

**И. Б. Фуртат**, д-р техн. наук, доц., вед. науч. сотр., cainenash@mail.ru,  
**П. А. Гущин**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., guschin.p@mail.ru,  
**А. А. Перегудин**, инженер-исследователь, zeekless@mail.ru,  
Институт проблем машиноведения РАН, Университет ИТМО, Санкт-Петербург

## Алгоритм управления по выходу нелинейными системами с компенсацией возмущений и помех измерения<sup>1</sup>

*Синтезирован алгоритм управления динамическими объектами с компенсацией параметрической неопределенности, внешних возмущений и помех измерения. Предполагается, что доступны измерению только выходные сигналы объектов, а не их производные. Объекты описываются нелинейной системой дифференциальных уравнений с векторными входными и выходными сигналами. В отличие от большинства существующих схем управления в настоящей статье размерности помехи измерения и выходного сигнала равны, источники сигналов помех и возмущений различны, параметрические и внешние возмущения могут присутствовать в любом уравнении модели объекта. Для одновременной компенсации возмущений и помех измерения предлагается выделить два канала. По первому каналу будет оцениваться часть помехи измерения, которая позволит частично восстановить информацию о не зашумленном выходе объекта. По второму каналу будет осуществляться компенсация возмущения. Таким образом, для одновременной компенсации возмущений и помех измерения требуется минимум два независимых канала измерения. Получены достаточные условия расчета параметров алгоритма в виде разрешимости линейного матричного неравенства. Показано, что уравнение замкнутой системы, полученной на базе предложенного алгоритма, зависит от возмущения и наименьшей составляющей помехи. Если же в сигнале помехи нельзя выделить наименьшую компоненту, то результаты переходных процессов зависят от той компоненты помехи, которая будет выбрана при синтезе системы управления. Таким образом, в отличие от большинства существующих схем управления, где уравнение замкнутой системы зависит от возмущения и помехи, полученный алгоритм обеспечивает лучшие результаты переходных процессов, поскольку они зависят не от всего вектора помехи, а только от ее наименьшей (одной) компоненты. Приведены результаты моделирования для нелинейного объекта третьего порядка и результаты синхронизации электрического генератора, подключенного к электроэнергетической сети. Численные примеры иллюстрируют эффективность предложенной схемы и робастность по отношению к случайным составляющим в помехе измерения и возмущениях.*

**Ключевые слова:** нелинейная система, компенсация, возмущение, помеха, S-процедура, линейное матричное неравенство

### Введение

Задачи управления в условиях возмущений и помех измерения достаточно широко распространены на практике, например, при управлении через сеть [1–4], управлении летательными аппаратами [5], управлении в электроэнергетических сетях [6], управлении в навигационных системах [7], в области цифровой обработки сигналов и изображений [8], управлении в химической промышленности [9] и т. д. Возмущения могут быть обусловлены влиянием внешней среды, неопределенностью параметров и структуры модели объекта. Помехи

измерения (шумы) могут быть связаны с ограничениями в канале передачи данных, с влиянием внешней среды на измеряемые сигналы и средства измерения, а также с особенностью самих измерительных устройств (абсолютная и относительная погрешности, класс точности, тип устройства и т. п.). В таких условиях проектируемая система управления должна обеспечивать выполнение поставленной цели. Нередко неучет возмущений или помех измерения приводит к нарушению целевого условия или к потере устойчивости замкнутой системы.

Задача управления в условиях возмущений и помех измерения усложняется, если доступен измерению только выходной сигнал объекта, а не вектор состояния. На сегодняшний день предложено достаточно много решений

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-10104) в ИПМаш РАН.

в данной области. Часть работ посвящена использованию различного рода линейных [10] и нелинейных [11, 12] фильтров для выделения или подавления сигналов с определенными частотами. В ряде других работ синтез систем управления основан на использовании фильтра Калмана для оценки вектора состояния объекта в условиях шумов [13, 14]. В работах [15–21] предложены решения проблемы влияния помех измерения (как правило, высокочастотных) на качество оценивания производных с использованием наблюдателя с большим коэффициентом усиления (high-gain observer). Большая погрешность оценки производных при наличии высокочастотной помехи ведет к значительному росту значения сигнала управления, что не допустимо на практике. В статье [17] данная проблема решается с использованием адаптивной настройки коэффициента наблюдателя. В работах [19, 20] используется наблюдатель повышенного динамического порядка. В статье [21] перед наблюдателем с большим коэффициентом усиления последовательно подключается фильтр низких частот для исключения влияния высокочастотных помех измерения. В работе [22] предложено решение задачи управления с использованием  $H^\infty$ -оптимизации. В работе [23], предполагая, что помехи измерения описываются синусоидальными сигналами, осуществлялась идентификация параметров данных сигналов и их дальнейшая компенсация. В статье [24] синтезирован статический закон управления по выходу с использованием метода инвариантных эллипсоидов и аппарата линейных матричных неравенств. В работе [25] рассмотрена компенсация возмущений и помех измерения с использованием метода вспомогательного контура. В статьях [1–4] проведен анализ влияния помех измерения, вызванных квантизацией выходного сигнала по уровню и ограниченной пропускной способностью канала передачи данных, на устойчивость системы управления, построенной с использованием алгоритма скоростного градиента.

Среди всех вышеприведенных алгоритмов в данной статье особый интерес вызывает алгоритм, предложенный в работе [25]. В [25] решена задача управления в условиях возмущений и помех измерения при более общих условиях на параметры модели, чем в работах [22–24]. Также, в отличие от работ [22–24], в [25] источники возмущений и помех измерения неза-

висимые, а произведение матриц перед возмущением и помехой не обязательно равно нулю. Однако в работе [25] размерность помех измерения меньше размерности измеряемого сигнала, параметрические и внешние возмущения могут присутствовать только в определенных уравнениях модели объекта, а также отсутствуют аналитические условия расчета параметров алгоритма. В работе [26] предложен алгоритм управления, позволяющий преодолеть данные проблемы. Однако алгоритм [26] разработан для линейных объектов с измеряемым вектором состояния и скалярным управлением. Настоящая статья посвящена обобщению результата, представленного в работе [26], на нелинейные объекты с векторными входными и выходными воздействиями, когда не доступен измерению вектор состояния.

В данной статье рассматривается нелинейный объект управления с векторными входными и выходными сигналами. Измерению доступен сигнал, равный сумме выхода объекта и помехи измерения, размерности которых совпадают, а источники помехи измерения и возмущения независимы. Параметрические и внешние возмущения могут присутствовать в любом уравнении модели объекта. Получено условие расчета параметров алгоритма в виде разрешимости линейного матричного неравенства (ЛМН).

В статье будут использованы следующие обозначения:  $R$  — множество действительных чисел;  $I_l$  — единичная матрица порядка  $l$ ;  $\tilde{I}$  — матрица размерности  $(m-1) \times m$ , полученная из единичной матрицы порядка  $m$  путем вычеркивания  $i$ -й строки;  $O_{n \times l}$  — нулевая матрица размерности  $n \times l$ ;  $A^+$  — псевдообратная матрица к  $A$ ;  $E_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$  — вектор соответствующей размерности, у которого  $j$ -я компонента равна 1, а остальные — нулю;  $|\cdot|$  и  $\|\cdot\|$  означает евклидову норму вектора и согласованную с ней норму матрицы соответственно;  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, модель которого описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + D(\psi(x) + c_0 u(t) + \varphi(t)), \\ y(t) &= Lx(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$z(t) = y(t) + \xi(t), \quad (2)$$

где  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  — вектор состояния;  $u(t) \in R^l$  — сигнал управления;  $y(t) \in R^m$  — выходной сигнал объекта, недоступный измерению ( $m \geq 2$ );  $z(t) \in R^m$  — сигнал, доступный измерению;  $\xi(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)]^T$  — ограниченная помеха измерения. Неизвестные функции  $\psi(x) \in R^l$  и  $\varphi(x, t) \in R^l$

удовлетворяют следующим условиям:  $\varphi(t)$  — ограниченная функция,  $|\dot{\varphi}(t)| \leq \chi_1$ ,  $|\psi(x)| \leq \alpha_1 |x|$  и  $\left\| \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right\| \leq \alpha_2$ ,  $\chi_1 > 0$ ,  $\alpha_1 > 0$  и  $\alpha_2 > 0$ . Матрицы  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times l}$ ,  $D \in R^{n \times l}$  и  $L \in R^{m \times n}$  — известны, причем  $A$  — гурвицева,  $(LD)^+(LD) = I_b$ ,  $(LD)^+(LB) = kI_b$ ,  $k \in R$ . Неизвестный коэффициент  $c_0$  принадлежит известному отрезку, а именно  $c_0 \in [c_{\min}, c_{\max}]$ , причем  $c_{\min} + k > 0$ .

Выполнение условий  $(LD)^+(LD) = I_b$ ,  $(LD)^+(LB) = kI_b$  потребуется в доказательстве Утверждения 1 (см. раздел 3) для формирования скалярного дифференциального оператора. Данный оператор позволит для объекта (1) с векторным входом и векторным выходом сформировать требуемую модель замкнутой системы и затем получить линейное матричное неравенство. Также из доказательства утверждения 1 будет видно, что выполнение условия  $c_{\min} + k > 0$  позволит обеспечить ограниченность сигнала управления. С практической точки зрения условие  $c_{\min} + k > 0$  равносильно обеспечению отрицательной обратной связи в замкнутой системе.

