

Ю. И. Мышляев, канд. техн. наук, доц., uimysh@mail.ru,

Пью Чжо Кхаунг, аспирант, piyuawkhauung1985@gmail.com,

Я. А. Долгов, студент КФ МГТУ им. Н. Э. Баумана, yaroslaw2710@mail.ru

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, Калужский филиал

## Синтез алгоритмов слежения для линейных объектов с генерирующей моделью задающего сигнала

*Рассматривается класс линейных стационарных объектов со скалярным входом. Цель управления формулируется в виде слежения выхода объекта управления за заданным задающим воздействием. Для формирования генерирующей модели задающего воздействия используется принцип внутренней модели. Рассматривается решение подзадачи представления с заданной конечной точностью дискретизованного по времени задающего воздействия в форме линейного разложения по базисным функциям, соответствующим корням искомого характеристического многочлена дискретной линейной динамической системы (генератора). С использованием континуализации в пространстве состояния строится непрерывная, линейная генерирующая модель задающего сигнала с ненулевыми начальными условиями и входом, совпадающая по размерности с моделью объекта управления. Генерирующая модель позволяет сформулировать цель управления в виде слежения вектора состояния замкнутой системы за вектором состояния генерирующей модели. В общем случае генерирующая модель может быть неустойчивой. Поэтому желаемая скорость сходимости вектора ошибки слежения задается гурвицевой эталонной моделью. Разработанная методика получения генерирующей модели рассматривается в контексте решения общей задачи синтеза алгоритма слежения.*

**Ключевые слова:** генерирующая модель, стабилизация, задача слежения, метод структурного погружения, устойчивость, задающее воздействие

### Введение

В работе предлагается подход к синтезу алгоритмов слежения для линейных объектов управления (ОУ). В основе подхода лежит идея представления задающего сигнала в виде выхода линейной генерирующей модели, согласованной по размерности с вектором состояния ОУ. Подход позволяет повысить точность работы системы управления.

В работах [1, 4] приведены методика и результаты синтеза линейной обратной связи в предположении о возможности представления задающего сигнала в виде суммы порождающих функций, которые связаны с корнями обобщенного характеристического уравнения генерирующей модели. Однако в вышеуказанных работах отсутствует методика синтеза генерирующей модели для заданного задающего воздействия (получение характеристического многочлена, порождающих функций).

В публикуемой статье приведена методика формирования генерирующей модели требуемого порядка с начальными условиями и входным воздействием для заданной точности аппроксимации задающего сигнала. В основе синтеза лежит модифицированный метод структурного погружения [1, 3]. Разработанная методика получения генерирующей модели рассматривается в контексте решения общей задачи синтеза алгоритма слежения.

### Постановка задачи

Рассмотрим объект, представленный моделью состояния в форме Фробениуса

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $u \in R^1$ ,  $y \in R^1$ ,  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \\ -\alpha_0 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$ ;  $\mathbf{B} = (0 \dots b)^T$ ;  $\mathbf{C} = (1 \ 0 \dots 0)$ ;  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ ,  $b$  — постоянные параметры.

Пусть задающее воздействие  $f$  представлено графически или в табулированном виде на конечном интервале времени. Не умаляя общности, будем считать, что задающее воздействие имеет вид табулированной функции  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_{\bar{N}}\}$ , где  $f_i$  — значение функции в момент  $t_i$ ,  $i = \overline{1, \bar{N}}$ .

Ставится задача обеспечения заданного движения системы на конечном интервале времени с заданной точностью

$$|f(t_i) - y(t_i)| \leq \Delta, \forall t_i \in [0, T], \quad (2)$$

где  $\Delta > 0$  — точность слежения;  $T = \bar{N}h$  — конечное время;  $h = t_i - t_{i-1}$  — шаг дискретизации.

### Методика синтеза алгоритма управления

В основе методики лежит идея синтеза линейной непрерывной генерирующей модели

задающего сигнала  $f$ . Линейная форма генерирующей модели непосредственно связана с рассматриваемым классом линейных ОУ (1) и отражает возможность качественного решения поставленной задачи (отсутствия запаздывания, обеспечения требуемой точности и т.п.) для линейного ОУ [14].

Методика синтеза управления состоит из двух частей. В первой части по заданному воздействию  $f$  синтезируется генерирующая модель с выходом  $f_r(t)$ , который с точностью  $\Delta_r < \Delta$  совпадает с этим задающим воздействием на интервале  $t \in [0, T]$ .

Во второй части синтезируется линейная обратная связь объекта по ошибке между векторами состояния объекта управления и генерирующей модели задающего воздействия.

Генерирующая модель (ГМ) представляет собой систему, порядок которой совпадает с порядком объекта управления. ГМ обеспечивает генерацию собственного выходного сигнала  $f_r(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , аппроксимирующего с заданной точностью сигнал  $f$  так, что  $\|f(t_i) - f_r(t_i)\| \leq \Delta_r$ ,  $t_i \in [0, T]$ .

Используя полноту ГМ (существование единственного решения на полубесконечном интервале времени), можно рассмотреть следующую задачу слежения. Представим цель управления (ЦУ) как ограниченность траекторий замкнутой системы и обеспечение заданной точности в виде выполнения неравенства

$$|y(t) - f_r(t)| \leq \Delta_f, \quad \forall t \geq t_*. \quad (3)$$

Формализуем понятие ГМ.

