

А. Р. Гайдук, д-р техн. наук, проф., gaiduk_2003@mail.ru,
Южный федеральный университет, Кисловодский гуманитарно-технический институт

Синтез астатических цифровых систем с применением стандартных нормированных передаточных функций¹

Системы управления с повышенным порядком астатизма обеспечивают более высокую точность, и поэтому их применение является целесообразным при решении многих задач управления. В особенности это относится к цифровым системам, которые обладают более высокой технологичностью и надежностью. Однако задача синтеза цифровых систем несколько сложнее по сравнению с аналогичной задачей в непрерывном случае. Статья посвящена решению задачи синтеза дискретных автоматических систем, реализация которых осуществляется на основе принципа управления по выходу и воздействиям. Стандартные нормированные передаточные функции (СНПФ) являются удобным средством для решения задачи синтеза систем управления с заданными прямыми показателями качества. Метод формирования желаемых передаточных функций цифровых систем управления на основе СНПФ непрерывных систем предлагается в данной статье. Этот метод является следствием доказанной в статье теоремы и заключается в проведении z -преобразования подходящей табличной СНПФ непрерывной системы и некоторой модификации полученной функции. Метод формирования желаемых передаточных функций с астатизмом второго порядка, с постоянным перерегулированием и конечной длительностью переходных процессов также представлен в статье. Системы управления с такими свойствами переходных процессов имеют повышенный порядок, поэтому для их реализации требуются микроконтроллеры с высоким быстродействием. Эффективность предложенных методов иллюстрируется численными примерами.

Ключевые слова: система, цифровое устройство управления, принцип управление по выходу и воздействиям, астатизм, прямые показатели качества

Введение

Интенсивное развитие микропроцессоров и микроконтроллеров, созданных на основе интегральных технологий, повышение их надежности и технологичности приводят к широкому распространению цифровых систем автоматического управления (ЦСУ). Эти системы обеспечивают более высокое качество процессов управления, обладают высокой адаптируемостью к изменениям технологических процессов, что существенно повышает экономическую эффективность их применения [1–3].

Однако включение цифровых элементов в контур управления приводит к возникновению ряда особенностей математического описания и функционирования систем управления. Методы анализа и синтеза цифровых систем несколько сложнее методов исследования непрерывных систем. Вместе с тем применение компьютерных средств и технологий позволяет создавать высокоэффективные по точности, быстродействию и широте решаемых задач системы управления различными технологическими объектами [2–5], в том числе и подвижными объектами, совершающими целевые движения [6].

Задача синтеза ЦСУ фактически заключается в определении алгоритма работы цифрового

устройства управления (ЦУУ), реализующего найденный закон управления. Для решения этой задачи применяются различные методы [4–8], но наиболее рациональными представляются методы аналитического синтеза, которые позволяют и структуру, и параметры закона управления определить путем решения некоторых уравнений.

Наиболее ранним из аналитических методов является разработанный Норбертом Винером частотный метод синтеза линейных систем при случайных воздействиях [9]. В середине XX века был разработан также аналитический метод синтеза систем, оптимальных в смысле квадратичных критериев качества [10, 11]. Полиномиальные варианты этих методов применительно к дискретным системам несколько позже были предложены в работах Л. Н. Волгина [12, 13]. В основе этих вариантов лежат полиномиальные уравнения, решение которых позволяет найти алгоритм работы ЦУУ.

Оптимальные системы обычно ориентированы на достижение экстремума некоторого функционала, поэтому обеспечение заданных значений первичных показателей качества этими методами весьма затруднительно. В то же время с инженерной точки зрения оценка качества систем управления именно по первичным показателям является более предпочтительной [14].

Интересно, что также в середине XX века был предложен аналитический метод синтеза

¹Статья подготовлена по результатам выполнения в ЮФУ проекта № 18-19-00621 по гранту РНФ.

систем управления по первичным показателям качества, в основе которого лежат стандартные нормированные передаточные функции (СНПФ) [15, 16]. Эти функции позволяют с учетом требований к проектируемой системе построить желаемые передаточные функции (ПФ), по которым с учетом модели заданного объекта находится требуемое управление. В начальный период метод СНПФ развивался достаточно интенсивно, но вскоре выяснилось, что получаемые управления часто оказываются физически не реализуемыми [16, 17]. Поэтому в дальнейшем ему уделялось мало внимания, несмотря на то, что в работах [18, 19] и др. было показано, что причиной указанной нереализуемости являлось применение принципа управления по отклонению. При использовании принципа "управления по выходу и воздействиям" [8, 18, 19] эта трудность исчезает, так как этот принцип в совокупности с методом СНПФ и полиномиальными уравнениями позволяет учесть условия физической реализуемости на этапе синтеза. В работах [20, 21] было показано, что применение метода аналитического синтеза систем с управлением по выходу и воздействиям (АССУВВ) позволяет синтезировать непрерывные системы управления практически с любым порядком астатизма и с заданными прямыми показателями качества, если, конечно, объекты являются стабилизируемыми.

В данной работе метод АССУВВ с применением СНПФ распространяется на случай дискретных (цифровых) систем управления. В целях понижения порядка замкнутой ЦСУ здесь допускается компенсация устойчивых нулей и полюсов объекта равными им полюсами и нулями ЦУУ. Применение этого приема встречается и во многих других работах. В частности, методы, разработанные в ранних [9, 12, 13] и более поздних [22, 23] работах, включают факторизацию полиномов относительно границы устойчивости. Это приводит к существенному недостатку данных методов, так как длительность переходных процессов систем, синтезированных этими методами, по переменным состояниям может в несколько раз превышать расчетную длительность переходного процесса по выходной переменной.

Это связано с тем, что скомпенсированные нули и полюсы на самом деле оказываются корнями характеристического полинома замкнутой системы и образуют так называемую неполную часть, т. е. "неуправляемую со входа системы и(или) ненаблюдаемую с ее выхода" подсистему. В силу этого всем скомпенсированным нулям и полюсам соответствуют

моды, которые не наблюдаются с выхода системы, но, как правило, содержатся в переменных состояниях системы. Поэтому если компенсируются устойчивые нули или полюсы, но близкие к границе устойчивости, то им будут соответствовать медленно затухающие моды, что приводит к значительно большей длительности переходных процессов по переменным состояниям, чем по выходу системы. Более того, разная длительность этих процессов является грубым свойством таких систем [21].

При использовании метода АССУВВ факторизация полиномов осуществляется относительно границы области комплексной плоскости, допустимой для расположения корней характеристического полинома системы с точки зрения ее качества. Поэтому метод АССУВВ свободен от этого недостатка, так как указанная граница всегда располагается достаточно далеко от границы устойчивости [8, 15, 16]. При этом, в отличие от модального или оптимального управлений, здесь не требуется измерение переменных состояния объекта управления, а нулевые значения коэффициентов ошибки, определяющие точность системы, не зависят от ее параметров [21]. Перейдем к изложению предлагаемого метода синтеза ЦСУ с применением СНПФ.

Постановка задачи

В настоящее время в ЦСУ в качестве цифровых управляющих устройств (ЦУУ) чаще всего используются микроконтроллеры, в которых осуществляется преобразование сигналов (с помощью АЦП и ЦАП), вычисление значений управляющего воздействия с помощью арифметико-логического устройства (АЛУ) и хранение данных [24]. Однако при решении задачи синтеза АЦП и ЦАП условно относят к объекту управления, в результате чего образуется дискретный объект управления (ДОУ) (рис. 1) [2–4, 22]. Поэтому в дальнейшем под ЦУУ понимается арифметико-логическое устройство (АЛУ) и другие элементы, реализующие закон управления.

Отметим, что на рис. 1 помимо дискретных задающего воздействия g_k , управления u_k

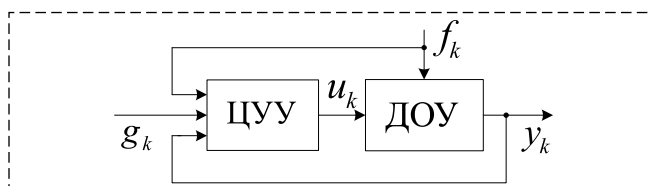


Рис. 1. Расчетная схема цифровой системы управления
Fig. 1. The circuit of a digital control system for design

и управляемой переменной y_k показано и дискретное возмущение f_k .

Примем, что полный ДОУ описывается уравнением "вход-выход", которое в z -изображениях имеет вид:

$$A(z)y(z) = B(z)u(z) + B_1(z)f(z). \quad (1)$$

Если $n_{\text{ДОУ}} = \deg A(z)$, а $m = \deg B(z)$, то $n_{\text{ДОУ}}$ — порядок, а $n_{\text{ДОУ}} - m = \mu_{\text{ДОУ}}$ — относительный порядок ДОУ. Полиномы уравнения (1) определяются хорошо известными методами, которые здесь не рассматриваются [22]. Отметим лишь, что преобразование сигналов в АЦП, ЦАП и вычисление значений управления u_k в АЛУ всегда приводит к задержкам по времени, которые могут быть как меньше, так и больше периода дискретизации (квантования по времени) T . Пусть $\tau_{\text{пру}}$ — суммарное время запаздывания в ЦСУ, причем $\tau_{\text{пру}} = m_{\tau}T + \tau_1$, где $m_{\tau} \geq 0$ — целое число, а $0 < \tau_1 < T$. Тогда порядок ДОУ (1)

$$n_{\text{ДОУ}} = \begin{cases} n_{\text{ноб}} + 1, & \text{если } 0 < \tau_{\text{пру}} < T, \\ n_{\text{ноб}} + m_{\tau} + 1, & \text{если } \tau_{\text{пру}} > T, \end{cases} \quad (2)$$

где $n_{\text{ноб}}$ — порядок непрерывного объекта. Согласно (2) запаздывание в ЦСУ учитывается моделью ДОУ (1), (2), причем $\mu_{\text{ДОУ}} = \mu_{\text{ноб}} + m_{\tau} + 1$, где $\mu_{\text{ноб}}$ — относительный порядок непрерывного объекта [25].