Предположим, что существует  $i$ -я компонента вектора  $\xi(t)$ , для которой выполнено следующее соотношение:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \xi_i(t) < \limsup_{t \rightarrow \infty} \xi_g(t), \quad (3)$$

где  $i \in \{1, \dots, m\}$  и  $g \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$ .

Поясним необходимость выполнения условия (3). Для одновременной компенсации независимых возмущений и помех измерения требуются минимум два независимых измерения выходного сигнала объекта. Пусть *априори* известно, что предельное значение  $i$ -й компоненты вектора  $\xi$  меньше, чем предельные значения остальных. Тогда сначала оценивается сигнал  $\tilde{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_m]^T$ , который является частью помехи измерения  $\xi$  без  $i$ -й компоненты. Как будет показано в конце следующего раздела, от значения  $i$ -й компоненты вектора  $\xi$



Рис. 1. Структурная схема системы управления  
Fig. 1. Block diagram of the control scheme

будет зависеть точность оценки вектора  $\tilde{\xi}$ , поэтому и требуется выполнение условия (3). Далее, зная оценку вектора  $\tilde{\xi}$ , можно построить оценку истинного выходного сигнала объекта и сформировать оценку возмущения, которую затем можно скомпенсировать.

Дополнительно предположим, что  $\dot{\xi}_i(t)$  — ограниченный сигнал и обозначим  $|\xi_i(t)| \leq \chi_2$  и  $|\dot{\xi}_i(t)| \leq \chi_3$ , где  $\chi_2$  и  $\chi_3$  — положительные константы.

Требуется разработать алгоритм управления, который обеспечит выполнение целевого условия

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t)| \leq \delta, \quad (4)$$

где значение  $\delta > 0$  будет определено в Утверждении 1 (см. раздел 3).

Сформулированную задачу будем решать в два этапа. На первом этапе (раздел 2) будет синтезирован алгоритм оценки вектора  $\tilde{\xi}$  (рис. 1). С использованием  $\tilde{\xi}$  на втором этапе (раздел 3) будет сформирована оценка  $\hat{y}$  выходного сигнала  $y$  и будет разработан алгоритм компенсации параметрических и внешних возмущений ("Компенсатор возмущений" на рис. 1).

## 2. Алгоритм компенсации помех измерения

Введем обозначения

$$\tilde{\xi}(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_{i-1}(t), \xi_{i+1}(t), \dots, \xi_m(t)]^T,$$

$$\tilde{E} = [E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_m]$$

и, принимая во внимание второе уравнение (1), перепишем (2) в виде

$$z(t) = Lx(t) + \tilde{E}\tilde{\xi}(t) + E_i\xi_i(t). \quad (5)$$

Исключим  $i$ -е уравнение в соотношении (5). Для этого, умножив (5) слева на матрицу  $\tilde{I} = \tilde{E}^T$ , получим

$$\tilde{z}(t) = \tilde{I}Lx(t) + \tilde{\xi}(t), \quad (6)$$

где  $\tilde{z}(t) = \tilde{I}z(t)$ . Обозначим

$$f(x, u, t) = \psi(x) + c_0 u(t) + \varphi(t). \quad (7)$$

Продифференцировав уравнение (6) по времени вдоль траекторий системы (1), имеем

$$\dot{\tilde{z}}(t) = \tilde{I}L A x(t) + \tilde{I}L B u(t) + \tilde{I}L D f(x, u, t) + \dot{\tilde{\xi}}(t). \quad (8)$$

Из постановки задачи известно, что сигнал  $x(t)$  не доступен измерению. Поэтому, следуя структуре выражения (5), введем новую переменную  $\tilde{x}(t)$  в виде

$$\tilde{x}(t) = L^+ [z(t) - \tilde{E}\tilde{\xi}(t) - E_i \xi_i(t)]. \quad (9)$$

С учетом соотношения (9) перепишем выражение (8) как

$$\dot{\tilde{z}}(t) = \tilde{I}L A L^+ [z(t) - \tilde{E}\tilde{\xi}(t) - E_i \xi_i(t)] + \tilde{I}L B u(t) + \tilde{I}L D f(x, u, t) + \tilde{I}L A (x(t) - \tilde{x}(t)) + \dot{\tilde{\xi}}(t). \quad (10)$$

Принимая во внимание выражения (5) и (9), преобразуем предпоследнее слагаемое в (10) как  $\tilde{I}L A (x(t) - \tilde{x}(t)) = \tilde{I}L A (I_n - L^+ L)x$ . Введем новые обозначения:

$$\tilde{A} = \tilde{I}L A L^+ \tilde{E}, \quad \tilde{A}_1 = \tilde{I}L A L^+, \quad \tilde{A}_2 = \tilde{I}L A (I_n - L^+ L), \\ \tilde{A}_3 = \tilde{I}L A L^+ E_i, \quad \tilde{B} = \tilde{I}L B, \quad \tilde{D} = \tilde{I}L D$$

и перепишем выражение (10) в виде

$$\dot{\tilde{\xi}}(t) = \tilde{A}\tilde{\xi}(t) - \tilde{A}_1 z(t) + \dot{\tilde{z}}(t) - \tilde{B}u(t) - \tilde{D}f(x, u, t) - \tilde{A}_2 x(t) + \tilde{A}_3 \xi_i(t). \quad (11)$$

Проинтегрировав выражение (11) по  $t$ , получим

$$\tilde{\xi}(t) = \int_0^t [\tilde{A}\tilde{\xi}(s) - \tilde{A}_1 z(s)] ds + \tilde{z}(t) - \int_0^t [\tilde{B}u(s) + \tilde{D}f(x, u, s) + \tilde{A}_2 x(s) - \tilde{A}_3 \xi_i(s)] ds + \tilde{\xi}(0) - \tilde{z}(0). \quad (12)$$

Очевидно, что выражение (12) не может быть использовано для оценки помехи измерения, поскольку содержит недоступные измерению сигналы. Однако, следуя структуре (12), введем алгоритм оценки вектора  $\tilde{\xi}(t)$  (рис. 1) в виде

$$\hat{\xi}(t) = \int_0^t [\tilde{A}\hat{\xi}(s) - \tilde{A}_1 z(s)] ds + \tilde{z}(t) + \gamma, \quad (13)$$

где  $\hat{\xi}(t)$  — вектор оценки сигнала  $\tilde{\xi}(t)$ ,  $\gamma \in R^{m-1}$  — вектор, выбираемый разработчиком.

Исследование влияния значений вектора  $\gamma$  на качество переходных процессов в замкнутой системе приведено в конце раздела 4.

Для оценки качества работы алгоритма (13) рассмотрим ошибку

$$e(t) = \tilde{\xi}(t) - \hat{\xi}(t). \quad (14)$$

Учитывая соотношения (11) и (13), продифференцируем выражение (14) по времени и результат запишем в виде

$$\dot{e}(t) = \tilde{A}e(t) - \tilde{B}u(t) - \tilde{D}f(x, u, t) - \tilde{A}_2 x(t) + \tilde{A}_3 \xi_i(t). \quad (15)$$

Из уравнения (15) следует, что значение ошибки  $e$  зависит от значения  $\xi_i$ , поэтому требуется *априори* выполнение условия (3). Кроме того, значение ошибки  $e$  зависит от  $f$  и  $u$ , причем соответствующим выбором управления  $u$  можно уменьшить влияние возмущения  $f$  на качество оценивания  $\tilde{\xi}$ . Решение проблемы компенсации возмущения рассмотрим в следующем разделе.

### 3. Алгоритм компенсации возмущений

В разделе 2 синтезирован алгоритм (13), который позволяет оценить часть сигнала помехи  $\xi(t)$  в виде сигнала  $\hat{\xi}(t)$ . Воспользуемся  $\hat{\xi}(t)$  для уточнения информации о сигнале  $y(t)$ . Пусть  $\hat{y}(t)$  — оценка  $y(t)$ . Принимая во внимание соотношения (5) и (13), введем выражение для  $\hat{y}(t)$  (рис. 1) в виде

$$\hat{y}(t) = z(t) - \tilde{E}\hat{\xi}(t) = Lx(t) + \tilde{E}e(t) + E_i \xi_i(t). \quad (16)$$

С учетом выражений (1) и (7) продифференцируем соотношение (16) по времени и результат запишем как

$$L D f(x, u, t) = \dot{\hat{y}}(t) - L A x(t) - L B u(t) - \tilde{E}\dot{e}(t) - E_i \dot{\xi}_i(t). \quad (17)$$

Следуя работе [27] и используя структуру уравнения (17), введем оценку  $\hat{f}$  возмущения  $f$  в виде

$$\hat{f}(t) = (LD)^+ (\dot{\hat{y}}(t) - LAL^+ \hat{y}(t) - \alpha(p)LBv(t)), \quad (18)$$

где  $\alpha(p)$  — скалярный дифференциальный оператор, структура которого будет задана ниже,  $v(t) \in R^l$  — вспомогательное управляющее воздействие, которое понадобится для формирования сигнала компенсации возмущений.