**Определение** [14]. Генерирующей моделью назовем линейную систему, имеющую размерность и форму представления объекта (1) и генерирующую на выходе сигнал вида

$$\begin{aligned} f_r(t) &= \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) + v(t) = \\ &= \sum_{i=1}^r \left( c_i e^{(\lambda_i + j\omega_i)t} + c_i^* e^{(\lambda_i - j\omega_i)t} \right) + v(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a_i = 2 \sum_{k=0}^{p_i-1} \tilde{c}_{ik} t^k$ ;  $b_i = -2 \sum_{k=0}^{p_i-1} \tilde{c}_{ik}^* t^k$ ;  $c_i = \tilde{c}_{ik} + j\tilde{c}_{ik}^*$ ;  $c_i^* = \tilde{c}_{ik} - j\tilde{c}_{ik}^*$ ;  $p_i$  — кратность  $i$ -го корня или пары комплексно-сопряженных корней;  $|v(t)| \leq \Delta_v$ ,  $\Delta_v$  — ошибка аппроксимации.

Предполагается, что структура задающего сигнала на ограниченном временном интервале может быть представлена меньшим ограниченным числом смешанных базисных функций (полиномиальных, гармонических, экспоненциальных и др.) по сравнению с ограниченным рядом базисных функций одного вида [16].

Пусть  $\lambda_i \pm j\omega_i$ ,  $i = \overline{0, r}$ , — взаимно-простые корни некоторого характеристического уравнения. Для определенности будем считать, что среди этих корней  $l_1$  вещественных и  $l_2$  пар комплексно-сопряженных с кратностью  $p_i$ . Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$\prod_{i=1}^{l_1} (s - \lambda_i)^{p_i} \prod_{m=1}^{l_2} (s - \lambda_m + j\omega_m)^{p_m} \times \quad (5)$$

$$\times (s - \lambda_m - j\omega_m)^{p_m} = s^N + \beta_{l-1} s^{N-1} + \dots + \beta_0 = 0,$$

где  $r = l_1 + l_2$ ,  $\beta_i$  — коэффициенты, определяемые корнями характеристического уравнения; порядок уравнения равен  $N = \sum_{i=1}^{l_1} p_i + \sum_{m=1}^{l_2} 2p_m$  в зависимости от числа вещественных и комплексно-сопряженных корней.

Заметим, что представление (4) предполагает ограниченность основного спектра частот  $\omega_{f_r}$ .

Характеристическое уравнение (5) определяет линейное однородное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^N}{dt^N} y_r(t) + \beta_{N-1} \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y_r(t) + \dots + \beta_0 y_r(t) = 0, \quad (6)$$

решение которого имеет вид

$$y_r(t) = \sum_{i=1}^N \left( C_i e^{(\lambda_i + j\omega_i)t} + C_i^* e^{(\lambda_i - j\omega_i)t} \right). \quad (7)$$

Сравнивая равенства (4) и (7), заключаем, что  $|y_r(t) - f_r(t)| \leq \Delta_v$  при  $C_i = c_i$ ,  $C_i^* = c_i^*$ ,  $i = \overline{0, N}$ , где  $C_i = \tilde{C}_{ik} + j\tilde{C}_{ik}^*$ ,  $C_i^* = \tilde{C}_{ik} - j\tilde{C}_{ik}^*$ ,  $\tilde{C}_{ik} = \tilde{c}_{ik}$ ,  $\tilde{C}_{ik}^* = \tilde{c}_{ik}^*$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ , что обеспечивается выбором начальных условий

$$\begin{aligned} y_r(0) &= \sum_{i=1}^N 2 \operatorname{Re}\{c_i\} = \sum_{i=1}^N 2\tilde{c}_{ik} = \sum_{i=1}^N a_i; \\ y_r(0)'_i &= \sum_{i=1}^N 2 \operatorname{Re}\{(\tilde{c}_{ik} + j\tilde{c}_{ik}^*)(\lambda_i + j\omega_i)\} = \\ &= \sum_{i=1}^N 2(\tilde{c}_{ik}\lambda_i - \tilde{c}_{ik}^*\omega_i) = \sum_{i=1}^N (a_i\lambda_i + b_i\omega_i); \end{aligned} \quad (8)$$

.....

$$y_r(0)^{(N-1)}_i = \sum_{i=1}^N 2 \operatorname{Re}\{(\tilde{c}_{ik} + j\tilde{c}_{ik}^*)(\lambda_i + j\omega_i)^{N-1}\}.$$

В общем случае генерирующую модель  $n$ -го порядка можно представить в форме Фробениуса

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r \eta, \quad y_r = \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r, \quad (9)$$

где  $\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \\ -\tilde{\beta}_0 & \dots & -\tilde{\beta}_{n-1} \end{pmatrix}$ ;  $\mathbf{B}_r = (0 \dots 1)^T$ ;  $\mathbf{C}_r = (1 \ 0 \dots 0)$ ;  $\mathbf{x}_r(0) = (y_r(0) \dots y_r(0)^{(n-1)})^T$  — вектор начальных условий;  $-\tilde{\beta}_0 \dots -\tilde{\beta}_{n-1}$  — коэффициенты, выбираемые из уравнения (5) по



$$\alpha_{li} = \frac{(\mathbf{f}_l, \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_i\|^2}, \quad (13)$$

где интервалы изменения индексов определяются в соответствии с индексами матрицы  $\mathbf{Z}$ ,  $l = \overline{2, N+1}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Данные коэффициенты формируют верхне-треугольную матрицу  $\mathbf{R}$ . Таким образом, получено указанное выше разложение  $\mathbf{Z} = \mathbf{QR}$ .