В соответствии с принципом управления по выходу и воздействиям на вход ЦУУ поступают, как показано на рис. 1, все измеряемые величины g_k , y_k и f_k , поэтому его уравнение в общем случае, но без обратной связи по u , записывается следующим образом:

$$R(z)u(z) = Q(z)g(z) - L(z)y(z) + Q_1(z)f(z), \quad (3)$$

где $R(z)$, $Q(z)$, $L(z)$ и $Q_1(z)$ — некоторые неизвестные полиномы. Если возмущение f_k не измеряется, то полином $Q_1(z) \equiv 0$, естественно.

Именно полиномы из уравнения (3) необходимо найти в результате решения задачи синтеза. Практически запаздывание $\tau_{\text{пру}}$ в ЦУУ не может быть равным нулю. Поэтому условия физической реализуемости уравнения (3) можно записать в следующем виде:

$$r \geq q \geq 0, \quad r \geq l \geq 0, \quad r \geq q_1 \geq 0, \quad (4)$$

где $r = \deg R(z)$, $q = \deg Q(z)$, $l = \deg L(z)$ и $q_1 = \deg Q_1(z)$. Величина $\mu_{\text{уу}} = \min\{r - q; r - l; r - q_1; 0\}$ — относительный порядок ЦУУ. Учитывая, что запаздывание в ЦУУ учитывается моделью ДОУ (1), далее будем полагать $\mu_{\text{уу}} = 0$.

Из выражений (1) и (3) следует уравнение замкнутой системы

$$D(z)y(z) = D_0(z)g(z) + D_1(z)f(z), \quad (5)$$

где

$$D(z) = A(z)R(z) + B(z)L(z); \quad (6)$$

$$D_0(z) = Q(z)B(z); \quad (7)$$

$$D_1(z) = B_1(z)R(z) + B(z)Q_1(z),$$

$n_{\text{сис}} = \deg D(z)$ — порядок, а $\mu_{\text{сис}} = \deg D(z) - \deg D_0(z)$ — относительный порядок системы (1), (3) или (5).

Задача синтеза ЦСУ (1), (3) заключается в определении степеней и коэффициентов полиномов $R(z)$, $Q(z)$, $L(z)$ и $Q_1(z)$ в уравнении (3). Ниже они определяются с учетом $n_{\text{ДОУ}}$, $\mu_{\text{ДОУ}}$, $\mu_{\text{сис}}$ и совокупности следующих требований к системе (5):

- устойчивость;
- астатизм заданного порядка $v_g^* \geq 1$ к задающему воздействию g_k ;
- астатизм заданного порядка $v_f^* \geq 0$ к возмущению f_k при $v_f^* \leq v_g^*$;
- длительность переходного процесса не более заданного значения t_p^* ;
- значение перерегулирования не более заданного значения $\sigma^* \%$;
- физическая реализуемость ЦУУ (3) с учетом условий (4), а также неравенств: $\mu_{\text{сис}} \geq \mu_{\text{ДОУ}} + \mu_{\text{уу}}$; $n_{\text{сис}} \geq 2n_{\text{ДОУ}} + \mu_{\text{уу}} - 1$, которые учитывают наличие в системе (5) заданной части, обусловленной ДОУ [19, 26];
- разрешимость уравнения (6) относительно полиномов $R(z)$, $L(z)$ и уравнений (7) относительно полиномов $Q(z)$ и $Q_1(z)$ с учетом условий (4).

Условия разрешимости сформулированной задачи синтеза существенно зависят от способа назначения корней полинома $D(z)$ в выражениях (5) и (6) [18, 20, 21]. Системы, у которых часть корней этого полинома совпадают с нулями или полюсами объекта управления, называются системами с согласованными полюсами. Как правило, они имеют более низкий порядок, т. е. меньшую сложность и повышенную робастность [21, 27], поэтому именно такие системы рассматриваются далее.

Синтез ЦСУ, в том числе и астатических, удобно осуществлять на основе желаемых ПФ, которые создаются на основе требований, предъявляемых к синтезируемым системам. Как отмечалось выше, эти функции удобно строить на основе СНПФ. Однако СНПФ дискретных (цифровых) систем не известны, но

желаемые ПФ ЦСУ можно получать, как будет показано ниже, на основе СНПФ непрерывных систем. Перейдем к рассмотрению соответствующего метода.

Передаточные функции дискретных астатических систем

Прежде всего, рассмотрим связь между ПФ астатических дискретных (цифровых) систем и ПФ непрерывных систем [16, 22, 25].

Пусть $W_{yg}(p) = B(p)/A(p)$ — ПФ непрерывной устойчивой системы управления, обладающей астатизмом порядка $v_g \geq 1$ к задающему воздействию $g(t)$. Имея в виду СНПФ и желаемые ПФ непрерывных систем, построенные на их основе, примем, что полиномы

$$A(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i p^i, \quad B(p) = \sum_{i=0}^{v_g-1} \alpha_i p^i, \quad (8)$$

где $\alpha_i > 0$ и удовлетворяют одному из критериев устойчивости с конечным запасом.

ПФ $W_{yg}(z)$ дискретной системы с фиксатором нулевого порядка, соответствующая при некотором периоде T ПФ $W_{yg}(p)$, определяется преобразованием

$$W_{yg}(z) = \frac{z-1}{z} Z_T \left\{ \frac{W_{yg}(p)}{p} \right\}. \quad (9)$$

Здесь $Z_T\{\zeta(p)\}$ — условное обозначение преобразования изображения $\zeta(p)$ в z -изображение $\zeta(z)$, выполняемого с помощью таблиц изображений по Лапласу [21–23, 25].

Теорема 1. Если ПФ $W_{yg}(p) = B(p)/A(p)$ удовлетворяет условиям устойчивости и астатизма первого порядка к задающему воздействию $g(t)$ непрерывных систем, то ПФ $W_{yg}(z)$ (9) также удовлетворяет аналогичным условиям, но дискретных систем. При более высоком порядке астатизма непрерывных систем дискретные ПФ типа (9) удовлетворяют только лишь условиям астатизма первого порядка дискретных систем. ■

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда все корни p_i полинома $A(p)$ являются вещественными и не равными друг другу, причем по условиям устойчивости $p_i < 0$. Обозначим $\bar{p}_i = |p_i|$, $i = \overline{1, n}$, где $n = \deg A(p)$.

Так как по условиям теоремы передаточная функция $W_{yg}(p)$ удовлетворяет условиям астатизма первого порядка к задающему воздействию $g(t)$, то согласно соотношениям (8) и работе [22, с. 138] $W_{yg}(p) = \alpha_0/A(p)$. В этом слу-

чае дробь $W_{yg}(p)/p$ можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{W_{yg}(p)}{p} = \frac{1}{p} + \sum_{i=1}^n C_i \frac{1}{p + \bar{p}_i}, \quad (10)$$

где

$$C_i = \frac{-\alpha_0}{\bar{p}_i A_{ni}(-\bar{p}_i)}, \quad A_{ni}(p) = \frac{A(p)}{p + \bar{p}_i} = \prod_{\substack{\zeta=1, \zeta \neq i}}^n (p + \bar{p}_\zeta),$$

$$\alpha_0 = A(0) = \prod_{i=1}^n \bar{p}_i. \quad (11)$$

Подставляя правую часть (10) в выражение (9) и выполняя Z_T -преобразование с помощью таблицы изображений по Лапласу [21, 25], получим

$$W_{yg}(z) = \frac{D_n(z) + (z-1)E_n(z)}{D_n(z)}. \quad (12)$$

Здесь

$$D_n(z) = \prod_{i=1}^n (z - d_i), \quad E_n(z) = \sum_{i=1}^n A_{ni} \hat{D}_{ni}(z),$$

$$\hat{D}_{ni}(z) = \frac{D_n(z)}{z - d_i}, \quad d_i = e^{-\bar{p}_i T}. \quad (13)$$

Как известно, условием астатизма порядка v_g дискретных систем с передаточной функцией $W_{yg}(z)$ к задающему воздействию g_k является равенство

$$1 - W_{yg}(z) = \tilde{W}_{\delta g}(z)(z-1)^{v_g}, \quad (14)$$

где $\tilde{W}_{\delta g}(z)$ — некоторая рациональная дробь, все корни знаменателя которой по модулю строго меньше единицы. Подставив ПФ (12) в выражение (14), найдем, что это условие выполняется при $v_g = 1$ и $\tilde{W}_{\delta g}(z) = -E_n(z)/D_n(z)$. При этом корни полинома $D_n(z)$ по модулю строго меньше единицы в силу устойчивости полинома $A(p)$ и соотношений (13). Отсюда следует справедливость первого утверждения теоремы 1 при условии $p_i \neq p_j$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$. ■

Доказательство теоремы 1 для случая кратных и/или комплексных корней полинома $A(p)$, а также в случае порядка астатизма непрерывной системы, большего единицы, проводится аналогично. Отличие заключается лишь в способах вычислений постоянных C_i из выражений, аналогичных (10). Поэтому доказательство теоремы в этих случаях здесь не рассматривается. Покажем лишь особенности, которые возникают в случае кратных и/или

комплексных корней, а также при $v_g = 2$ и более на частных примерах.