Введем вспомогательное управляющее воздействие:

$$v(t) = -\hat{f}(t). \quad (19)$$

Подставив (18) в (19), получим следующее выражение:

$$(I_l - (LD)^+ LB\alpha(p))v(t) = -(LD)^+ [\hat{y}(t) - LAL^+ y(t)]. \quad (20)$$

Зададим  $\alpha(p) = \frac{1-\mu p}{k}$ , где  $\mu > 0$  — достаточно малое число, и проинтегрируем выражение (20) по  $t$ :

$$v(t) = -\frac{1}{\mu}(LD)^+ \times \left[ \hat{y}(t) - LAL^+ \int_0^t \hat{y}(s) ds - y(0) \right] + v(0). \quad (21)$$

Для компенсации возмущений закон управления можно сформировать в виде  $u(t) = v(t)$ . Однако, как будет показано в доказательстве Утверждения 1, работоспособность закона управления не зависит от точного знания начальных условий  $\hat{y}(0)$  и  $v(0)$ . Таким образом, закон управления ("Компенсатор возмущений" на рис. 1) можно сформировать в виде

$$u(t) = -\frac{1}{\mu}(LD)^+ \left[ \hat{y}(t) - LAL^+ \int_0^t \hat{y}(s) ds - \theta \right], \quad (22)$$

где  $\theta \in R^m$  — вектор, выбираемый разработчиком. Исследование влияния значений вектора  $\theta$  на качество переходных процессов в замкнутой системе приведено в конце раздела 4.

Перед формулировкой утверждения введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_{21} &= \frac{1}{\mu} [c_0 A + kA - B(LD)^+ LA(I_n - L^+ L) - \\ &\quad - c_0 D(LD)^+ LA(I_n - L^+ L)]; \\ A_{22} &= \frac{1}{\mu} (-c_0 I_n - kI_n + \mu A); \\ A_{23} &= \frac{1}{\mu} [B(LD)^+ LAL^+ \tilde{E} + c_0 D(LD)^+ LAL^+ \tilde{E}]; \\ A_{24} &= \frac{1}{\mu} [-B(LD)^+ \tilde{E} - c_0 D(LD)^+ \tilde{E}]; \\ A_{41} &= \frac{1}{\mu} [-c_0 \tilde{A}_2 - k\tilde{A}_2 + \tilde{B}(LD)^+ LA(I_n - L^+ L) + \\ &\quad + c_0 \tilde{D}(LD)^+ LA(I_n - L^+ L)]; \\ A_{42} &= -\tilde{A}_2; \end{aligned}$$

$$A_{43} = \frac{1}{\mu} [c_0 \tilde{A} + k\tilde{A} - \tilde{B}(LD)^+ LAL^+ \tilde{E} - c_0 \tilde{D}(LD)^+ LAL^+ \tilde{E}];$$

$$A_{44} = \frac{1}{\mu} (-c_0 I_{m-1} - kI_{m-1} + \mu \tilde{A} + \tilde{B}(LD)^+ \tilde{E} + c_0 \tilde{D}(LD)^+ \tilde{E});$$

$$G_{21} = \frac{1}{\mu} (-B + kD); \quad G_{41} = \frac{1}{\mu} (\tilde{B} - k\tilde{D}),$$

$$F_{21} = D, \quad F_{41} = -\tilde{D},$$

$$B_{21} = \frac{1}{\mu} (-B + kD), \quad B_{22} = D;$$

$$B_{23} = \frac{1}{\mu} [B(LD)^+ + c_0 D(LD)^+] LAL^+ E_i;$$

$$B_{24} = \frac{1}{\mu} [-B(LD)^+ - c_0 D(LD)^+] E_i;$$

$$B_{41} = \frac{1}{\mu} (\tilde{B} - k\tilde{D}); \quad B_{42} = -\tilde{D}; \quad (23)$$

$$B_{43} = \frac{1}{\mu} (-\tilde{B}(LD)^+ LAL^+ E_i - c_0 \tilde{D}(LD)^+ LAL^+ E_i + c_0 \tilde{A}_3 + k\tilde{A}_3);$$

$$B_{44} = \frac{1}{\mu} (c_0 \tilde{D}(LD)^+ E_i + \tilde{B}(LD)^+ E_i + \mu \tilde{A}_3);$$

$$G_e = \begin{bmatrix} O_{n \times l} \\ G_{21} \\ O_{(m-1) \times l} \\ G_{41} \end{bmatrix}; \quad F_e = \begin{bmatrix} O_{n \times l} \\ F_{21} \\ O_{(m-1) \times l} \\ F_{41} \end{bmatrix};$$

$$C_1 = [I_n \quad O_{n \times n} \quad O_{n \times (m-1)} \quad O_{n \times (m-1)}];$$

$$C_2 = [O_{n \times n} \quad I_n \quad O_{n \times (m-1)} \quad O_{n \times (m-1)}];$$

$$A_e = \begin{bmatrix} O_{n \times n} & I_n & O_{n \times (m-1)} & O_{n \times (m-1)} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ O_{(m-1) \times n} & O_{(m-1) \times n} & O_{(m-1) \times (m-1)} & I_{m-1} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix};$$

$$B_e = \begin{bmatrix} O_{n \times 1} & O_{n \times 1} & O_{n \times 1} & O_{n \times 1} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ O_{(m-1) \times 1} & O_{(m-1) \times 1} & O_{(m-1) \times 1} & O_{(m-1) \times 1} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix};$$

$$\Psi =$$

$$= \begin{bmatrix} A_e^T P + PA_e + 2\beta P + & PG_e & PF_e & PB_e \\ + \tau_1 \alpha_1^2 C_1^T C_1 + \tau_2 \alpha_2^2 C_2^T C_2 & * & * & * \\ * & -\tau_1 I_l & O_{l \times l} & O_{l \times 4} \\ * & * & -\tau_2 I_l & O_{l \times 4} \\ * & * & * & -\rho I_4 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\beta > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 > 0$ ,  $P > 0$  — положительно определенная матрица, "\*" обозначает симметричный блок симметричной матрицы. Последовательность получения матриц (23) будет приведена в Приложении (доказательстве Утверждения 1) при выводе уравнения замкнутой системы.

**Утверждение 1.** Рассмотрим систему управления, состоящую из объекта (1), (2), алгоритма оценки помехи (13), (6) и закона управления (22), (16). Пусть для заданных чисел  $\beta > 0$  и  $\mu > 0$  существуют коэффициенты  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 > 0$ ,  $\rho > 0$  и матрица  $P > 0$  такие, что выполнено линейное матричное неравенство (ЛМН)

$$\Psi < 0. \quad (24)$$

Тогда алгоритм (6), (13), (16), (22) обеспечивает выполнение целевого условия (4), где

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho \sum_{i=1}^3 \chi_i^2}{2\beta \lambda_{\min}(P)}}, \quad (25)$$

$\lambda_{\min}(P)$  — наименьшее собственное число матрицы  $P$ .

В Утверждении 1 ЛМН  $\Psi < 0$  зависит от неизвестного параметра  $c_0$ , который принадлежит известному отрезку  $[c_{\min}, c_{\max}]$ . Поэтому для проверки  $\Psi < 0$  сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение 2.** ЛМН (24) выполнено, если выполнены следующие два ЛМН:

$$\Psi^- < 0 \text{ и } \Psi^+ < 0, \quad (26)$$

где  $\Psi^- = \Psi|_{A_e=A_e^-, B_e=B_e^-}$ ;  $\Psi^+ = \Psi|_{A_e=A_e^+, B_e=B_e^+}$ ;  
 $A_e^- = A_e|_{c_0=c_{\min}}$ ;  $A_e^+ = A_e|_{c_0=c_{\max}}$ ;  $B_e^- = B_e|_{c_0=c_{\min}}$ ;  
 $B_e^+ = B_e|_{c_0=c_{\max}}$ .

#### 4. Примеры

1. Рассмотрим объект управления (1), (2), где

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$c_0 \in [-0,4; 25]$  и  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\sqrt{3}$ . Остальные параметры в объекте (1), (2) будут определены ниже. Предположим, что выполнено условие (3) для  $i = 2$  и  $g = 1$ .

Для заданных параметров объекта легко проверить, что выполнены следующие условия:  $(LD)^+(LD) = 1$  и  $(LD)^+(LB) = k = 0,495$ .

Сформируем алгоритм управления. Так как  $i = 2$ , то  $\tilde{I} = [1 \ 0]$  и  $\tilde{E} = [1 \ 0]^T$ . Учитывая, что

$$L^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \text{ вычислим } \tilde{A} = -1 \text{ и } \tilde{A}_1 = [-1 \ 1].$$

Примем  $\gamma = 0$  и сформируем алгоритм оценки помехи (12) в виде

$$\hat{\xi}(t) = -\int_0^t (\hat{\xi}(s) + [-1 \ 1]z(s))ds + \tilde{z}(t), \quad (27)$$

где  $\tilde{z}(t) = z_1(t)$ . Вычислив  $(LD)^+ = [0,0495 \ 0,495]$ ,

$LAL^+ = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$  и задав  $\theta = [0 \ 0]^T$ , запишем закон управления (22) в виде

$$u(t) = -\frac{1}{\mu} [0,0495 \ 0,495] \times \left( \hat{y}(t) - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \int_0^t \hat{y}(s)ds \right), \quad (28)$$

где, согласно (16),  $\hat{y}(t) = z(t) - [1 \ 0]^T \hat{\xi}(t)$ .