В процессе ортогонализации для индекса  $m = N + 1$  проверяется условие  $\|\mathbf{q}_{N+1}\| < \delta$ , где  $\delta$  — заданная сколь угодно малая положительная величина. Таким образом, матрица  $\mathbf{Z}$  расширяется до тех пор, пока норма очередного ортогонального вектора не станет меньше заданной константы, что характеризует вырожденность матрицы  $\mathbf{Z}$ . При этом  $N$  — искомое число членов разностного уравнения (10).

*Этап 2. Вычисление коэффициентов модели дискретного сигнала.* Из системы уравнений (11) последовательно выразим векторы ортогонального базиса через исходный базис  $\{\mathbf{f}_j\}$ , при этом учтем, что норма последнего ортогонального вектора  $\|\mathbf{q}_{N+1}\| \approx 0$ , а значит, получаем линейно выраженную комбинацию вектора  $\mathbf{f}_m$  через базис  $\{\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_{m-1}\}$ . Учитывая (13), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \mathbf{f}_1, \\ \mathbf{q}_2 &= \mathbf{f}_2 - \alpha_{21}\mathbf{f}_1, \\ &\dots \\ \mathbf{q}_m &= \mathbf{f}_m - \alpha_{m,1}\mathbf{f}_1 - \dots - \alpha_{m,m-1}\mathbf{f}_{m-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя условие линейной зависимости столбца  $\mathbf{f}_1$  от векторов базиса  $\{\mathbf{f}_2 \dots \mathbf{f}_{N+1}\}$ , из соотношения (14) получаем окончательные коэффициенты для такого линейного разложения:

$$\begin{aligned} a_{N,N} &= \alpha_{N+1,N}, \\ &\dots \\ a_{N,j} &= \alpha_{N+1,j} - \alpha_{N,j}a_{N,N} - \dots - \alpha_{j+1,j}a_{N,j+1}, \\ a_{N,1} &= \alpha_{N+1,1} - \alpha_{N,1}a_{N,N} - \dots - \alpha_{2,1}a_{N,2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, идентификация минимальной структуры модели исходного процесса (любой другой функции или характеристики) на основе МСП позволяет определить наименьшую размерность  $N$  параметрической модели и сформировать базисные функции анализируемого процесса, справедливые для ограниченного интервала времени  $t \in [0, T]$ , где  $T = (2N + 1)h$ ,  $h$  — период и шаг дискретизации по времени соответственно.

*Этап 3. Определение начальных условий и оценивание точности аппроксимации.* Определим искомую модель измерений в векторно-матричной форме. Для этого к уравнению дис-

кретного сигнала формально добавим строки, связывающие векторы  $k$ -х и  $(k - 1)$ -х измерений. В векторно-матричной форме получим

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{A}_f \mathbf{F}_{k-1}, \quad (16)$$

где  $\mathbf{F}_k = (f_k f_{k-1} \dots f_{k-N+1})^T$ ,  $\mathbf{F}_{k-1} = (f_{k-1} f_{k-2} \dots f_{k-N})^T$ ,

$$\mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} a_{N,N-1} & \dots & a_{N,1} & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Окончательно найдем следующее матричное представление модели исходного сигнала в  $k$ -й момент времени:

$$f_{k+1} = \mathbf{A}_f f_k. \quad (18)$$

Используя рекуррентные соотношения (16), (18) на выборке из  $N + w$  измерений, где  $w = 2j + 1$  — ширина окна наблюдений измеряемого сигнала, и процедуру метода наименьших квадратов, можно найти оценку начального вектора  $\mathbf{G}$ :

$$\widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \bar{\mathbf{f}}, \quad (19)$$

где  $\mathbf{F}\mathbf{F}^T = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T$ ,  $\bar{\mathbf{f}} = (f_{N+1} \dots f_1)^T$ ,

$$\mathbf{F}^T = (\mathbf{B}\mathbf{F}_g^N \quad \mathbf{B}\mathbf{F}_g^{N-1} \quad \dots \quad \mathbf{B}\mathbf{F}_g \quad \mathbf{B}),$$

где  $\mathbf{B} = (a_{N-1} \dots a_0)$ .

На основе полученных оценок рассчитывается методическая ошибка, которая характеризует осредненную величину — "несимметричность" аппроксимации измерений авторегрессионной моделью (10) на выборке из  $N$  измерений:

$$\Delta_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \widehat{f}_i)^2, \quad (20)$$

где  $\Delta_r$  — ошибка генерации.