Пример 1. Найти преобразование (9) функции

$$W_{yg}(p) = \frac{\alpha_0}{A(p)} = \frac{\bar{p}^2(\bar{\sigma}^2 + \omega^2)}{(p + \bar{p})^2[(p + \bar{\sigma})^2 + \omega^2]}. \quad (15)$$

Здесь знаменатель $A(p)$ имеет кратный корень $p_1 = -\bar{p}$, $\bar{p} > 0$ и пару комплексных корней $p_{2,3} = -\bar{\sigma} \pm j\omega$, $\bar{\sigma} > 0$. ПФ (15), очевидно, удовлетворяет указанным выше условиям устойчивости и астатизма *первого* порядка непрерывных систем к задающему воздействию $g(t)$, так как ее числитель $\alpha_0 = \bar{p}^2(\bar{\sigma}^2 + \omega^2)$ и значение полинома $A(0) = \bar{p}^2(\bar{\sigma}^2 + \omega^2)$ то же.

Решение. Подвергая ПФ (15) преобразованиям, аналогичным (9)–(12), получим

$$W_{yg}(z) = \frac{D_{12}(z) + (z-1)E_{12}(z)}{D_{12}(z)}, \quad (16)$$

где

$$D_{12}(z) = (z - d_1)^2(z^2 - 2zd_2 \cos \omega T + d_2^2);$$

$$E_{12}(z) = C_1 d_1 T D_1(z) + C_2 D_2(z) + [C_{31} d_2 \sin \omega T + C_{32}(z - d_2 \cos \omega T)] D_3(z);$$

$$D_1(z) = z^2 - 2zd_2 \cos \omega T + d_2^2;$$

$$D_2(z) = D_{12}(z)/(z - d_1); \quad D_3(z) = (z - d_1)^2;$$

C_i — коэффициенты разложения ПФ (15) на простейшие дроби; $d_1 = e^{-\bar{p}T}$, $d_2 = e^{-\bar{\sigma}T}$ [22, 25]. Передаточная функция (16), очевидно, также соответствует утверждению теоремы 1, так как удовлетворяет условию (14) при $v_g = 1$ и $\tilde{W}_{\delta g}(z) = -E_{12}(z)/D_{12}(z)$. ■

Пример 2. При $\alpha > 0$ найти преобразование (9) функции

$$W_{yg}(p) = \frac{2\alpha p + \alpha^2}{p^2 + 2\alpha p + \alpha^2}. \quad (17)$$

Решение. Знаменатель данной ПФ (17) имеет кратный корень $p_1 = -\alpha$; при этом выполняются условия устойчивости, а согласно работе [22, с. 138], и условия астатизма *второго* порядка к задающему воздействию $g(t)$ непрерывных систем при любом значении $\alpha > 0$. Как и в предыдущем примере, проведя преобразования, аналогичные (9)–(12), получим разность $1 - W_{yg}(z)$ следующего вида:

$$1 - W_{yg}(z) = \frac{(z-1)[z - (\alpha T + 1)d_3]}{(z - d_3)^2}. \quad (18)$$

При произвольных значениях α и T полином $z - (\alpha T + 1)d_3 \neq z - 1$, так как $(\alpha T + 1)d_3 = (\alpha T + 1)e^{-\alpha T} \neq 1$. Следовательно, при произвольных значениях α и T ПФ $W_{yg}(z)$, являющаяся преобразованием (9) передаточной функции (17), не удовлетворяет условию (14) при $v_g = 2$. В то же время условиям астатизма *первого* порядка дискретных систем она удовлетворяет. Эти факты полностью соответствуют утверждениям теоремы 1.

Вместе с тем из выражения (18) следует, что если коэффициент $(\alpha T + 1)d_3$ в этом выражении заменить единицей, то получится ПФ

$$\bar{W}_{yg}(z) = \frac{(z - d_3)^2 - (z - 1)^2}{(z - d_3)^2},$$

которая удовлетворяет условию (14) при $v_g = 2$. Подчеркнем, что предложенная замена коэффициента $(\alpha T + 1)d_3$ на единицу является небольшой модификацией ПФ (18), причем без изменения ее свойств устойчивости. ■

Отметим, что аналогичная ситуация наблюдается и в тех случаях, когда ПФ $W_{yg}(p)$ удовлетворяет условиям астатизма более высокого порядка к задающему воздействию. Таким образом, на основе изложенного можно сделать важный практический вывод.

Следствие. Желаемую ПФ дискретной системы с любым порядком астатизма v_g к задающему воздействию можно получить путем некоторой модификации результата преобразования (9) ПФ непрерывной системы с тем же порядком астатизма. ■

Таким образом, желаемые ПФ дискретных астатических систем можно получать на основе стандартных ПФ непрерывных систем.

Синтез астатических ЦСУ

Рассмотрим метод АССУВВ применительно к синтезу астатических цифровых систем. Применительно к непрерывным системам данный метод подробно изложен в работах [18, 20, 21], поэтому ниже основное внимание уделяется лишь его особенностям, обусловленным дискретностью моделей.

Будем предполагать, что дискретный объект управления ДООУ, для которого создается астатическая ЦСУ, задан уравнением (1) с известными полиномами и значением T . Так как возмущение f_k (рис. 1) чаще всего не измеряется, то в уравнении ЦУУ (3) и в выражении (7) полагаем полином $Q_1(z) \equiv 0$.

При решении задачи синтеза ЦСУ методом АССУВВ, прежде всего, формируется вспомо-

гательная ПФ $W_{\text{ж}}(p)$ непрерывной системы, имеющей несколько лучшие показатели качества, чем синтезируемая дискретная система. Степень $n_{\text{ж}}$ полинома знаменателя $W_{\text{ж}}(p)$ полагается равной или меньшей порядка ДОУ (1), т. е. $n_{\text{ж}} \leq n_{\text{ДОУ}}$.

Порядок формирования $W_{\text{ж}}(p)$ состоит в следующем. Пусть синтезируемая ЦСУ должна иметь порядок астатизма v_g^* , перерегулирование $\sigma^*\%$ и длительность переходного процесса t_p^* . Тогда из таблицы стандартных ПФ по порядку астатизма $v_g = v_g^*$, перерегулированию $\sigma \leq \sigma^*\%$ и степени $n_{\text{таб}} = n_{\text{ж}}$ выбираются коэффициенты Δ_i , $i = 0, 1, \dots, n_{\text{ж}}$, СНПФ [15, 16, 21, 25]. Из этой же таблицы выбирается соответствующее значение нормированного времени регулирования $t_{p,\text{таб}}$ и вычисляется временной масштабный коэффициент

$$\omega_0 = t_{p,\text{таб}} / (t_p^* - T). \quad (19)$$

Затем находятся коэффициенты $\eta_i = \Delta_i \omega_0^{n_{\text{ж}} - i}$, $i = n_{\text{ж}}, 0$, и записывается вспомогательная ПФ:

$$W_{\text{ж}}(p) = \frac{\eta_{v_g-1} p^{v_g-1} + \dots + \eta_1 p + \eta_0}{\eta_{n_{\text{ж}}} p^{n_{\text{ж}}} + \eta_{n_{\text{ж}}-1} p^{n_{\text{ж}}-1} + \dots + \eta_1 p + \eta_0}.$$

Эта ПФ подвергается преобразованию (9) при заданном T , что дает отношение $H_0(z)/H(z)$, и записывается желаемая ПФ:

$$W_{\text{yg}}^*(z) = \frac{H_0(z)}{H(z)z^\varsigma} = \frac{H_0^*(z)}{H^*(z)}. \quad (20)$$

Здесь $H_0(z)$ и $H(z)$ — некоторые полиномы степеней $m_{\text{ж}}$ и $n_{\text{ж}}$, а ς — целое число, определяемое указанными выше условиями физической реализуемости ПФ (20) системой (5) с частично заданной структурой: $\mu_{W^*} = n_{\text{ж}} - m_{\text{ж}} \geq \mu_{\text{ДОУ}} + \mu_{\text{yy}}$ [19, 26].

Из теоремы 1 следует, что если $v_g^* = 1$, то ПФ (20) удовлетворяет условиям астатизма первого порядка к задающему воздействию ЦСУ, т. е. в этом случае $H^*(z) = H(z)z^\varsigma$, а $H_0^*(z) = H_0(z)$. Если же $v_g^* > 1$, то ПФ $H_0(z)/z^\varsigma H(z)$ не удовлетворяет условиям астатизма v_g^* -го порядка. Модификацию функции $H_0(z)/z^\varsigma H(z)$ к порядку астатизма $v_g^* > 1$ можно выполнить следующим образом. Прежде всего, находится разность $\bar{D}(z) = z^\varsigma H(z) - H_0(z)$; затем v_g^* ее корней округляются до 1, а остальные корни или соответствующие коэффициенты изменяются так, чтобы показатели качества системы с ПФ $[z^\varsigma H(z) - \bar{D}^*(z)] / z^\varsigma H(z)$ удовлетворяли требованиям к синтезируемой ЦСУ. Отметим, что при увеличенном $\mu_{\text{ДОУ}}$ и малом значении $\varsigma + n_{\text{ж}}$

обеспечить малое перерегулирование довольно сложно.