Проверим условия Утверждения 2 с помощью пакета Yalmip. ЛМН, заданные (26), выполнены при  $\mu \in [2 \cdot 10^{-5}; 0,0057]$ . Проверка моделированием в MATLAB Simulink для  $\psi(x) = \sum_{i=1}^3 (x_i(t) + \sin x_i(t))$  показала, что решения (1) ограничены при  $\mu \in (0; 0,02]$ .

Продемонстрируем качество функционирования системы управления. Пусть в (1), (2)  $x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$ ,  $\psi(x) = \sum_{i=1}^3 (x_i(t) + \sin x_i(t))$  и

$$\varphi(t) = 0,2 + 0,5 \sin 0,7t + \cos 1,3t; \quad (29)$$

$$\xi_1(t) = 1 + 10 \sin 3t; \quad \xi_2(t) = 0,01 \sin 0,8t.$$

На рис. 2, а (см. вторую сторону обложки) представлена зависимость  $\delta(\mu, c_0)$ , которая рассчитана с помощью выражения (25). На рис. 2, б изображена зависимость  $\delta(\mu, c_0)$ , полученная путем моделирования замкнутой системы на базе алгоритма (27), (28) в MATLAB Simulink. Видно, что оценка (25) достаточно грубая. Однако из рис. 2, а, б (см. вторую сторону обложки) следует, что при одном и том же значении  $\mu = 0,0057$  обеспечивается наименьшее значение  $\delta$ . *Априори* указать более точную оценку  $\delta$  нельзя, однако ее можно получить на этапе моделирования, как показано на рис. 2, б.

Зададим  $\mu = 0,005$  в (28) и  $c_0 = 0$  в (1). На рис. 3 приведены результаты переходных процессов по  $y(t) = [y_1(t) \ y_2(t)]^T$  при  $u(t) = 0$  (рис. 3, а) и использовании алгоритма (27), (28) (рис. 3, б).

Предложенный алгоритм управления обоснован только для случая дифференцируемых шумов и возмущений. Поэтому далее рассмот-

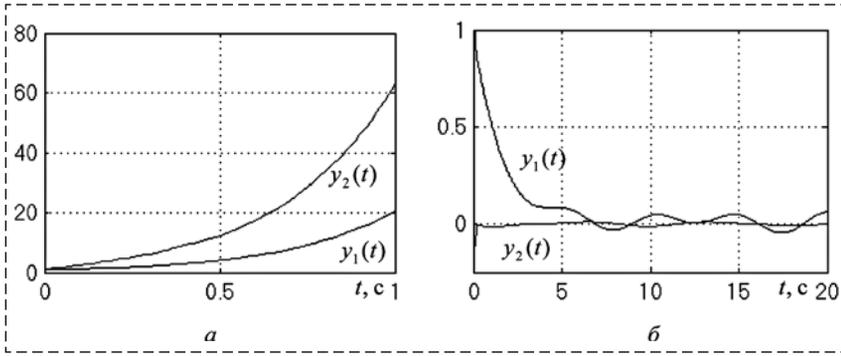


Рис. 3. Переходные процессы по  $y(t)$  при  $u(t) = 0$  (а) и при использовании алгоритма (27), (28) (б)

Fig. 3. The transients of  $y(t)$  obtained for  $u(t) = 0$  (a) and (27), (28) (б)

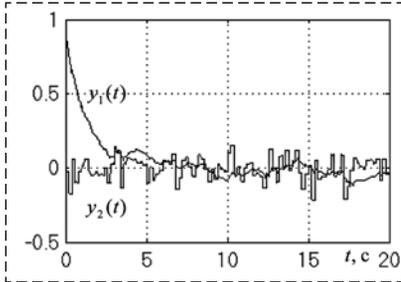


Рис. 4. Переходные процессы по  $y(t)$  при случайном возмущении и помехе вида (30)

Fig. 4. The transients of  $y(t)$  under random disturbance and measurement noise given by (30)

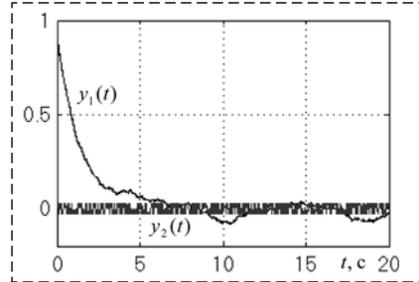


Рис. 5. Переходные процессы по  $y(t)$  в условиях (31)

Fig. 5. The transients of  $y(t)$  under (31)

рим численные исследования алгоритма в условиях недифференцируемых составляющих в шумах измерения и возмущениях. С этой целью сначала рассмотрим наличие случайных составляющих в возмущении и помехе в виде

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 0,2 + 0,5 \sin 0,7t + \cos 1,3t + d_1(t); \\ \xi_1(t) &= 1 + 10 \sin 3t + d_2(t); \\ \xi_2(t) &= 0,01 \sin 0,8t + d_3(t), \end{aligned} \quad (30)$$

где сигналы  $d_1(t)$ ,  $d_2(t)$  и  $d_3(t)$  получены с помощью генераторов белого шума в MATLAB Simulink со следующими параметрами: мощность шума (noise power) 3; 10;  $10^{-4}$  и время выборки (sample time) 0,05; 0,1; 0,2 с соответственно. На рис. 4 приведены результаты переходных процессов по  $y(t)$  при  $c_0 = 10$ .

Проверим теперь качество функционирования системы управления при следующих условиях:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 0,2 + 0,5 \sin 0,7t + \cos 1,3t + d_1(t); \\ z_1 &= q_1(x_1); z_2 = q_2(x_2), \end{aligned} \quad (31)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — функции квантования по уровню с интервалами квантования 0,5 и 0,05 соответственно. На рис. 5 приведены результаты моделирования по  $y(t)$  при  $c_0 = 10$ .

Результаты моделирования продемонстрировали, что расчет предельного значения параметра  $\mu$  с использованием условий Утверждения 2 дает допустимое отклонение от предельного значения, полученного с помощью моделирования в MATLAB Simulink. Также продемонстрирована робастность системы управления по отношению к случайным составляющим в возмущении и сигналах помехи. Как видно из рис. 3—5, величина  $\delta$  в (4) не превышает значения 0,3 спустя 4 с с начала моделирования во всех трех случаях.

Отметим, что от выбора значений векторов  $\gamma$  в (13) и  $\theta$  в (22) не зависит величина  $\delta$  в целевом условии (4). Однако от значений  $\gamma$  и  $\theta$  зависит качество переходных процессов по  $y(t)$ . Так, в ходе моделирования наилучшие результаты переходных процессов были получены при согласовании начальных условий  $\xi$  и  $\tilde{\xi}$ , а также  $u$  и  $v$ .

Продemonстрируем теперь качество работы алгоритма (27), (28) при  $D = B$  (т. е. рассматриваются согласованные возмущения) и  $\xi_2(t) = 0$  в (1), (2). Остальные параметры в (1), (2) заданы в начале примера и в (29). В данном случае значение  $\delta$  в целевом условии (4) уменьшается с уменьшением числа  $\mu$  почти пропорционально (рис. 6).

2. Рассмотрим модель электрического генератора [28, 29], которая описывается следующими уравнениями:

◆ *движения ротора генератора:*

$$\dot{\vartheta} = \omega, \quad \dot{\omega} = -0,5H^{-1}D\omega - 0,5H^{-1}\omega_0\Delta P_e; \quad (32)$$

◆ *контур возбуждения:*

$$\dot{E}'_q = T_{d0}^{-1}(E_f - E_q); \quad (33)$$

◆ *статорные контуры:*

$$\begin{aligned} E_q &= \frac{x_{ds}}{x'_{ds}} E'_q - \frac{x_d - x'_d}{x'_{ds}} V_s \cos \vartheta; E_f = k_c u_f; \\ P_e &= \frac{V_s E_q}{x_{ds}} \sin \vartheta; I_q = \frac{V_s}{x_{ds}} \sin \vartheta = \frac{P_e}{x_{ad} I_f}; \\ Q_e &= \frac{V_s}{x_{ds}} E_q \cos \vartheta - \frac{V_s^2}{x_{ds}}; E_q = x_{ad} I_f. \end{aligned} \quad (34)$$