*Этап 4. Получение генерирующей модели в непрерывной области.* Из разностного уравнения следует, что характеристическое уравнение для исходного сигнала в  $z$ -области имеет вид

$$\begin{aligned} Q(z) &= \prod_{i=1}^N (z - \lambda_{z_i}) = \\ &= z^N - a_{N,1}z^{N-1} - \dots - a_{N,N-1}z - a_{N,N} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\lambda_{z_i}$  — корни характеристического уравнения (21).

Проведем операцию континуализации (перехода из дискретной области в непрерывную), используя формулу  $z$ -преобразования  $z = e^{sh} \Rightarrow \lambda_{z_i} = e^{\lambda_{s_i} h}$ , где  $h$  — шаг дискретизации.

Найдем корни характеристического уравнения в непрерывной области. Получим

$$P(s) = \prod_{i=1}^N (s - \lambda_{s_i}) = s^N + \beta_{N-1}s^{N-1} + \dots + \beta_{N-2}s - \beta_0 = 0, \quad (22)$$

где  $\lambda_{s_i} = \frac{1}{h} \ln \lambda_{z_i}$ .

Таким образом, имеем характеристический многочлен в форме (5). Выбирая из  $N$  корней  $\lambda_{s_i}$  необходимое число корней  $n \leq N$  или добавляя устойчивые "быстрые" корни при  $n > N$ , согласовывая начальные условия, формируя входное воздействие  $\eta$ , получаем генерирующую модель в форме (9). Подробнее процедура формирования генерирующей модели описана в работе [14].

### Синтез обратной связи

Не умаляя общности результата синтеза, будем считать, что модель генерирующей системы задана в форме (9). Введем модель ошибки между объектом (1) и генерирующей моделью (9)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r - \mathbf{B}_r\eta; \\ y_\varepsilon &= \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r$  — вектор ошибки по состоянию.

Заметим, что матрица  $\mathbf{A}_r$  в общем случае не является гурвицевой. Этот факт не позволяет использовать генерирующую модель в качестве эталонной модели, например, при синтезе модального управления.

Введем эталонную модель стремления ошибки к нулю в виде

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varepsilon = \mathbf{A}_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}_\varepsilon, \quad (24)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}_\varepsilon \in R^n$ ,  $\mathbf{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_{n-1} \\ -a_0^\varepsilon & \dots & -a_{n-1}^\varepsilon \end{pmatrix}$  — гурвицевая матрица с заданным расположением собственных чисел. Выберем начальные условия нулевыми  $\boldsymbol{\varepsilon}_\varepsilon(0) = 0$ .

Введем дополнительную цель управления (ДЦУ):

$$\mathbf{e} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (25)$$

где  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\varepsilon$  — невязка.

Составим динамическую модель невязки

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r - \mathbf{B}_r\eta - \mathbf{A}_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}_\varepsilon \pm \mathbf{A}_\varepsilon\mathbf{e} = \\ &= \mathbf{A}_\varepsilon\mathbf{e} + \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r - \mathbf{B}_r\eta - \mathbf{A}_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon} = \\ &= \mathbf{A}_\varepsilon\mathbf{e} + (\mathbf{A} - \mathbf{A}_\varepsilon)\mathbf{x} + (\mathbf{A}_\varepsilon - \mathbf{A}_r)\mathbf{x}_r + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{B}_r\eta. \end{aligned} \quad (26)$$

Выберем управление из условия

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = (\mathbf{A}_\varepsilon - \mathbf{A})\mathbf{x} + (\mathbf{A}_r - \mathbf{A}_\varepsilon)\mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r\eta. \quad (27)$$

Существование решения уравнения (27) относительно  $\mathbf{u}$  гарантируется управляемостью объекта (1), согласованностью структур матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}_r$ ,  $\mathbf{A}_\varepsilon$  и матриц  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}_r$  соответственно. Алгоритм управления имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}_x\mathbf{x} + \mathbf{k}_r\mathbf{x}_r + k_\eta\eta, \quad (28)$$

где матрицы и коэффициент алгоритма управления выбираются из условий

$$\mathbf{B}\mathbf{k}_x = \mathbf{A}_\varepsilon - \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}\mathbf{k}_r = \mathbf{A}_r - \mathbf{A}_\varepsilon, \quad \mathbf{B}k_\eta = \mathbf{B}_r.$$

Подставляя соотношение (28) в выражение (26), получаем  $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_\varepsilon\mathbf{e}$  и, в силу гурвицевости матрицы  $\mathbf{A}_\varepsilon$ , ДЦУ (25) достигается. Из  $\mathbf{e} \rightarrow 0$  следует, что  $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\varepsilon \rightarrow 0$  и, в силу гурвицевости эталонной модели (24),  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r \rightarrow 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_r$ . Таким образом, ЦУ (2) достигается.

Ограниченность траекторий при любых ограниченных начальных условиях  $\mathbf{x}(0)$  вытекает из ограниченности  $\mathbf{x}_r(0)$ , что, в свою очередь, гарантируется ограниченностью правой части разложения (4) и ограниченностью ее производных по времени.