После определения желаемой ПФ $W_{\text{yg}}^*(z)$ находится ЦУУ (3) так, чтобы замкнутая система (1), (3) или (5) имела эту ПФ. С целью уменьшить сложность ЦСУ и повысить ее робастность целесообразно учесть свойства ДОУ, т. е. синтезировать систему с согласованными полюсами [8, 21]. Для этого определяется область $\Omega_{\text{п}}$ — область комплексной плоскости, в которой могут располагаться корни характеристического полинома $D(z)$ (6) проектируемой ЦСУ в соответствии с требованиями к ее качеству. Область $\Omega_{\text{п}}$ можно определить, например, условием

$$|z_{i,\Omega_n}| \leq r_{\Omega} = \max_i \{ |z_{H^*i}|, |\bar{z}_{A,i}|, |\bar{z}_{B,i}| \}, \quad (21)$$

где z_{i,Ω_n} — корни некоторых полиномов; z_{H^*i} — корни полинома $H^*(z)$; $\bar{z}_{A,i}$, $\bar{z}_{B,i}$ — достаточно устойчивые корни полиномов $A(z)$, $B(z)$, $i = 1, 2, \dots$. При этом нормированные по старшей степени z полиномы, все корни которых располагаются в области $\Omega_{\text{п}}$, снабжаются индексом Ω . Это позволяет представить факторизацию полиномов уравнения ДОУ (5) относительно границы области $\Omega_{\text{п}}$ следующим образом:

$$A(z) = A_{\Omega}(z)A_{\bar{\Omega}}(z), \quad B(z) = \beta_m B_{\Omega}(z)B_{\bar{\Omega}}(z). \quad (22)$$

Здесь $A_{\Omega}(z)$, $B_{\Omega}(z)$ — полиномы, все корни которых равны тем корням полиномов $A(z)$ и $B(z)$, которые располагаются в области $\Omega_{\text{п}}$, а $A_{\bar{\Omega}}(z)$, $B_{\bar{\Omega}}(z)$ — полиномы, все корни которых равны тем корням полиномов $A(z)$ и $B(z)$, которые располагаются вне области $\Omega_{\text{п}}$; β_m — коэффициент полинома $B(z)$ при z в старшей степени. Обозначим также $\deg A_{\Omega} = n_{\Omega}$, $\deg A_{\bar{\Omega}} = n_{\bar{\Omega}}$, $\deg B_{\Omega} = m_{\Omega}$, $\deg B_{\bar{\Omega}} = m_{\bar{\Omega}}$.

Для учета свойств ДОУ полиномы в уравнении ЦУУ (3) принимаются следующего вида:

$$\begin{aligned} R(z) &= (z-1)^{\bar{v}} B_{\bar{\Omega}}(z) \tilde{R}(z), \\ L(z) &= A_{\Omega}(z) \tilde{L}(z), \quad Q(z) = A_{\Omega}(z) \tilde{Q}(z), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\tilde{R}(z)$, $\tilde{L}(z)$, $\tilde{Q}(z)$ — вспомогательные полиномы, степени и коэффициенты которых подлежат определению в процессе синтеза замкнутой ЦСУ с учетом указанных выше требований к системе (5). Отметим, что в силу равенств (21) и (23) синтезируемая система будет обладать запасом устойчивости $\eta = 1 - r_{\Omega}$.

Обозначим $\deg \tilde{R}(z) = \tilde{r}$, $\deg \tilde{L}(z) = \tilde{l}$, $\deg \tilde{Q}(z) = \tilde{q}$ и определим число $\bar{v}$ условием

$$\bar{v} = \max\{v_g^* - v_A; v_f^* - v_{B1}; 0\}. \quad (24)$$

Здесь v_A, v_{B1} — числа единичных корней, не зависящих от параметров объекта, полиномов $A(z) = (z-1)^{v_A} A^\circ(z)$ и $B_1(z) = (z-1)^{v_{B1}} B_1^\circ(z)$; при этом $v_A \geq 0$ и $v_{B1} \geq 0$, а полиномы $A^\circ(1) \neq 0$ и $B_1^\circ(1) \neq 0$. Как известно, указанные единичные нули могут быть обусловлены чистыми интеграторами или сумматорами, если ДОУ имеет дискретную (цифровую) часть. Отметим также, что в соотношениях (23) и (24) $\bar{v}$ — это число сумматоров, которые необходимо будет образовать при $\bar{v} \neq 0$ в алгоритме ЦУУ при его построении.

В общем случае корни полинома $B(z)$ из уравнения (1) зависят от значения периода T , поэтому примем не сильно ограничивающее предположение, что все корни полинома $B(z)$ располагаются в области $\Omega_{\text{п}}$, т. е. в уравнении (1) полином $B(z)/\beta_m = B_\Omega(z)$.

Далее процедура синтеза состоит в определении полиномов $\tilde{R}(z)$, $\tilde{L}(z)$, $\tilde{Q}(z)$ по условиям равенства ПФ (20) и ПФ $W_{yg}(z)$, следующей из выражений (5)–(7) с учетом равенств (23) и указанных выше условий физической реализуемости ЦУУ (3) и ПФ (20). Эта процедура практически полностью совпадает с изложенной в работе [20] или в книге [21], поэтому здесь не рассматривается. После определения полиномов $\tilde{R}(z)$, $\tilde{L}(z)$, $\tilde{Q}(z)$ записывается уравнение ЦУУ (3), и для учета запаздывания его правая часть умножается на z^{-m_τ} , где m_τ — величина из выражения (2). В полученном уравнении при $\bar{v} \neq 0$ выделяется звено с передаточной функцией $1/(z-1)^{\bar{v}}$ и осуществляется переход к оригиналам, что и приводит к алгоритму работы искомого ЦУУ.

Подчеркнем здесь, что в результате применения изложенной методики синтеза, как правило, получается многомерное ЦУУ, на входы которого подаются коды всех измеряемых величин. Рассмотрим предложенный метод синтеза астатических ЦСУ на конкретном примере, начиная с получения уравнений ДОУ.

Пример 3. Найти ЦУУ для управления объектом

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,3823 \end{bmatrix} f, \quad (25)$$

$$y = [20 \quad 5]x,$$

если период дискретизации $T = 0,5$ с, а запаздывание в ЦУУ $\tau_{\text{пзр}} = 1,1$ с. Замкнутая ЦСУ должна иметь астатизм второго порядка к задающему воздействию g_k и первого — к неизмеряемому возмущению f_k ; длительность переходного процесса (без учета запаздывания) не более 4,5 с; перерегулирование не более 35 %; измеряются y_k и ε_k .

Решение. Переходя с помощью известных соотношений от уравнений (25) к уравнению "вход-выход" (1) [22, 25], найдем его полиномы

$$A(z) = (z-1)(z-0,0821)z^3; \quad (26)$$

$$B(z) = 5,923(z-0,7148)(z+0,07); \quad (27)$$

$$B_1(z) = 2,265z - 1,703.$$

В данном случае, очевидно, $n_{\text{доу}} = 5$; $m = 2$; $\mu_{\text{доу}} = 3$; $n_A = 1$; $n_{B1} = 0$.

Перейдем к построению желаемой ПФ, полагая $n_{\text{ж}} = n_{\text{доу}} = 5$. По значениям $v_g^* = 2$, $\sigma = 10 < 35$ % и $n_{\text{таб}} = n_{\text{ж}} = 5$ из таблицы СНПФ [21, с. 346] выписываются коэффициенты $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 18$, $\Delta_2 = 38$, $\Delta_3 = 29$, $\Delta_4 = 9$, $\Delta_5 = 1$ и величина $t_{\text{р,таб}} = 18$ с. Далее по формуле (19) находится $\omega_0 = 18/(4,5 - 0,5) = 4,5$; вычисляются коэффициенты $\eta_5 = 1$, $\eta_4 = 9 \cdot 4,5 = 40,5$; $\eta_3 = 29 \cdot 4,5^2 \approx 587,3$, $\eta_2 = 38 \cdot 4,5^3 \approx 3463$, $\eta_1 = 18 \cdot 4,5^4 \approx 7381$, $\eta_0 = 1 \cdot 4,5^5 \approx 1845,3$ и записывается вспомогательная ПФ

$$W_{\text{ж}}(p) = \frac{7381p + 1845,3}{p^5 + 40,5p^4 + 587,3p^3 + 3463p^2 + 7381p + 1845,3}. \quad (28)$$

В результате преобразования ПФ (28) по формуле (9) при $T = 0,5$ с помощью функции **c2d** пакета MATLAB [25, с. 91] находится ПФ $W(z)$, которая не удовлетворяет условиям астатизма второго порядка к задающему воздействию. При этом ее $\mu_W = 1$, а ДОУ с полиномами (26), (27) имеет $\mu_{\text{доу}} = 3$. Поэтому для обеспечения реализуемости этой ПФ $W(z)$ в формуле (20) полагается $\varsigma = 1$, а для ее модификации к условиям астатизма 2-го порядка находится разность $1 - z^{-1} W(z)$. Затем два корня ее числителя округляются до 1, а коэффициенты числителя полинома третьей степени модифицируемой ПФ выбираются по условию минимального перерегулирования. В результате получается ПФ

$$W_{yg}^*(z) = \frac{1,299z^3 - 1,31121z^2 + 0,1652z - 0,03935}{z^6 - 1,019z^5 + 0,1369z^4 - 0,00426z^3}. \quad (29)$$

На рис. 2 приведена переходная функция, а на рис. 3 — реакция системы с ПФ (29) на функцию $g_k = k$. Значение $\sigma = 31$ % обусловлено здесь высоким значением $\mu_{\text{доу}} = 3$.