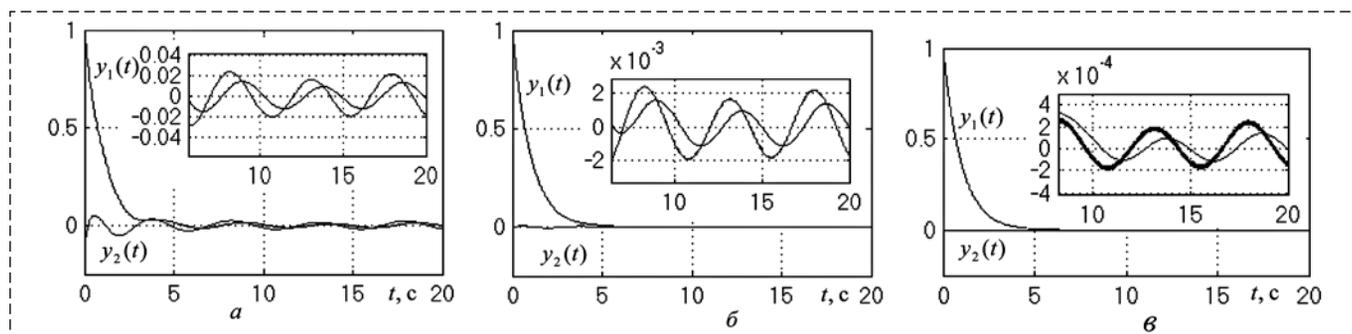


Рис. 6. Переходные процессы по  $y(t)$  при  $D = B$ ,  $\xi_2(t) = 0$  в (1), а также  $\mu = 0,01$  (а),  $\mu = 0,001$  (б) и  $\mu = 0,0001$  (в)  
 Fig. 6. The transient of  $y(t)$  for  $D = B$ ,  $\xi_2(t) = 0$  in (1) and  $\mu = 0,01$  (а),  $\mu = 0,001$  (б) and  $\mu = 0,0001$  (в)

Здесь  $\vartheta(t)$  — угол поворота ротора генератора относительно синхронной оси вращения (угол нагрузки), рад;  $\omega(t)$  — относительная скорость ротора (рад/с);  $\Delta P_e(t) = P_e(t) - P_m(t)$  (отн. ед.),  $P_e(t)$  — активная мощность генератора (отн. ед.),  $P_m(t)$  — механическая мощность генератора (отн. ед.);  $D$  — коэффициент демпфирования (отн. ед.);  $H$  — механическая инерционная постоянная (с);  $\omega_0$  — скорость ротора в синхронном режиме (рад/с);  $T_{d0}$  — постоянная времени контура возбуждения при разомкнутом статоре (с);  $x'_{ds} = x_T + 0,5x_L + x'_d$  (отн. ед.),  $x_T$  — реактивное сопротивление трансформатора (отн. ед.),  $x_L$  — реактивное сопротивление линии электропередачи (отн. ед.),  $x'_d$  — переходное реактивное сопротивление генератора по продольной оси (отн. ед.);  $x_{ds} = x_T + 0,5x_L + x_d$ ,  $x_d$  — синхронное реактивное сопротивление по продольной оси (отн. ед.);  $x_{ad}$  — сопротивление взаимоиנדукции между обмотками возбуждения и статора (отн. ед.);  $V_s$  — напряжение на шинах бесконечной мощности (отн. ед.);  $k_c$  — коэффициент приведения (отн. ед.),  $u_f(t)$  — напряжение на обмотке возбуждения ротора (отн. ед.);  $E_q(t)$  — ЭДС генератора по поперечной оси (отн. ед.);  $E'_q(t)$  — эквивалентная ЭДС возбуждения;  $E'_q(t)$  — переходная ЭДС по поперечной оси (отн. ед.);  $I_q(t)$  — ток статора по поперечной оси (отн. ед.);  $I_f(t)$  — ток возбуждения (отн. ед.);  $Q_e(t)$  — реактивная мощность (отн. ед.).

Предположим, что следующие сигналы доступны измерению:

$$z_1 = \vartheta + \xi_1, z_2 = \omega + \xi_2, z_3 = E'_q + \xi_3, \quad (35)$$

где  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  и  $\xi_3$  — шумы измерения. В работах [28, 29] отмечается, что в аварийных ситуациях угол нагрузки и относительная скорость измеряются с большим уровнем шумов, в то время

как величина  $E'_q$  измеряется с низким уровнем шумов. В нормальном режиме работы генератора измерения содержат низкий уровень шумов.

Согласно работе [30] линеаризованная модель (32)—(34) в окрестности точки равновесия  $\vartheta^* = \pi/3$  (рад),  $\omega^* = 0$  (рад/с) и  $E'_q^* = 0,9$  (отн. ед.) запишется в виде

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0,9 & -1,625 & -0,5 \\ -0,5 & 0 & -5,1635 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,52 \end{bmatrix} (u + f). \quad (36)$$

Здесь  $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ ,  $x_1 = \vartheta - \vartheta^*$ ,  $x_2 = \omega - \omega^*$  и  $x_3 = E'_q - E'_q^*$ ,  $f$  — возмущение, зависящее от параметрической неопределенности, сопротивления линии электропередач и остатка [30].

Пусть  $i$ -е уравнение будет третьим уравнением в (36) (см. условие (3)). Введем алгоритм (6), (13), (16), (22), где  $\mu = 0,01$  и  $\theta = 0$ .

Положим, что до  $t = 10$  с

$$\begin{aligned} f &= 1 + 0,2 \sin t + 0,1 \sin 0,3t + d_1, \\ \xi_1 &= 0,1 + 0,1 \sin 0,8t + d_2, \\ \xi_2 &= 0,2 + 0,1 \sin 1,1t + d_3, \\ \xi_3 &= 0,02 + 0,01 \sin 0,7t + d_4. \end{aligned} \quad (37)$$

Аварийная ситуация (например, короткое замыкание в линии электропередач [29]) произошла в момент  $t = 10$  с, при этом изменились следующие параметры:

$$\begin{aligned} f &= 10(1 + 0,2 \sin t + 0,1 \sin 0,3t + d_1), \\ \xi_1 &= 1 + 0,9 \sin 0,9t + 10d_2, \\ \xi_2 &= 3 + 2 \sin 1,1t + 10d_3, \\ \xi_3 &= 0,03 + 0,02 \sin 0,8t + d_4. \end{aligned} \quad (38)$$

Аварийная ситуация устранена с помощью открытия блокираторов в линии электропередач в момент времени  $t = 20$  с с восста-

новлением параметров (37). В (37) и (38) сигналы  $d_1, d_2, d_3$  и  $d_4$  получены с помощью генераторов белого шума в MATLAB Simulink со следующими параметрами: мощность шума 0,1; 0,3;  $10^{-4}$  и 0,7 и время выборки 0,07; 0,01; 0,03 и 0,1 с соответственно.

Сравним предложенный алгоритм с алгоритмом из работы [29]. Согласно [29], рассмотрим закон управления  $u = [1 \ 1,5 \ 2,1]x$ . На рис. 7 приведены результаты переходных процессов для предложенной системы управления (рис. 7, а) и алгоритма из работы [29] (рис. 7, б). Из рис. 7, а следует, что предложенный алгоритм управления обеспечивает компенсацию возмущений и помех измерения после 6 с с точностью 0,05. Алгоритм из работы [29] не обеспечивает одновременную компенсацию возмущений и помех измерения (рис. 7, б).

### Заключение

В статье разработан алгоритм управления с компенсацией возмущений и помех измерения для нелинейных объектов. В отличие от существующих результатов, в представленной статье: 1) алгоритм работоспособен в условиях помех измерения, размерности которых равны размерности выходного сигнала объекта управления; 2) значения возмущений и помех могут не совпадать; 3) не используется наблюдатель производных; 4) параметрические и внешние возмущения могут присутствовать в любом уравнении модели объекта. Получено линейное матричное неравенство, разрешимость которого гарантирует предельную ограниченность решений уравнения объекта в замкнутой системе. Результаты моделирования подтвердили результаты аналитических расчетов и продемонстрировали эффективность предложенной схемы управления в условиях случайных возмущений и помех измерения и при возможном наличии запаздывания в канале состояния. Полученные результаты имеют тривиальное обобщение на управление нелинейными сетевыми системами в условиях параметрической интервальной неопределенности, внешних ограниченных возмущений, помех в канале измерения и наличия коммуникационного запаздывания.