Заметим, что входящий в управление (28) вектор  $\mathbf{x}_r$  на практике не реализуем в форме состояния, находящейся на границе устойчивости генерирующей системы (9). Однако описание системы (9) в форме Фробениуса позволяет использовать вместо него вектор  $\boldsymbol{\varphi}$ , сформированный из  $f_r(t)$  и его производных так, что  $\mathbf{x}_r(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ . Реализуемое управление имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}_x\mathbf{x} + \mathbf{k}_r\boldsymbol{\varphi} + k_\eta\eta, \quad (29)$$

где  $\boldsymbol{\varphi} = (f_r, f_r', \dots, f_r^{(n-1)})^T$ .

**Теорема.** В замкнутой системе (1), (29) достигается цель управления  $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\varphi}$  при  $t \rightarrow \infty$ , траектории системы ограничены при любых ограниченных начальных условиях и справедлива оценка

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t)^T \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}(t) \leq \boldsymbol{\varepsilon}(0)^T \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}(0) e^{-\rho t},$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T > 0: \mathbf{H}\mathbf{A}_\varepsilon + \mathbf{A}_\varepsilon^T\mathbf{H} = \mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T > 0$ ,  $\rho = \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{G})}{\lambda_{\max}(\mathbf{H})} > 0$ ;  $\lambda_{\min}(\mathbf{G})$ ,  $\lambda_{\max}(\mathbf{H})$  — минимальное и максимальное собственное число матрицы.

*Замечания.* Переменные состояния  $\mathbf{x}_r$ ,  $\mathbf{x}_\varepsilon$  непосредственно не входят в алгоритм управления (29). Однако формировать генерирующую модель (5) необходимо для определения задающего воздействия  $\eta$  и матриц  $\mathbf{A}_r$ ,  $\mathbf{B}_r$ , которые наряду с матрицей эталонной модели  $\mathbf{A}_\varepsilon$  формируют параметры алгоритма управления (29).

Собственные числа матрицы  $\mathbf{A}_3$  определяют скорость слежения и значение перерегулирования.

### Методический пример

Объект управления 3-го порядка описывается уравнением в форме Фробениуса (1)

$$\text{с матрицами } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix},$$

$\mathbf{C} = (1 \ 0 \ 0)$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 2$  и начальными условиями  $x_1(0) = 42$ ,  $x_2(0) = 0,5$ ,  $x_3(0) = 0$ .

Желаемый выход задан в табулированном виде с шагом дискретизации  $h = 1,5$  и представлен на рис. 1. Зададим точность ортогонализации  $\delta \leq 10^{-8}$ . Требуется обеспечить достижение цели управления (2). Проведем дискретизацию (если  $f$  задано графически) задающего воздействия  $f$  с учетом теоремы Шеннона — Котельникова.

Сформируем матрицу  $\mathbf{Z}$ . Для  $N = 3$  имеем

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 36,5330 & 37,6205 & 38,5149 & 39,2065 \\ 37,6205 & 38,5149 & 39,2065 & 39,6876 \\ 38,5149 & 39,2065 & 39,6876 & 39,9531 \\ 39,2065 & 39,6876 & 39,9531 & 40 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ортогональные векторы по алгоритму Грама — Шмидта. Получим матрицу  $\mathbf{Q}$  следующего вида:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 36,5330 & 0,3348 & 6,3404 \cdot 10^{-4} & -2,5662 \cdot 10^{-9} \\ 37,6205 & 0,1194 & -6,2012 \cdot 10^{-4} & 2,5043 \cdot 10^{-9} \\ 38,5149 & -0,1018 & -6,2531 \cdot 10^{-4} & 2,5281 \cdot 10^{-9} \\ 39,2065 & -0,3265 & 6,1851 \cdot 10^{-4} & -2,4953 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}.$$

Точность ортогонализации равна  $\delta = 3,979 \cdot 10^{-11}$ .

Найдем коэффициенты линейного разложения по формулам (14), (15). Характеристический полином желаемого сигнала в этом случае имеет вид

$$Q = z^3 - 2,9890z^2 + 2,98905z - 1.$$

Проведем оценку полученных результатов (рис. 2).

Ошибка генерации:  $\Delta_r = 8,7784 \cdot 10^{-9}$ .

Генерирующая модель должна иметь 3-й порядок. Найдем корни характеристического уравнения  $P(s)$  в непрерывной области. Используя формулу  $z$ -преобразования  $z = e^{sh} \Rightarrow \lambda_{z_i} = e^{\lambda_{s_i} h}$ , получим  $\lambda_{s0} = 0,0000019$ ,  $\lambda_{s1,s2} = \pm j \cdot 0,100000281$ .