Судя по графикам на рис. 2 и рис. 3, система с ПФ (29) удовлетворяет требованиям, поэтому она принимается в качестве желаемой ПФ. Переходя к ее реализации, по условию (21) по-

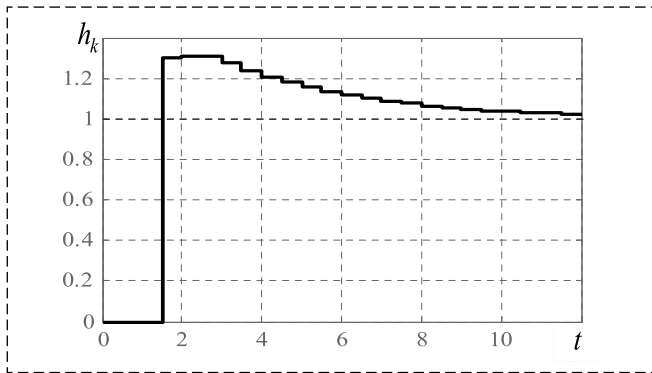


Рис. 2. Переходная функция цифровой системы
Fig. 2. Response of the digital system to unit step

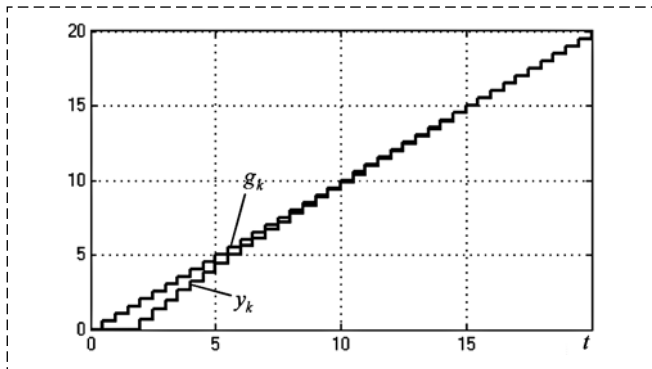


Рис. 3. Реакция астатической системы на воздействие $g_k = k$
Fig. 3. Response of the astatic system to unit ramp $g_k = k$

ложим $\eta^* = r_\Omega = 0,13$. Далее, следуя работам [20, 21], найдем полиномы

$$\begin{aligned} R(z) &= (z-1)(z^6 + 0,3362z^5 + 0,4164z^4 + \\ &+ 0,4549z^3 + 0,4894z^2 - 0,9157z - 0,06634); \\ L(z) &= 0,2431z^5 - 0,2439z^4 + 0,01838z^3; \\ Q(z) &= 0,2193z^7 - 0,4407z^6 + 0,2493z^5 - \\ &- 0,09433z^4 - 0,06644z^3 \end{aligned}$$

и запишем уравнение (3). Так как в этом примере $\bar{v} = 1$, то в полиноме $R(z)$ выделен множитель $(z-1)$ в целях формирования сумматора в алгоритме искомого ЦУУ.

По условиям синтеза в данном случае измеряются ε_k и y_k , поэтому в уравнении (3) исключается $g(z)$ заменой $g(z) = \varepsilon(z) + y(z)$. Кроме того, его правая часть умножается на z^{-2} , так как в данном случае $m_\tau = 2$. В результате указанное уравнение примет вид

$$R(z)u(z) = z^{-2}Q(z)\varepsilon(z) - z^{-2}L_y(z)y(z), \quad (30)$$

где $L_y(z) = L(z) - Q(z) = -0,2193z^7 + 0,4407z^6 - 0,006167z^5 - 0,1495z^4 - 0,04805z^3$.

Отметим, что для краткости здесь и далее приводятся округленные значения коэффициентов полиномов. В корректных уравнениях ЦУУ должно учитываться не менее 6...8 значащих цифр после запятой. Для обеспечения второго порядка астатизма необходимо реализовать сумматор в ЦУУ явным образом. С этой целью уравнение (30) представим в следующем виде:

$$(z-1)u(z) = w(z),$$

$$\bar{R}(z)w(z) = z^{-2}Q(z)\varepsilon(z) - z^{-2}L_y(z)y(z),$$

где $w(z)$ — z -изображение вспомогательной переменной. В результате перехода к оригиналам получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1} + w_{k-1}; \\ w_k &= -0,3362w_{k-1} - 0,4164w_{k-2} - 0,4549w_{k-3} - \\ &- 0,4894w_{k-4} + 0,9158w_{k-5} + 0,06634w_{k-6} + \\ &+ 0,2193\varepsilon_{k-1} - 0,4407\varepsilon_{k-2} + 0,2493\varepsilon_{k-3} - \\ &- 0,09433\varepsilon_{k-4} - 0,06644\varepsilon_{k-5} + 0,2103y_{k-1} - \\ &- 0,4407y_{k-2} + 0,006167y_{k-3} + 0,1495y_{k-4} + \\ &+ 0,04805y_{k-5}. \end{aligned} \quad (31)$$

Равенства (31) описывают искомым алгоритм работы ЦУУ, при котором обеспечивается второй порядок астатизма к задающему и первый — к возмущению цифровой системы управления объектом (25). Графики реакций синтезированной системы на ступенчатые и линейные дискретные воздействия аналогичны приведенным на рис. 2 и рис. 3, т. е. синтезированная система обрабатывает постоянное и линейное воздействия с нулевой ошибкой, несмотря на запаздывание в ЦУУ.

3. Синтез ЦСУ с конечной длительностью переходных процессов

Как известно, системами с конечной длительностью переходных процессов называются дискретные системы, ПФ которых имеет вид $W_{yg}(z) = H_0(z)/z^{n_{\text{сис}}}$. Характер переходного процесса таких систем определяется только значениями коэффициентов числителя их ПФ, а длительность равна $n_{\text{сис}}T$. При этом, если необходимо обеспечить первый порядок астатизма к задающему воздействию, то выбор коэффициентов числителя осуществляется достаточно просто [15, 16]. Проблема сильно усложняется, если необходимо обеспечить второй или более высокий порядок астатизма к задающему воздействию.

Условие астатизма 2-го порядка простейшей дискретной системы второго порядка, вытекающее из равенства (14), имеет вид

$$1 - W_{yg}^*(z) = (z - 1)^2 / z^2. \quad (32)$$

Отсюда следует вид соответствующей ПФ: $W_{yg}^*(z) = (2z - 1) / z^2$ и разностное уравнение $y_k = 2g_{k-1} - g_{k-2}$. Значения реакции y_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, этой системы на ступенчатое воздействие $g_{1k} = 1(k)$ равны: $y_{10} = 0$, $y_{11} = 2$, $y_{12} = 1$, $y_{13} = 1$, $y_{14} = 1$, ..., а на линейное воздействие $g_{2k} = k$ равны $y_{20} = 0$, $y_{21} = 0$, $y_{22} = 2$, $y_{23} = 3$, $y_{24} = 4$, $y_{25} = 5$, Как видно, переходные процессы, действительно, заканчиваются за два такта, ошибки системы, вызванные этими воздействиями, равны нулю, но перерегулирование составляет 100 %, что, конечно, не приемлемо для практики.

Нетрудно убедиться, что в случае астатизма третьего порядка аналогичные ошибки системы, ПФ которой $W_{yg}^*(z) = (3z^2 - 3z + 1) / z^3$, равны нулю, но перерегулирование достигает 200 %.

В работах [28, 29] установлено, что для уменьшения перерегулирования в дискретных системах необходимо увеличивать порядок системы. При необходимом порядке астатизма v_g условие (32) переходит в равенство

$$1 - W_{yg}^*(z) = N(z)(z - 1)^{v_g} / z^{n_{\text{сис}}}, \quad (33)$$

где $N(z)$ — нормированный полином, степень которого $n_N = \deg N(z) = n_{\text{сис}} - v_g$.

Отметим, что для случая $v_g = 2$ В. А. Никольским в работе [28] были найдены полиномы $N_n(z, \sigma\%)$, при которых дискретные системы, удовлетворяющие равенству (33), имеют постоянное перерегулирование, равное 10, 15, 20, 25, 33 или 50 %, но при соответствующих более высоких порядках замкнутых систем.

Относительный порядок $\mu_{\text{сис}}$ дискретных систем, рассмотренных В. А. Никольским, равен единице [28]. В то же время при наличии запаздывания в цифровых системах, как видно из примера 3, их относительный порядок $\mu_{\text{сис}}$ больше единицы. Следовательно, для обеспечения реализуемости ЦСУ в этих случаях необходимо их желаемые ПФ $W_{yg}^*(z)$ формировать с повышенными значениями $\mu_{\text{сис}}$ [19, 26]. Однако сделать это на основе полиномов из работы [28] невозможно. В связи с этим далее рассматривается задача разработки метода определения желаемых ПФ $W_{yg}^*(z)$ систем с $\mu_{\text{сис}} > 1$, при которых порядок астатизма $v_g > 1$, переходный процесс имеет конечную длительность и постоянное перерегулирование.