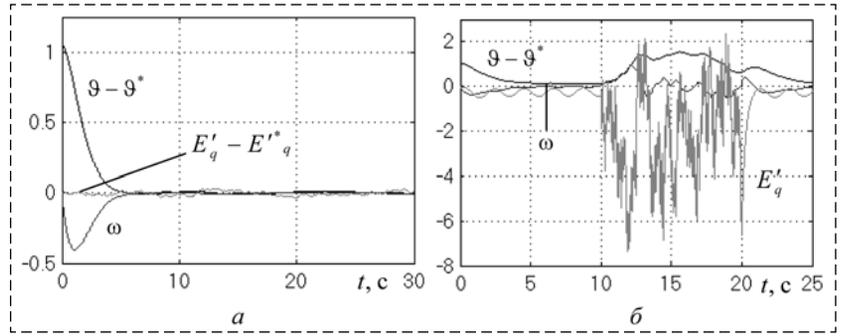


Рис. 7. Переходные процессы по  $9 - 9^*$ ,  $\omega$  и  $E'_q - E''_q$  для предложенного алгоритма (а) и алгоритма из [29] (б)

Fig. 7. The transients of  $9 - 9^*$ ,  $\omega$  and  $E'_q - E''_q$  for the proposed algorithm (а) and algorithm from [29] (б)

### ПРИЛОЖЕНИЕ

**Доказательство Утверждения 1.** Доказательство Утверждения 1 разделим на четыре шага. На шаге 1 будет получено уравнение по переменной  $x$  с учетом выражений (1), (7), (14), (16), (17), (19). На шаге 2 будет получено уравнение по переменной  $e$  с учетом выражений (1), (7), (14), (16), (17), (19). На базе полученных уравнений по переменным  $x$  и  $e$  на шаге 3 будет сформировано уравнение замкнутой системы и проведен анализ его устойчивости. На шаге 4 будет показана ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

*Шаг 1.* Из соотношений (21) и (22) следует, что  $u(t) - v(t) = \zeta$ , где  $\zeta = \frac{1}{\mu}(LD)^+[\theta - y(0)] - v(0)$ . Принимая во внимание соотношения (1), (7) и условие  $(LD)^+(LD) = I_p$ , перепишем выражение (20) в виде

$$v(t) = \underbrace{-\psi(x) - c_0 u(t) - \varphi(t)}_{-f(x,u,t)} + \underbrace{(LD)^+[L\dot{x}(t) - LAx(t) - LBu(t)]}_{f(x,u,t)} + \underbrace{\left[ \begin{array}{l} -L\dot{x}(t) - \tilde{E}\dot{e}(t) - E_i\dot{\xi}_i(t) + \\ + LAL^+Lx(t) + LAL^+\tilde{E}e(t) + \\ + LAL^+E_i\xi_i(t) + \alpha(p)LBv(t) \end{array} \right]}_{-f(x,u,t)}. \quad (\text{П.1})$$

Приняв  $\alpha(p) = \frac{1 - \mu p}{k}$  и учитывая, что  $v(t) = u(t) - \zeta$ , перепишем (П.1) как

$$[c_0 + k + \mu p]u(t) = -\psi(x) - \varphi(t) + (LD)^+[-\tilde{E}\dot{e}(t) - E_i\dot{\xi}_i(t) - LA(I_n - L^+L)x(t) + LAL^+\tilde{E}e(t) + LAL^+E_i\xi_i(t)]. \quad (\text{П.2})$$

Умножив слева  $f(x, u, t)$  на оператор  $[c_0 + k + \mu p]$  и принимая во внимание выражения (7) и (П.2), результат запишем в виде

$$\begin{aligned} & [c_0 + k + \mu p]f(x, u, t) = \\ & = \mu \dot{\psi}(x) + \mu \dot{\varphi}(t) + k\psi(x) + k\varphi(t) + \\ & + c_0(LD)^+ [-\tilde{E}\dot{e}(t) - E_i \dot{\xi}_i(t) - LA(I_n - L^+L)x(t) + \\ & + LAL^+ \tilde{E}e(t) + LAL^+ E_i \xi_i(t)]. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Умножив слева (1) на оператор  $[c_0 + k + \mu p]$  и учитывая соотношения (П.2), (П.3), перепишем (1) в виде

$$\begin{aligned} \mu \ddot{x}(t) & = (-c_0 I_n - kI_n + \mu A)\dot{x}(t) + \\ & + [c_0 A + kA - B(LD)^+ LA(I_n - L^+L) - \\ & - c_0 D(LD)^+ LA(I_n - L^+L)]x(t) + (-B + kD)\psi(x) + \\ & + (-B + kD)\varphi(t) + \mu D\dot{\psi}(x) + \mu D\dot{\varphi}(t) + \\ & + [-B(LD)^+ \tilde{E} - c_0 D(LD)^+ \tilde{E}]\dot{e}(t) + \\ & + [B(LD)^+ LAL^+ \tilde{E} + c_0 D(LD)^+ LAL^+ \tilde{E}]e(t) + \\ & + [-B(LD)^+ - c_0 D(LD)^+]E_i \dot{\xi}_i(t) + \\ & + [B(LD)^+ + c_0 D(LD)^+]LAL^+ E_i \xi_i(t). \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Обозначим  $\eta_1(t) = x(t)$ ,  $\eta_2(t) = \dot{x}(t)$  и с учетом обозначений (23) перепишем (П.4) в виде системы:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1(t) & = \eta_2(t), \\ \dot{\eta}_2(t) & = A_{21}\eta_1(t) + A_{22}\eta_2(t) + A_{23}e(t) + \\ & + A_{24}\dot{e}(t) + G_{21}\psi(\eta_1) + F_{21}\dot{\psi}(\eta_1) + B_{21}\varphi(t) + \\ & + B_{22}\dot{\varphi}(t) + B_{23}\xi_i(t) + B_{24}\dot{\xi}_i(t). \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

*Шаг 2.* Умножим слева выражение (15) на  $[c_0 + k + \mu p]$  и, учитывая соотношения (П.2) и (П.3), перепишем (15) как

$$\begin{aligned} \mu \ddot{e}(t) & = (-c_0 I_{m-1} - kI_{m-1} + \mu \tilde{A} + \tilde{B}(LD)^+ \tilde{E} + \\ & + c_0 \tilde{D}(LD)^+ \tilde{E})\dot{e}(t) + [c_0 \tilde{A} + k\tilde{A} - \\ & - \tilde{B}(LD)^+ LAL^+ \tilde{E} - c_0 \tilde{D}(LD)^+ LAL^+ \tilde{E}]e(t) + \\ & + [-c_0 \tilde{A}_2 - k\tilde{A}_2 + \tilde{B}(LD)^+ LA(I_n - L^+L) + \\ & + c_0 \tilde{D}(LD)^+ LA(I_n - L^+L)]x(t) - \mu \tilde{A}_2 \dot{x}(t) + \\ & + \tilde{B}\psi(x) + \tilde{B}\varphi(t) - \mu \tilde{D}\dot{\psi}(x) - \mu \tilde{D}\dot{\varphi}(x, t) - \\ & - k\tilde{D}\psi(x) - k\tilde{D}\varphi(t) + (c_0 \tilde{D}(LD)^+ E_i + \\ & + \tilde{B}(LD)^+ E_i + \mu \tilde{A}_3)\dot{\xi}_i(t) + \\ & + (-\tilde{B}(LD)^+ LAL^+ E_i - \\ & - c_0 \tilde{D}(LD)^+ LAL^+ E_i + c_0 \tilde{A}_3 + k\tilde{A}_3)\xi_i(t). \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Обозначим  $\sigma_1(t) = e(t)$ ,  $\sigma_2(t) = \dot{e}(t)$  и с учетом обозначений (23) преобразуем уравнение (П.6) к виду

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1(t) & = \sigma_2(t), \\ \dot{\sigma}_2(t) & = A_{41}\eta_1(t) + A_{42}\eta_2(t) + A_{43}\sigma_1(t) + \\ & + A_{44}\sigma_2(t) + G_{41}\psi(\eta_1) + F_{41}\dot{\psi}(\eta_1) + \\ & + B_{41}\varphi(t) + B_{42}\dot{\varphi}(x, t) + B_{43}\xi_i(t) + B_{44}\dot{\xi}_i(t). \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

*Шаг 3.* Введем векторы  $x_e = \text{col}\{\eta_1, \eta_2, \sigma_1, \sigma_2\}$  и  $d = \text{col}\{\varphi, \dot{\varphi}, \xi_i, \dot{\xi}_i\}$ . Принимая во внимание обозначения (23), объединим системы (П.5) и (П.7) в виде

$$\dot{x}_e(t) = A_e x_e(t) + G_e \psi(\eta_1) + F_e \dot{\psi}(\eta_1) + B_e d(t). \quad (\text{П.8})$$

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = x_e^T(t) P x_e(t). \quad (\text{П.9})$$

Найдем условие, при котором будет выполнено неравенство

$$\dot{V} + 2\beta V - \rho d^T d \leq 0. \quad (\text{П.10})$$

Для этого, принимая во внимание соотношения (П.8) и (П.9), перепишем неравенство (П.10) как

$$\begin{aligned} x_e^T(t) (A_e^T P + P A_e) x_e(t) + 2x_e^T(t) P G_e \psi(\eta_1) + \\ + 2x_e^T(t) P F_e \dot{\psi}(\eta_1) + 2x_e^T(t) P B_e d(t) + \\ + 2\beta x_e^T(t) P x_e(t) - \rho d^T(t) d(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