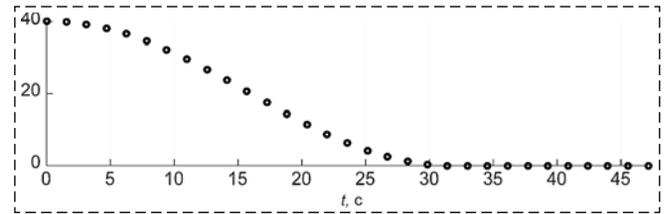


Рис. 1. График задающего воздействия  $f$   
Fig. 1. Graph of input reference  $f$

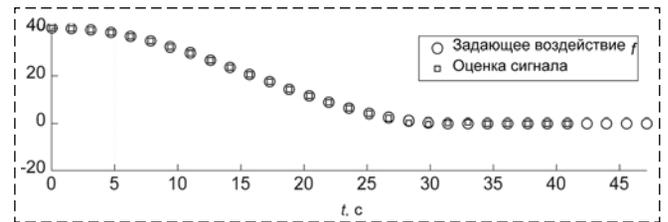


Рис. 2. Графики задающего воздействия  $f$  и его оценки при  $N = 3$   
Fig. 2. Graphs of input reference  $f$  and its estimation for  $N = 3$

Генерирующая модель (5) будет иметь матрицы вида

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = 0,01$ ,  $\beta_2 = 0$ . Определим начальные условия для генерирующей модели, соответствующие второму и третьему слагаемому  $P(s) = s^3 + 0,01s$ .

Зададим желаемые собственные числа в виде  $\lambda_{0,1,2}^3 = -1$  и сформируем матрицу эталонной модели в виде

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0^3 & -a_1^3 & -a_2^3 \end{pmatrix},$$

где  $a_0^3 = 1$ ,  $a_1^3 = 3$ ,  $a_2^3 = 3$ . Параметры алгоритма управления определим по формулам

$$k_{x_1} = \frac{\alpha_0 - a_0^3}{b}; \quad k_{x_2} = \frac{\alpha_1 - a_1^3}{b}; \quad k_{x_3} = \frac{\alpha_2 - a_2^3}{b};$$

$$k_{r1} = \frac{a_0^3 - \beta_0}{b}; \quad k_{r2} = \frac{a_1^3 - \beta_1}{b}; \quad k_{r3} = \frac{a_2^3 - \beta_2}{b};$$

$$\mathbf{k}_x = (k_{x_1} \ k_{x_2} \ k_{x_3}); \quad \mathbf{k}_r = (k_{r1} \ k_{r2} \ k_{r3}).$$

Задающее воздействие для алгоритма управления имеет вид:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} c_0 + c_1 e^{\lambda_{s1} t} + c_2 e^{\lambda_{s2} t} \\ c_1 \lambda_{s1} e^{\lambda_{s1} t} + c_2 \lambda_{s2} e^{\lambda_{s2} t} \\ c_1 \lambda_{s1}^2 e^{\lambda_{s1} t} + c_2 \lambda_{s2}^2 e^{\lambda_{s2} t} \end{pmatrix},$$

где  $c_0 = 20,179$ ,  $c_1 = 10,069$ ,  $c_2 = 10,069$ . Выход генерирующей модели показан на рис. 3. Управление имеет вид

$$u = k_x x + k_\phi \phi.$$

На рис. 4–7 приведены результаты моделирования замкнутой системы в относительных единицах.

Из рис. 4 видно, что достигается цель управления (2). Из рис. 7 видно, что вектор ошибок по состоянию стремится к нулю.

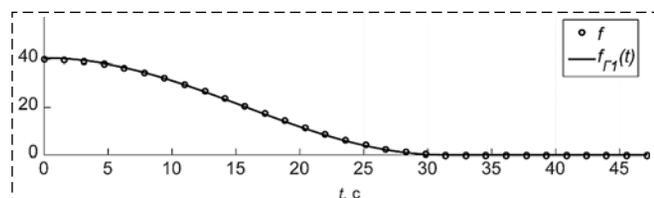


Рис. 3. Графики задающего воздействия  $f$  и выхода ГМ  
Fig. 3. Graphs of input reference  $f$  and output of generating model

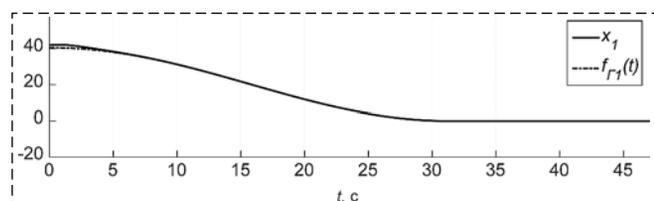


Рис. 4. Графики координат объекта и выхода ГМ  
Fig. 4. Graphs of coordinates of object and output of generating model

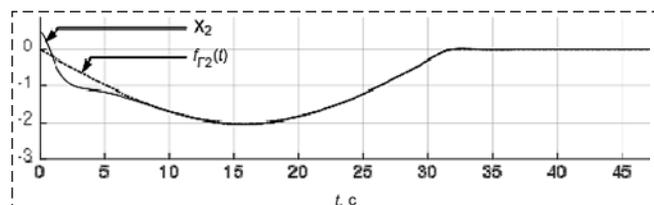


Рис. 5. Графики скорости объекта и производной выхода ГМ  
Fig. 5. Graphs of velocity of object and output derivative of generating model