При наличии запаздывания из выражения (33) вытекает соотношение

$$\deg[z^{n_{\text{сис}}} - (z - 1)^{v_g} N(z)] = n_{\text{сис}} - \mu_{\text{сис}}. \quad (34)$$

Обозначим $1 - W_{yg}^*(z) = \bar{D}(z) / z^{n_{\text{сис}}}$; тогда полином $\bar{D}(z) = z^{n_{\text{сис}}} - z^{n_{\text{сис}}} W_{yg}^*(z)$; если же $W_{yg}^*(z) = H_0^*(z) / z^{n_{\text{сис}}}$, то

$$\bar{D}(z) = z^{n_{\text{сис}}} - z^{n_{\text{сис}}} W_{yg}^*(z) = z^{n_{\text{сис}}} - H_0^*(z). \quad (35)$$

Пусть дискретная система с ПФ $W_{yg}^*(z) = H_0^*(z) / z^{n_{\text{сис}}}$ имеет порядок астатизма v_g к задающему воздействию. Тогда, согласно выражению (33), полином $\bar{D}(z)$ (35) имеет v_g корней, тождественно равных 1, т. е. удовлетворяет условию $\bar{D}(z) = (z - 1)^{v_g} N(z)$, причем его степень равна $n_{\text{сис}}$. Вместе с тем, если дискретная система, относительный порядок которой равен $\mu_{\text{сис}}$, имеет переходный процесс конечной длительности и постоянное перерегулирование $\sigma\%$, то полином $H_0^*(z) = (1 + \gamma)z^{n_{\text{сис}} - \mu_{\text{сис}}} - \gamma$, где $\gamma = \sigma\% / 100\%$. Изложенное можно рассматривать как доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. Дискретная (цифровая) система с ПФ $W_{yg}^*(z) = H_0^*(z) / z^{n_{\text{сис}}}$ и относительным порядком $\mu_{\text{сис}}$ имеет конечную длительность переходных процессов, постоянное перерегулирование $\sigma = \gamma \cdot 100\%$ и астатизм порядка v_g к задающему воздействию, если ее порядок $n_{\text{сис}}$ такой, что полином

$$\bar{D}(z) = z^{n_{\text{сис}}} - (1 + \gamma)z^{n_{\text{сис}} - \mu_{\text{сис}}} + \gamma \quad (36)$$

имеет v_g корней, тождественно равных единице. ■

Из теоремы 2 вытекает конструктивный алгоритм построения желаемых ПФ дискретных (цифровых) систем с заданным порядком астатизма, постоянным перерегулированием и конечной длительностью переходного процесса с учетом условия их физической реализуемости динамической системой с заданной частью. Фактически он заключается в определении степени $n_{\text{сис}}$, при которой полином $\bar{D}(z)$ (36) с заданными $\mu_{\text{сис}}$ и $\gamma = \sigma\% / 100\%$ имеет v_g корней, равных единице. Аналитическое решение этой задачи найти не удалось. Численным путем, с помощью системы MATLAB были найдены приведенные в таблице порядки $n_{\text{сис}}$ цифровых систем при $v_g = 2$ и некоторых значениях $\sigma\%$ и $\mu_{\text{сис}}$.

Порядок астатизма $\nu_g = 2$

$\sigma, \%$	$\mu_{\text{сис}}$			
	1	2	3	4
10	11	22	33	44
15	8	16	24	32
20	6	12	18	24
25	5	10	15	20
33	4	8	12	16

Как видно из таблицы, порядок астатических систем управления данного типа при $\nu_g = 2$ можно определять по формуле

$$n_{\text{сис}} = (\gamma^{-1} + 1)\mu_{\text{сис}}, \quad (37)$$

где $\gamma = \sigma\%/100 \%$, причем $1/\gamma$ — целое число; при $\sigma = 15 \%$ величина $\gamma = 1/7$. При этом желаемая ПФ $W_{yg}^*(z)$ определяется вытекающей из выражения (35) формулой:

$$W_{yg}^*(z) = [(1 + \gamma)z^{n_{\text{сис}} - \mu_{\text{сис}}} - \gamma]/z^{n_{\text{сис}}}. \quad (38)$$

На основе таблицы и формулы (37) можно заключить, что при уменьшении перерегулирования $\sigma \%$ порядок системы резко возрастает, что при неизменном периоде дискретизации T приведет, естественно, к увеличению длительности переходного процесса. Однако, если одновременно с уменьшением $\sigma\%$ уменьшать T , т. е. период работы ЦУУ, что требует применения более быстродействующих процессоров, то длительность переходного процесса расти не будет.

Отметим, что значения порядков систем $n_{\text{сис}}$ при $\mu_{\text{сис}} = 1$, приведенные в таблице, совпадают со значениями, приведенными в работе [28]. Также численным путем установлено, что при первом порядке астатизма, т. е. при $\nu_g = 1$, можно получить конечную длительность переходного процесса при любых значениях $n_{\text{сис}} \geq 1$, $\sigma \%$ и $\mu_{\text{сис}}$, в том числе и при $\sigma = 0 \%$. Однако рост порядка системы при увеличении $\mu_{\text{сис}}$ сохраняется. Минимальное значение порядка системы определяется выражением $n_{\text{сис}} = \nu_g + \mu_{\text{сис}}$.

Значений $n_{\text{сис}}$, при которых полином (36) имеет ν_g корней, равных единице при $\nu_g \geq 3$, $\mu_{\text{сис}} \geq 1$ и каких-либо значениях $\gamma < 0,5$, найти не удалось.

Для примера построим желаемую ПФ при $\nu_g = 2$ и постоянном $\sigma = 20 \%$ для реализации цифровой системой с относительным порядком $\mu_{\text{сис}} = 3$. Так как в данном случае $\gamma = 0,2$,

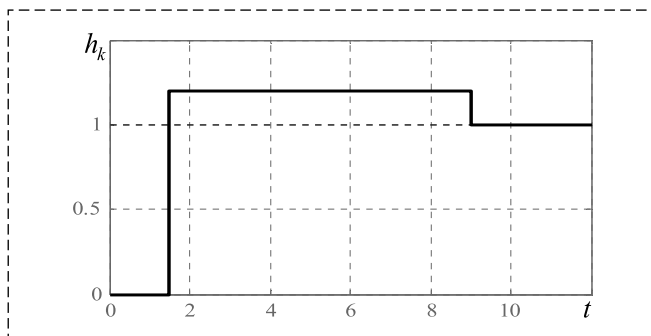


Рис. 4. Переходная функция с постоянным перерегулированием
Fig. 4. Transient function with constant overshoot

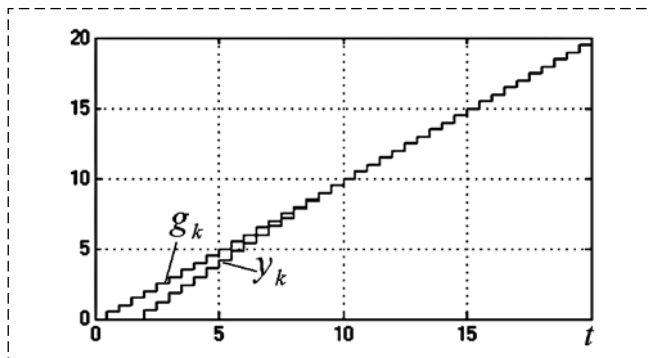


Рис. 5. Реакция цифровой системы на воздействие $g_k = k$
Fig. 5. Response of the digital system to unit ramp $g_k = k$

то по таблице находим $n_{\text{сис}} = 18$, а по формуле (38) имеем

$$W_{yg}^*(z) = (1, 2z^{15} - 0, 2)/z^{18}. \quad (39)$$

Переходная функция системы с ПФ (39), построенная с помощью MATLAB при $T = 0,5$ с, показана на рис. 4, а на рис. 5 показана полученная в Simulink реакция этой же системы на линейное воздействие.

На основе рис. 4 и рис. 5 нетрудно заключить, что запаздывание равно $3T$, перерегулирование 20% , переходный процесс длится ровно 9 с, т. е. $18T$, а скоростная ошибка, несмотря на наличие запаздывания, равна нулю, что свидетельствует о втором порядке астатизма соответствующей системы.

Фигурирующий в равенстве (33) полином $N(z)$ в данном случае имеет вид: $N(z) = z^{16} + 2z^{15} + 3z^{14} + 2,8z^{13} + 2,6z^{12} + 2,4z^{11} + 2,2z^{10} + 2z^9 + 1,8z^8 + 1,6z^7 + 1,4z^6 + 1,2z^5 + 1,0z^4 + 0,8z^3 + 0,6z^2 + 0,4z + 0,2$. Отметим, что последние пять коэффициентов этого полинома совпадают с коэффициентами полинома В. А. Никольского для случая $\sigma = 20 \%$ [28].

Пример 4. Найти ЦУУ с $T = 0,5$ с для реализации ПФ (39) цифровой системой, заданной

частью которой является ДООУ (1) с полиномами (26), (27), при условии, что измеряются только g_k и y_k , а запаздывание в ЦУУ равно 1,1 с, т. е. $m_\tau = 2$, а $\tau_1 = 0,1$ с.