С учетом обозначений (23) и того, что  $\dot{\psi}(\eta_1) = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} C_2 x_e$ ,  $|\psi(x)| \leq \alpha_1 |x|$  и  $\left\| \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right\| \leq \alpha_2$ , рассмотрим следующие оценки сверху:

$$\begin{aligned} \psi^T(\eta_1) \psi(\eta_1) & \leq \alpha_1^2 x_e^T C_1^T C_1 x_e, \\ \dot{\psi}^T(\eta_1) \dot{\psi}(\eta_1) & \leq \alpha_2^2 x_e^T C_2^T C_2 x_e. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Введем вектор  $z = \text{col}\{x_e, \psi(\eta_1), \dot{\psi}(\eta_1), d\}$  и перепишем выражения (П.11) и (П.12) соответственно как

$$z^T \begin{bmatrix} A_e^T P + P A_e + 2\beta P & P G_e & P F_e & P B_e \\ * & O_{l \times l} & O_{l \times l} & O_{l \times 4} \\ * & * & O_{l \times l} & O_{l \times 4} \\ * & * & * & -\rho I_4 \end{bmatrix} z \leq 0;$$

$$\begin{aligned} \tau_1 z^T & \begin{bmatrix} \alpha_1^2 C_1^T C_1 & O_{2(n+m-1) \times l} & O_{2(n+m-1) \times l} & O_{2(n+m-1) \times 4} \\ * & -I_l & O_{l \times l} & O_{l \times 4} \\ * & * & O_{l \times l} & O_{l \times 4} \\ * & * & * & O_{4 \times 4} \end{bmatrix} z \geq 0; \quad (\text{П.13}) \\ \tau_2 z^T & \begin{bmatrix} \alpha_2^2 C_2^T C_2 & O_{2(n+m-1) \times l} & O_{2(n+m-1) \times l} & O_{2(n+m-1) \times 4} \\ * & O_{l \times l} & O_{l \times l} & O_{l \times 4} \\ * & * & -I_l & O_{l \times 4} \\ * & * & * & O_{4 \times 4} \end{bmatrix} z \geq 0. \end{aligned}$$

Согласно S-процедуре для одновременного выполнения условий (П.13) достаточно, чтобы было выполнено ЛМН  $\Psi < 0$ , где  $\Psi$  определена в форме (23). Таким образом, неравенство (П. 10) выполнено при  $\Psi < 0$ . Вместе с тем, из соотношений (П. 9) и (П.1 0) следует, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (x_e^T P x_e) \leq \frac{\rho \sum_{i=1}^3 \chi_i^2}{2\beta \lambda_{\min}(P)}. \quad \text{С учетом соотно-}$$

шений  $\lambda_{\min}(P)x^T x \leq \lambda_{\min}(P)x_e^T x_e \leq x_e^T P x_e$  получим оценку для  $\delta$  в виде (25).

**Шаг 4.** Поскольку вектор  $x_e$  — предельно ограниченный, то сигналы  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $e$  и  $\dot{e}$  предельно ограниченные. Предельная ограниченность сигналов  $z$ ,  $\tilde{z}$  и  $\dot{z}_i$  следует из соотношений (5), (6) и ограниченности  $\xi$ ,  $\xi_i$ . Сигналы  $\hat{y}$  и  $\dot{\hat{y}}$  ограничены в силу (16). Из (П.2) и условия  $c_{\min} + k > 0$  следует ограниченность сигнала  $u$ . Ограниченность  $\int_0^t \hat{y}(s) ds$  следует из закона (22). Сигнал  $\hat{\xi}$  ограничен из (14). Таким образом, функция  $\int_0^t [\tilde{A}\hat{\xi}(s) - \tilde{A}_1 z(s)] ds$  ограничена в силу (13). Следовательно, все сигналы ограничены в замкнутой системе.

**Доказательство Утверждения 2.** Из обозначений (23) следует, что матрица  $\Psi$  аффинна по матрицам системы (П.8), матрицы  $A_e$ ,  $G_e$ ,  $F_e$  и  $B_e$  линейно зависят от параметра  $c_0$ . Таким образом, согласно замечанию 2 в работе [31], для проверки ЛМН  $\Psi < 0$  достаточно вычислить  $\Psi$  в вершинах  $c_0 \in [c_{\min}, c_{\max}]$ , т. е. достаточно проверить два ЛМН (26).

#### Список литературы

1. Fradkov A. L., Andrievsky B., Evans R. J. Synchronization of Passifiable Lurie Systems Via Limited-Capacity Communication Channel // IEEE Trans. on Circuits and Systems—1: Regular papers. 2009. Vol. 56, N. 2. P. 430–439.
2. Андриевский Б. Р., Матвеев А. С., Фрадков А. Л. Управление и оценивание при информационных ограниче-

ниях: к единой теории управления, вычислений и связи // АиТ. 2010. № 4. С. 34–99.

3. Fradkov A. L., Andrievsky B., Ananyevskiy M. S. Passification based synchronization of nonlinear systems under communication constraints and bounded disturbances // Automatica. 2015. Vol. 55. P. 287–293.

4. Furtat I. B., Fradkov A. L., Liberzon D. Compensation of disturbances for MIMO systems with quantized output // Automatica. 2015. Vol. 60. P. 239–244.

5. Fradkov A. L., Andrievsky B., Peaucelle D. Estimation and Control Under Information Constraints for LAAS Helicopter Benchmark // IEEE Trans. on Control Systems Technology. 2010. Vol. 18, N. 5. P. 1180–1187.

6. Furtat I. B., Fradkov A. L. Robust control of multi-machine power systems with compensation of disturbances // International Journal of Electrical Power & Energy Systems. 2015. Vol. 73. P. 584–590.

7. Степанов О. А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации: учеб. пособие для вузов. СПб: Электронприбор, 2009.

8. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2007.

9. Кватернак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.

10. Raumann L. D. Design and Analysis of Analog Filters: A Signal Processing Perspective. Springer Science & Business Media, 2001.

11. Haykin S. Adaptive Filter Theory. Prentice-Hall, Inc., 1991.

12. Katzenelson J., Gould L. A. The design of nonlinear filters and control systems. Part II // Information and Control. 1964. Vol. 7, N. 2. P. 117–145.

13. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. Детерминированное наблюдение и стохастическая фильтрация. М.: Наука, 1982.

14. Степанов О. А. Фильтр Калмана. История и современность. (К 80-летию Рудольфа Эмиля Калмана) // Гирскопия и навигация. 2010. № 2 (69). С. 107–121.

15. Ahrens J., Khalil K. High-gain observers in the presence of measurement noise: A switched-gain approach // Automatica. 2009. Vol. 45. P. 936–943.

16. Boizot N., Busvelle E., Gauthier J. An adaptive high-gain observer for nonlinear systems // Automatica. 2010. Vol. 46. P. 1483–1488.

17. Sanfelice R., Praly L. On the performance of high-gain observers with gain adaptation under measurement noise // Automatica. 2011. Vol. 47. P. 2165–2176.

18. Prasov A., Khalil H. A nonlinear high-gain observer for systems with measurement noise in a feedback control framework // IEEE Trans. Automat. Contr. 2013. Vol. 58. P. 569–580.

19. Wang L., Astolfy D., Hongye S., Marconi L., Isidori A. Output stabilization for a class of nonlinear systems via high-gain observer with limited gain power // IFAC PapersOnLine. 2015. Vol. 48 P. 730–735.

20. Astolfy D., Marconi L. A high-gain nonlinear observer with limited gain power // IEEE Trans. Automatic Control. 2015. Vol. 60. P. 3059–3064.

21. Nekhoroshikh A., Furtat I. Robust Stabilization of Linear Plants under Uncertainties and High-Frequency Measurement Noises // Proc. of the 25th Mediterranean Conference on Control and Automation, Malta. 2017.

22. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления / Под ред. Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МТТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.

23. Pigg S., Bodson M. Adaptive Algorithms for the Rejection of Sinusoidal Disturbances Acting on Unknown Plants // IEEE Trans. on Control Systems Technology. 2010. Vol. 18, N. 4. P. 822–836.

24. Поляк Б. Т., Топунов М. В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // АиТ. 2008. № 5. С. 72–90.

25. **Цыкунов А. М.** Робастное управление с компенсацией возмущений. М.: Физматлит, 2012.

26. **Furtat I. B.** Control of Linear Time-Invariant Plants with Compensation of Measurement Noises and Disturbances // Accepted at the 56th IEEE Conference on Decision and Control (CDC2017), December 12–15, 2017, Melbourne, Australia.

27. **Furtat I. B.** Disturbance Compensation Algorithm Under Saturation of Control Signal // Proc. of the 20th World Congress of The International Federation of Automatic Control, France. 2017. P. 6724–6729.

28. **Anderson P. M., Fouad A. A.** Power Systems Control and Stability. Iowa State University Press, 1997.

29. **Guo G., Hill D. J., Wang Y.** Nonlinear output stabilization control for multimachine power systems // IEEE Trans. on Circuits and Systems. 2000. Part I. Vol. 47, N. 1. P. 46–53.

30. **Dehghani M., Nikravesh S. K. Y.** Nonlinear state space model identification of synchronous generator // Electric Power Systems Research. 2008. Vol. 78. P. 926–940.

31. **Fridman E.** A refined input delay approach to sampled-data control // Automatica. 2010. Vol. 46. P. 421–427.