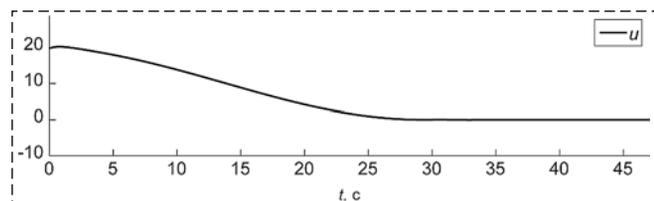


Рис. 6. График управления  
Fig. 6. Graph of control signal

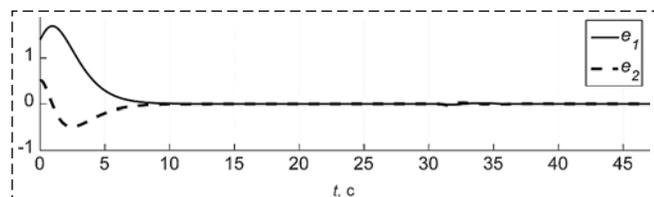


Рис. 7. Графики ошибок по состоянию  
Fig. 7. Graphs of errors by position

## Заключение

В работе представлена методика формирования генерирующей модели задающего воздействия с использованием модифицированного метода структурного погружения. Приведена методика синтеза алгоритма слежения с использованием генерирующей модели. Полученное управление обеспечивает отсутствие запаздывания и повышает точность работы системы управления.

## Список литературы

1. Johnson C. D. Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1971. Vol. 16, N. 6. P. 635–644.
2. Джонсон С. Д. Теория регуляторов, приспособляющихся к возмущениям. Гл. VII // Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К. Т. Леондеса. М.: Мир, 1980. С. 253–320.
3. Уонем У. М. Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М.: Наука, 1980. 376 с.
4. Филимонов Н. Б. Идентификация состояния и внешней среды дискретных динамических объектов методом полиэдрального программирования // Мехатроника, автоматизация, управление. 2003. № 2. С. 11–15.
5. Francis B. A., Wonham W. M. The internal model principle for linear multivariable regulators // Applied Mathematics and Optimization. 1975, Vol. 2, N. 2. P. 170–194.
6. Davison E. J. The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1976. Vol. 21. N. 1. P. 25–34.
7. Лукьянова Г. В., Никифоров В. О. Алгоритм компенсации внешних детерминированных возмущений: операторный метод синтеза // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО, 2003. № 10. С. 5–10.
8. Di Benedetto M. D. Synthesis of an internal model for nonlinear output regulation // International Journal of Control. 1987. Vol. 45, N. 3. P. 1023–1034.
9. Khalil H. K. Robust servomechanism output feedback controller for feedback linearizable systems // Automatica. 1994. Vol. 30, N. 10. P. 1587–1599.
10. Никифоров В. О. Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений // Известия РАН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 69–73.
11. Никифоров В. О. Адаптивная стабилизация линейного объекта, подверженного внешним детерминированным возмущениям // Известия РАН. Теория и системы управления. 1997. № 2. С. 103–106.
12. Nikiforov V. O. Adaptive non-linear tracking with complete compensation of unknown disturbances // European Journal of Control. 1998. Vol. 4. N. 2. P. 132–139.
13. Nikiforov V. O. Nonlinear servocompensation of unknown external disturbances // Automatica. 2001. Vol. 37. P. 1647–1653.
14. Мышляев Ю. И. Об одном подходе к решению задачи слежения с желаемой спектральной динамикой // Труды ФГУП "НПЦАП им. академика Н. А. Пилюгина". Системы и приборы управления. 2016. № 4. С. 5–11.
15. Утробин Г. Ф., Коляда Ю. И., Журавлев Р. Д. Оперативное определение порядка и коэффициентов нестационарной волновой структуры измеряемого сигнала // Приборостроение, 1989, № 5. С. 3–7.
16. Утробин Г. Ф., Мышляев Ю. И., Краснощеченко В. И., Мышляева С. В. Фильтрация дискретных сигналов методом структурного погружения // Труды ФГУП "НПЦАП им. академика Н. А. Пилюгина". Системы и приборы управления. 2016. № 2. С. 36–44.
17. Мышляев Ю. И., Тар Яр Мио. Алгоритмы скоростного биградиента для линейных систем с желаемой спектральной динамикой по выходу конечного каскада // Экономика и менеджмент систем управления. 2016. № 3.1(21). С. 183–191.

# Synthesis of Tracking Algorithms for Linear Objects with a Generative Model of the Reference Signal

Ju. I. Myshljaev, uimysh@mail.ru, Pyi Kyaw Khaung, pyikyawkhaung1985@gmail.com,

Ja. A. Dolgov, yaroslaw2710@mail.ru,

Bauman Moscow State Technical University, Kaluga Branch, Kaluga, 248000, Russian Federation

Corresponding author: Myshljaev Jury I., Ph.D., Senior lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Kaluga Branch, Kaluga, 248000, Russian Federation, e-mail: uimysh@mail.ru

Accepted on August 22, 2018

## Abstract

In the article the class of linear stationary objects with a scalar input is considered. The purpose of control is formulated in the form of tracking the output of the control object for a given input reference. At the same time, the principle of the internal model is used to form a generating model of the input reference. The solution of the representation subtask with a predetermined finite precision of a time-discretized input reference in the form of a linear expansion on the basic functions corresponding to the roots of the desired characteristic polynomial of a discrete linear dynamic system (generator) is considered. By using the continualization, a continuous, linear generating model of the input reference with non-zero initial conditions and input is constructed in the state space, coinciding in dimension with the model of the control object. The generating model makes it possible to formulate the control goal in the form of tracking the state vector of a closed system with the state vector of the generating model. In general, the generating model may not be stable. Therefore, the desired rate of convergence of the tracking error vector is given by the Hurwitz reference model. The developed method of generating the generating model is considered in the context of solving the general problem of the synthesis of the tracking algorithm.