Решение. Полиномы уравнения "вход-выход" заданного ДООУ имеют вид (26), (27), поэтому, имея в виду их корни и корни знаменателя ПФ (39), по (21) полагаем $\eta^* = 0,28$. При этом все полиномы $B_\Omega(z)$, $B_{\bar{\Omega}}(z)$, $A_\Omega(z)$, $A_{\bar{\Omega}}(z)$ из соотношений (22), (23) описываются теми же выражениями, что и в примере 3.

Переходя к определению полиномов $R(z)$, $L(z)$ и $Q(z)$ из уравнения ЦУУ (3) с учетом ПФ (39) и полиномов (26), (27), как и в примере 1, следуя работам [20, 21], найдем, что в данном случае в выражениях (23) полином $\tilde{R}(z) = \sum_{i=0}^{16} \rho_i z^i$, а $\tilde{L}(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z$. Степень знаменателя ПФ (39) довольно высокая, поэтому систему уравнений, решение которой определяет коэффициенты ρ_i и λ_i , запишем в скалярной форме: $5,923\lambda_0 + \rho_0 = 0$; $5,923\lambda_1 - 2\rho_0 + \rho_1 = 0$; $\rho_i - 2\rho_{i+1} + \rho_{i+2} = 0$, $i = \overline{0, 14}$, $\rho_{15} - 2\rho_{16} = 0$, $\rho_{16} = 1$. Решение этой системы позволяет найти полиномы $R(z) = (z-1)B_\Omega(z)\tilde{R}(z)$, $L(z) = A_\Omega(z)\tilde{L}(z)$, а по формуле $Q(z) = A_\Omega(z)H_0^*(z)/\beta_m$ — полином $Q(z)$. Путем подстановки этих полиномов в уравнение (3) (с учетом умножения его правой части на z^{-2} и ввода вспомогательной переменной $\bar{w}$) это уравнение представим в виде: $(z-1)u(z) = \bar{w}(z)$, $B_\Omega(z)\tilde{R}(z)\bar{w}(z) = z^{-2}Q(z)g(z) - z^{-2}L(z)y(z)$. Наконец, после перехода к оригиналам, получаем алгоритм искомого ЦУУ:

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1} + \bar{w}_{k-1}; \\ \bar{w}_k &= -1,3552\bar{w}_{k-1} + 1,6604\bar{w}_{k-2} + 1,9655\bar{w}_{k-3} + \\ &+ 2,2707\bar{w}_{k-4} + 2,5759\bar{w}_{k-5} + 2,881\bar{w}_{k-6} + \\ &+ 3,1862\bar{w}_{k-7} + 3,4914\bar{w}_{k-8} + 3,7965\bar{w}_{k-9} + \\ &+ 4,1017\bar{w}_{k-10} + 4,4068\bar{w}_{k-11} + 4,712\bar{w}_{k-12} + \\ &+ 5,0172\bar{w}_{k-13} + 5,3223\bar{w}_{k-14} + 5,6275\bar{w}_{k-15} + \\ &+ 5,9327\bar{w}_{k-16} - 11,7622\bar{w}_{k-17} - 0,8506\bar{w}_{k-18} + \\ &+ 0,2026g_{k-1} - 0,01663g_{k-2} - 0,03377g_{k-16} + \\ &+ 0,002772g_{k-17} - 3,039y_{k-15} + 3,1197y_{k-16} - \\ &- 0,2356y_{k-17}. \end{aligned} \quad (40)$$

Несложно проверить, что система (1), (25), (26), (40) при ступенчатых и линейных воздействиях имеет переходные процессы, аналогичные изображенным на рис. 4 и 5.

Закключение

Предложенный в работе метод аналитического синтеза обычных цифровых систем, с астатизмом выше первого порядка, несколько сложнее синтеза аналогичных непрерывных систем. Отметим, что эта сложность обусловлена исключительно построением желаемых ПФ. Проблем с реализацией этих ПФ не возникает при использовании принципа управления по выходу и воздействиям. Значительно проще строятся желаемые ПФ цифровых систем с конечной длительностью переходных процессов, в особенности с астатизмом первого порядка.

Предложенный метод также позволяет синтезировать ЦСУ с конечной длительностью переходных процессов и с постоянным перерегулированием. Эти системы могут иметь как первый, так и второй порядок астатизма. Условия существования аналогичных ЦСУ, имеющих третий и более высокие порядки астатизма, найти не удалось.

Цифровые астатические системы, методы синтеза которых предложены выше, можно применять для управления объектами как без запаздывания, так и с запаздыванием. Запаздывание может быть меньше одного или же больше нескольких периодов дискретизации. Однако в последнем случае порядок ЦСУ резко возрастает, в особенности при малом постоянном перерегулировании.

Список литературы

1. Денисенко В. В. Компьютерное управление технологическими процессом, экспериментом, оборудованием. М.: Горячая линия-Телеком, 2009.
2. Григорьев В. В., Быстров С. В., Бойков В. И., Болтунов Г. И., Мансурова О. К. Цифровые системы управления. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011.
3. Луценко И. В. Синтез дискретного регулятора температуры газов газотурбинного двигателя с учетом требований грубости // Математические методы в технике и технологиях — ММТТ-18. Сб. трудов XVIII Международ. науч. конф. в 10 т. Т. 2. Секция 2 / Под общ. ред. В. С. Балакирева. Казань: Изд-во Казанского гос. технол. ун-та, 2005. С. 139—142.
4. Stojanovic S. B., Debelkovic D. Lj., Antic D. S. Finite-time Stability and Analysis of Discrete Time-delay Systems using Discrete Convolution of Delayed States // FACTA UNIVERSITATIS. Series: Automatic control and robotics. 2014. Vol. 14, N. 32. P. 147—158.
5. Bakhilina I. M., Stepanov S. A. On the design of discrete H_∞ -controllers // Automation and Remote Control. 2000. N 61(2). P. 254—264.
6. Пшихонов В. Х., Медведев М. Ю. Управление подвижными объектами в определенных и неопределенных средах. М.: Наука, 2011.
7. Kiselev O. N. Minimization of Basic Quality Indices in Linear Discrete Systems // Automation and Remote Control. 2005. N 66(3). P. 398—405.

8. Гайдук А. Р., Плаксиенко Е. А. Анализ и синтез систем управления с применением системных инвариантов в MATLAB. Саарбрюккен: Palmarium Academic Publishing, 2016.
9. Wiener N. The extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. N. Y., 1949.
10. Kalman R. E. Contributions to the Theory of Optimal Control // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 1960. Vol. 5. N 1. P. 102—119.
11. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов I—III // Автоматика и телемеханика. 1960. № 4—6.
12. Волгин Л. Н. Элементы теории управляющих машин (метод полиномиальных уравнений в задачах синтеза систем автоматического управления с цифровыми вычислительными машинами). М.: Советское радио, 1962.
13. Волгин Л. Н. Оптимальное дискретное управление динамическими системами / Под ред. П. Д. Крутько. М.: Наука, 1986.
14. Филимонов Н. Б. Проблема качества процессов управления: смена оптимизационной парадигмы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 12. С. 2—10.
15. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1962.
16. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975.
17. Макаров И. М., Менский Б. М. Линейные автоматические системы. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1982.
18. Гайдук А. Р. Синтез систем автоматического управления по передаточным функциям // Автоматика и телемеханика. 1980. № 1. С. 11—16.
19. Гайдук А. Р. Об ограничениях, обусловленных заданной частью системы и управляющим устройством // Известия вузов. Приборостроение. 1987. Том XXX. № 5. С. 11—16.
20. Гайдук А. Р., Плаксиенко Е. А. Синтез динамических систем по требуемым показателям качества // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 4. С. 7—12.
21. Гайдук А. Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012.
22. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. М.: Физматлит, 2003.
23. Ким Д. П. Алгебраический метод синтеза дискретных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 4. С. 8—13.
24. Иванов Ю. И., Югай В. Я. Применение микроконтроллеров AVR в системах управления. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2005.
25. Гайдук А. Р., Беляев В. Е., Пьявченко Т. А. Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB. СПб.: ЛАНЬ, 2011.
26. Гайдук А. Р., Гуренко Б. В., Плаксиенко Е. А. К синтезу систем управления с частично заданной структурой по желаемым показателям качества // Научный вестник НГТУ. 2014. № 2(55). С. 19—29.
27. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. О проблеме неробастности спектра в задачах модального управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 10. С. 8—13.
28. Никольский В. А. Об одном способе обеспечения астатизма второго порядка в дискретной системе комбинированного управления с компенсацией возмущения // Известия вузов. Электромеханика. 1978. № 11. С. 1168—1173.
29. Семенов А. В., Гайдук А. Р., Геложе Ю. А., Семенов А. В. Процедура автоматизированного синтеза цифровых управляющих систем // Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск "Компьютерные и информационные технологии в науке, инженерии и управлении". 2014. № 4(153) С. 150—157.