## Output Feedback Algorithm for Nonlinear Systems with Compensation of Bounded Disturbances and Measurement Noises

I. B. Furtat, P. A. Gushchin, A. A. Peregudin

Institute of Problems of Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences,  
199178, St. Petersburg, Russian Federation

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russian Federation

Corresponding author: **Furtat Igor B.**, D. Sc., Assistant Professor,  
Institute of Problems of Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences, 199178, St. Petersburg, Russia,  
ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russian Federation, e-mail: cainenash@mail.ru

Accepted on August 21, 2018

### Abstract

The output feedback algorithm for dynamic plants with compensation of parametric uncertainty, external disturbances and measurement noises is synthesized. The plants are described by a nonlinear system of differential equations with vector input and output signals. Unlike most existing control schemes in this paper the dimensions of the measurement interference and the output signal are equal, the sources of the signals of disturbances and disturbances are different, parametric and external disturbances can be present in any equation of the plant model. For simultaneous compensation of disturbances and measurement noises it is proposed to consider two channels. On the first channel a part of the measurement noises will be estimated which will allow partial recovery of the information about the plant noisy output. On the second channel the disturbances will be compensated. Thus, at least two independent measurement channels are required for simultaneous compensation of disturbances and measurement noises. Sufficient conditions for calculating the parameters of the algorithm in the form of solvability of the linear matrix inequality are obtained. It is shown that the equation of a closed-loop system obtained on the basis of the proposed algorithm depends on the disturbances and the smallest component of the measurement noise. However, if the smallest component cannot be identified a priori, the results of the transients depend on the component of the noise that will be selected in the synthesis of the control system. Thus, unlike most existing control schemes, where the equation of a closed-loop system depends on disturbance and noise, the resulting algorithm provides better transients, because they do not depend on the entire noise vector, but only on its smallest (one) component. The simulations for a third-order nonlinear plant and the synchronization of an electrical generator connected to the power grid are presented. Numerical examples illustrate the effectiveness of the proposed scheme and the robustness with respect to random components in the noises and disturbances.

**Keywords:** nonlinear system, compensation, disturbance, noise, S-procedure, linear matrix inequality

**Acknowledgements.** The study was performed by a grant from the Russian Science Foundation (Project № 18-79-10104) in IPME RAS

For citation:

**Furtat I. B., Gushchin P. A., Peregudin A. A.** Output Feedback Algorithm for Nonlinear Systems with Compensation of Bounded Disturbances and Measurement Noises, *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 1, pp. 3–15.

DOI: 10.17587/mau.20.3-15

### References

1. **Fradkov A. L., Andrievsky B., Evans R. J.** Synchronization of Passifiable Lurie Systems Via Limited-Capacity Communication Channel, *IEEE Trans. on Circuits and Systems—I: Regular papers*, 2009, vol. 56, no. 2, pp. 430–439.

2. **Andrievskij B. R., Matveev A. S., Fradkov A. L.** *Upravlenie i ocenivanie pri informacionnyh ogranichenijah: k edinoj teorii upravlenija, vychislenij i svjazi* (Control and estimation with informational limitations), *Automatika i Telemekhanika*, 2010, no. 4, pp. 34–99 (in Russian).

3. **Fradkov A. L., Andrievsky B., Ananyevskiy M. S.** Passification based synchronization of nonlinear systems under communication constraints and bounded disturbances, *Automatica*, 2015, vol. 55, pp. 287–293.

4. **Furtat I. B., Fradkov A. L., Liberzon D.** Compensation of disturbances for MIMO systems with quantized output, *Automatica*, 2015, vol. 60, pp. 239–244.

5. **Fradkov A. L., Andrievsky B., Peaucelle D.** Estimation and Control Under Information Constraints for LAAS Helicopter Benchmark, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 2010, vol. 18, no. 5, pp. 1180–1187.

6. **Furtat I. B., Fradkov A. L.** Robust control of multi-machine power systems with compensation of disturbances, *Interna-*

tional Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2015, vol. 73, pp. 584–590.

7. **Stepanov O. A.** *Osnovy teorii ocenivaniya s prilozheniyami k zadacham obrabotki navigacionnoj informacii, uchebnoe posobie dlja vuzov* (Basics of estimation theory with applications), SPb, Jelektropribor, 2009 (in Russian).

8. **Oppengejm A., Shafer R.** *Cifrovaja obrabotka signalov* (Digital signal processing), Moscow, Tehnosfera, 2007 (in Russian).

9. **Kvakernaak H., Sivan R.** *Linejnye optimal'nye sistemy upravlenija* (Linear optimal control systems), Moscow, Mir, 1977 (in Russian).

10. **Paarmann L. D.** *Design and Analysis of Analog Filters: A Signal Processing Perspective*, Springer Science & Business Media, 2001.

11. **Haykin S.** *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, Inc., 1991.

12. **Katzenelson J., Gould L. A.** The design of nonlinear filters and control systems. Part II, *Information and Control*, 1964, vol. 7, no. 2, pp. 117–145.

13. **Brammer K., Ziffing G.** *Fil'tr Kalmana-B'jusi. Determinirovannoe nabljudenie i stohasticheskaja fil'tracija* (The Kalman-Busch filter. Deterministic observation and stochastic filtration), Moscow, Nauka, 1982 (in Russian).

14. **Stepanov O. A.** *Fil'tr Kalmana. Istorija i sovremennost'* (Kalman Filter. History and modernity), *Giroskopija i Navigacija*, 2010, no. 2 (69), pp. 107–121 (in Russian).

15. **Ahrens J., Khalil K.** High-gain observers in the presence of measurement noise: A switched-gain approach, *Automatica*, 2009, vol. 45, pp. 936–943.

16. **Boizot N., Busvelle E., Gauthier J.** An adaptive high-gain observer for nonlinear systems, *Automatica*, 2010, vol. 46, pp. 1483–1488.

17. **Sanfelice R., Praly L.** On the performance of high-gain observers with gain adaptation under measurement noise, *Automatica*, 2011, vol. 47, pp. 2165–2176.

18. **Prasov A., Khalil H.** A nonlinear high-gain observer for systems with measurement noise in a feedback control framework, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2013, vol. 58, pp. 569–580.

19. **Wang L., Astolfy D., Hongye S., Marconi L., Isidori A.** Output stabilization for a class of nonlinear systems via high-gain observer with limited gain power, *IFAC Papers OnLine*, 2015, vol. 48, pp. 730–735.

20. **Astolfy D., Marconi L.** A high-gain nonlinear observer with limited gain power, *IEEE Trans. Automatic Control*, 2015, vol. 60, pp. 3059–3064.

21. **Nekhoroshikh A., Furtat I.** Robust Stabilization of Linear Plants under Uncertainties and High-Frequency Measurement Noises, *Proc. of the 25th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Malta, 2017.

22. **Egupov N.D.** ed. *Metody robustnogo, nejro-nechetkogo i adaptivnogo upravlenija* (Methods of robust, fuzzy and adaptive control), Moscow, Publishing house of MTTU im. N. Je. Bauman, 2002 (in Russian).

23. **Pigg S., Bodson M.** Adaptive Algorithms for the Rejection of Sinusoidal Disturbances Acting on Unknown Plants, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 2010, vol. 18, no. 4, pp. 822–836.

24. **Poljak B. T., Topunov M. V.** *Podavlenie ogranichenykh vneshnih vozmushhenij: upravlenie po vyvodu* (Suppression of bounded exogenous disturbances: Output feedback), *Automatika i Telemekhanika*, 2008, no. 5, pp. 72–90 (in Russian).

25. **Cykunov A. M.** *Robustnoe upravlenie s kompensaciej vozmushhenij* (Robust control with compensations of disturbances), Moscow, Fizmatlit, 2012 (in Russian).

26. **Furtat I. B.** Control of Linear Time-Invariant Plants with Compensation of Measurement Noises and Disturbances, Accepted at the *56th IEEE Conference on Decision and Control (CDC2017)*, December 12–15, 2017, Melbourne, Australia.

27. **Furtat I. B.** Disturbance Compensation Algorithm Under Saturation of Control Signal, *Proc. of the 20th World Congress of The International Federation of Automatic Control*, France, 2017, pp. 6724–6729.

28. **Anderson P. M., Fouad A. A.** *Power Systems Control and Stability*, Iowa State University Press, 1997.

29. **Guo G., Hill D. J., Wang Y.** Nonlinear output stabilization control for multimachine power systems, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 2000, Part 1, vol. 47, no. 1, pp. 46–53.

30. **Dehghani M., Nikravesh S. K. Y.** Nonlinear state space model identification of synchronous generator, *Electric Power Systems Research*, 2008, vol. 78, pp. 926–940.

31. **Fridman E.** A refined input delay approach to sampled-data control, *Automatica*, 2010, vol. 46, pp. 421–427.



27–29 мая 2019 г. в Санкт-Петербурге  
на базе АО "Концерн "ЦНИИ Электроприбор" состоится

**XXVI Санкт-Петербургская  
МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
ПО ИНТЕГРИРОВАННЫМ НАВИГАЦИОННЫМ СИСТЕМАМ  
(МКИНС 2019)**



Председатель программного комитета — Академик РАН, проф. **В. Г. Пешехонов**

**Тематика конференции**

- ◆ Инерциальные датчики, системы навигации и ориентации
- ◆ Интегрированные системы навигации и управления движением
- ◆ Глобальные навигационные спутниковые системы
- ◆ Средства гравиметрической поддержки навигации

На конференции не рассматриваются вопросы, затрагивающие военно-техническое сотрудничество, разработки военных технологий и образцов вооружений и военной техники. Программный комитет считает полезным представление обзорных докладов и докладов молодых ученых (до 33 лет).

Подробную информацию о конференции см. сайте:  
<http://www.elektropribor.spb.ru/icins2019/rindex>