**Keywords:** generative model, stabilization, tracking task, structural immersion method, stability, input reference

For citation:

Myshljaev Ju. I., Pyi Kyaw Khaung, Dolgov Ja. A. Synthesis of Tracking Algorithms for Linear Objects with a Generative Model of the Reference Signal, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 72–79.

DOI: 10.17587/mau.20.72-79

## References

1. Johnson C. D. Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, vol. 16, no. 6, pp. 635–644.
2. Johnson C. D. *Teoriya reguljatorov, prisposabljajushhijhja k vozmushhenijam. Gl. VII v kn.: Fil'tracija i stohasticheskoe upravlenie v dinamičeskikh sistemah* (Theory of regulators adapting to disturbances. Ch. VII // Filtration and stochastic control in dynamic systems). Moscow, Mir, 1980, pp. 253–320 (in Russian).
3. Wonham W. M. *Linejnye mnogomernye sistemy upravlenija: Geometričeskij podhod* (Linear multidimensional control systems: Geometric approach), Moscow, Nauka, 1980, 376 p. (in Russian).
4. Filimonov N. B. *Identifikacija sostojanija i vneshej sredy diskretnyh dinamičeskikh ob'ektov metodom polijedral'nogo programirovanija* (Identification of the state and environment of discrete dynamic objects by the method of polyhedral programming), *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2003, no. 2, pp. 11–15 (in Russian).
5. Francis B. A., Wonham W. M. The internal model principle for linear multivariable regulators, *Applied Mathematics and Optimization*, 1975, vol. 2, no. 2, pp. 170–194.
6. Davison E. J. The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, vol. 21, no. 1, pp. 25–34.
7. Luk'janova G. V., Nikiforov V. O. *Algoritm kompensacii vneshnih determinirovannyh vozmushhenij: operatornyj metod sinteza* (Algorithm for Compensating External Deterministic Perturbations: Operator Method of Synthesis), *Nauchno-tehnicheskij vestnik SPbGU ITMO*, 2003, no. 10, pp. 5–10 (in Russian).
8. Di Benedetto M. D. Synthesis of an internal model for nonlinear output regulation, *International Journal of Control*, 1987, vol. 45, no. 3, pp. 1023–1034.
9. Khalil H. K. Robust servomechanism output feedback controller for feedback linearizable systems, *Automatica*, 1994, vol. 30, no. 10, pp. 1587–1599.
10. Nikiforov V. O. *Nelinejnaja sistema upravlenija s kompensaciej vneshnih determinirovannyh vozmushhenij* (Nonlinear control system with compensation of external deterministic disturbances), *Izvestija RAN. Teoriya i sistemy upravlenija*, 1997, no. 4, pp. 69–73 (in Russian).
11. Nikiforov V. O. *Adaptivnaja stabilizacija linejnogo ob'ekta, podverzhennogo vneshnim determinirovannym vozmushhenijam* (Adaptive stabilization of a linear object subject to external deterministic disturbances), *Izvestija RAN. Teoriya i sistemy upravlenija*, 1997, no. 2, pp. 103–106 (in Russian).
12. Nikiforov V. O. Adaptive non-linear tracking with complete compensation of unknown disturbances, *European Journal of Control*, 1998, vol. 4, no. 2, pp. 132–139.
13. Nikiforov V. O. Nonlinear servocompensation of unknown external disturbances, *Automatica*, 2001, vol. 37, pp. 1647–1653.
14. Myshljaev Ju. I. *Ob odnom podhode k resheniju zadachi slezhenija s zhelaemoj spektral'noj dinamikoj* (On one approach to solving the tracking problem with the desired spectral dynamics), *Trudy FGUP "NPCAP im. akademika N. A. Piljugina". Sistemy i pribory upravlenija*, 2016, no. 4, pp. 5–11 (in Russian).
15. Utrobin G. F., Koljada Ju. I., Zhuravlev R. D. *Operativnoe opredelenie porjadka i koeficientov nestacionarnoj volnnoj struktury izmerjaemogo signala* (Operative determination of the order and coefficients of the unsteady wave structure of the measured signal), *Priboroostroenie*, 1989, no. 5, pp. 3–7 (in Russian).
16. Utrobin G. F., Myshljaev Ju. I., Krasnoshhechenko V. I., Myshljaeva S. V. *Fil'tracija diskretnyh signalov metodom strukturnogo pogruchenija*, *Trudy FGUP "NPCAP im. akademika N. A. Piljugina". Sistemy i pribory upravlenija*, 2016, no. 2, pp. 36–44 (in Russian).
17. Myshljaev Ju. I., Tar Yar Myo. *Algoritmy skorostnogo bi-gradijenta dlja linejnyh sistem s zhelaemoj spektral'noj dinamikoj po vyvodu konečnogo kaskada* (Filtering Discrete Signals by Structural Immersion), *Jekonomika i menedzhment sistem upravlenija*, 2016, no. 3.1(21), pp. 183–191 (in Russian).