Design of Astatic Digital Systems with Application of Standard Normalized Transfer Functions

A. R. Gaiduk, gaiduk_2003@mail.ru,

Southern Federal University, Taganrog, 347928, Russian Federation;
Kislovodsk Humanitarian-Technical Institute, Kislovodsk, 337700, Russian Federation,

*Corresponding author: Gaiduk Anatoly R., D. Sc., Professor,
Southern Federal University, Taganrog, 347928, Russian Federation; Head of Department,
Kislovodsk Humanitarian-Technical Institute, Kislovodsk, 337700, Russian Federation,
e-mail: gaiduk_2003@mail.ru*

Accepted on August 20, 2018

Abstract

Control systems with the increased astatic order provide higher accuracy and consequently their application is expedient at the solution of many control problems. In particular, it concerns to digital systems which have higher adaptability to manufacture and reliability. However the task of the digital systems design is a little bit more difficult in comparison with a similar task in a continuous case. Article is devoted to the solution of a design problem of the discrete automatic systems, which realization is carried out on the basis of a control principle on output and impacts. Standard normalized transfer functions (SNTF) are convenient means for the problem solution of the control systems design with the required direct quality indices. The method of the desirable transfer functions formation for the digital control systems on basis of the continuous systems SNTF is suggested in article. This method follows from the theorem proved in this article and consists in carrying out of the z-transformation suitable tabulated SNTF of the continuous system and some updating of the received function. The formation method of the desirable transfer functions of the digital systems with the second order astatic, constant overshoot and final duration of transients is suggested in article also. The control systems with such properties of transients have the increased order; therefore microcontrollers with high speed are required for their realization. Efficiency of the suggested methods is illustrated by numerical examples.

Keywords: system, the digital control device, control principle on output and impacts, astatic, direct quality indices

Acknowledgements: The article is prepared by results of carry out in SFEDU the project no. 18-19-00621 under the grant of the Russian Scientific Found.

For citation:

Gaiduk A. R. Design of Astatic Digital Systems with Application of Standard Normalized Transfer Functions, *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 1, pp. 16–33.

DOI: 10.17587/mau.20.16-33

References

1. **Denisenko V. V.** *Komp'yuternoe upravlenie technologicheskim protsessom, experimentom, oborudovaniem* (Computer control of technological process, experiment, equipment), Moscow, Goryachaya liniya-Telecom, 2009 (in Russian).
2. **Grigor'iev V. V., Bystrov S. V., Boykov V. I., Boltunov G. I., Mansurova O. K.** *Tsifrovye sistemy upravleniya* (Digital control systems), Sankt-Petersburg, SPbGTU ITMO, 2011 (in Russian).
3. **Lutsenko I. V.** *Sintez diskretnogo regulatora temperatury gazov gazoturbinnogo dvigatelya s uchetom trebovaniy grubosti* (Synthesis of a discrete regulator of gases temperature of the gas-turbine engine in view of roughness requirements), *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh — MMTT-18. Sbornik trudov XVIII Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii*, vol. 2, Sektsiya 2, Kazan, Publishing house of Kazanskii gosudarstvennyi tekhnologicheskii universitet, 2005, pp. 139–142 (in Russian).
4. **Stojanovic S. B., Debelkovic D. Lj., Antic D. S.** Finite-time Stability and Analysis of Discrete Time-delay Systems using Discrete Convolution of Delayed States, *FACTA UNIVERSITATIS. Series: Automatic Control and Robotics*, 2014, vol. 14, no. 32, pp. 147–158.
5. **Bakhilina I. M., Stepanov S. A.** On the design of discrete H_∞ -controllers, *Automation and Remote Control*, 2000, no. 61 (2), pp. 254–264.
6. **Pshikhovop V. Kh., Medvedev M. Yu.** *Upravlenie podvizhnymi ob'ektami v opredelennykh i neopredelennykh sredakh* (Control of mobile objects in the certain and uncertain environments), Moscow, Nauka, 2011 (in Russian).
7. **Kiselev O. N.** Minimization of basic quality indices in linear discrete systems, *Automation and Remote Control*, 2005, no. 66(3), pp. 398–405.
8. **Gaiduk A. R., Plaksienko E. A.** *Analiz i sintez sistem upravleniya s primeneniem sistemnykh invariantov v MATLAB* (Analysis and synthesis of control systems with application system invariants in MATLAB), Saarbrücken, Palmarium Academic Publishing, 2016 (in Russian).
9. **Wiener N.** The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. N. Y., 1949.
10. **Kalman R. E.** Contributions to the Theory of Optimal Control, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119.
11. **Letov A. M.** *Analiticheskoe konstruirovaniye regulyatorov I–III* (Analytical designing of regulators I–III), *Avtomatika i Telemekhanika*, 1960, no. 4–6 (in Russian).
12. **Volgin L. N.** *Elementy teorii upravlyayuschikh mashin (metod polinomialnykh uravneniy v zadachakh sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya s tsifrovymi vychislitel'nymi mashinami)* (Elements of the control machines theory (method of polynomial equations in tasks of synthesis of automatic control systems with digital computers)), Moscow, Sovetskoe radio, 1962 (in Russian).
13. **Volgin L. N.** *Optimal'noe diskretnoe upravlenie dinamicheskimi sistemami* (Optimal discrete control of dynamic systems), P. D. Krut'ko ed., Moscow, Nauka, 1986 (in Russian).
14. **Filimonov N. B.** *Problema kachestva protsessov upravleniya: smena optimizatsionnoy paradigmy* (Quality problem of control processes: change optimal paradigm), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2010, no. 12, pp. 2–10 (in Russian).
15. **Krasovskiy A. A., Pospelov G. S.** *Osnovy avtomatiki i tekhnicheskoy kibernetiki* (Bases of automatics and technical cybernetics), Moscow — Leningrad, Gosenergoizdat, 1962 (in Russian).
16. **Besekerskiy V. A., Popov E. P.** *Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* (The theory of control automatic systems), Moscow, Nauka, 1975 (in Russian).
17. **Makarov I. M., Menskiy B. M.** *Lineinye avtomaticheskije sistemy* (Linear automatic systems), Moscow, Mashinostroyeniye, 1982 (in Russian).
18. **Gaiduk A. R.** *Sintez sistem avtomaticheskogo upravleniya po peredatochnym funktsiyam* (Synthesis of systems of automatic control on transfer functions), *Avtomatika i Telemekhanika*, 1980, no. 1, pp. 11–16 (in Russian).
19. **Gaiduk A. R.** *Ob ogranicheniyakh, obuchovlennykh zadannoy chast'yu sistemy i upravlyayushim ustroystvom* (About the restrictions caused by the given part of system and controlling device), *Izvestiya vuzov. Priborostryeniye*, 1987, vol. XXX, no. 5, pp. 11–16 (in Russian).
20. **Gaiduk A. R., Plaksienko E. A.** *Sintez dinamicheskikh sistem po trebuemym pokazatelyam kachestva* (Synthesis of dynamic systems on required quality indices), *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2008, no. 4, pp. 7–12 (in Russian).
21. **Gaiduk A. R.** *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyy podkhod)* (Theory and methods of analytical design of automatic control systems (the polynomial approach)), Moscow, Phizmatlit, 2012 (in Russian).
22. **Kim D. P.** *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. T. 1. Lineinye sistemy* (Theory of automatic control. T. 1. Linear systems), Moscow, Phizmatlit, 2003 (in Russian).
23. **Kim D. P.** *Algebraicheskiy metod sinteza diskretnykh sistem upravleniya* (Algebraic method of synthesis of discrete control systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2013, no. 4, P. 8–13 (in Russian).
24. **Ivanov Yu. I., Yugay V. Ya.** *Primeneniye mikrokontrollerov AVR v sistemakh upravleniya* (Application of microcontrollers AVR in control systems), Taganrog, Izdatel'stvo TRTU, 2005 (in Russian).
25. **Gaiduk A. R., Belyaev V. E., P'yavchenko T. A.** *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya v primerakh i zadachakh s resheniyami v MATLAB* (The theory of automatic control in examples and tasks with solutions in MATLAB). Sankt-Petersburg, LAN', 2011 (in Russian).
26. **Gaiduk A. R., Gurenko B. V., Plaksienko E. A.** *K sintezu sistem upravleniya s chastichno zadannoy strukturoy po zheleaznym pokazatelyam kachestva* (To synthesis of control systems with given part of structure on desirable quality indices), *Nauchnyi Vestnik NGTU*, 2014, no. 2(55), pp. 19–29 (in Russian).
27. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *O probleme nerobastnosti spektra v zadachakh modal'nogo upravleniya* (Concerning the problem of nonrobust of spectrum in tasks of modal control), *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2011, no. 10, pp. 8–13 (in Russian).
28. **Nikol'skiy V. A.** *Ob odnom sposobe obespecheniya astatizma vtorogo poryadka v diskretnoy sisteme kombinirovannogo upravleniya s kompensatsiyey vozmushcheniya* (About one way of maintenance the second order astatic in discrete system of the combined control with indemnification of disturbance), *Izvestiya Vuzov. Electromekhanika*, 1978, no. 11, pp. 1168–1173 (in Russian).
29. **Semenov A. V., Gaiduk A. R., Gelozhe Yu. A., Semenov A. V.** *Protseduira avtomatizirovannogo sinteza tsifrovyykh upravlyayuschikh sistem* (Procedure of the automated synthesis of digital controlling systems), *Izvestiya UFU. Tekhnicheskie nauki. Tematicheskiy vypusk "Komp'yuternye i informatsionnye tekhnologii v nauke, inzhenerii i upravlenii"*, 2014, no. 4 (153), pp. 150–157 (in Russian).