* (Synthesis of the Optimum Control Systems for the Electrotechnical Objects: Fundamentals), Tula, TSU Publ., 2009, 160 p. (in Russian).