УДК 629.78 DOI: 10.17587/mau.19.797-805

Я. Г. Сапунков, канд. физ.-мат. наук, доц., iptmuran@san.ru,
А. В. Молоденков, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., iptmuran@san.ru,
Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов,
Т. В. Молоденкова, канд. физ.-мат. наук, доц., moltw@yandex.ru,
Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина

Алгоритм оптимальной по быстродействию переориентации осесимметричного космического аппарата в классе конических движений

В кватернионной постановке рассматривается задача программного оптимального по быстродействию разворота космического аппарата (КА) как твердого тела с одной осью симметрии и ограниченной функцией управления. С помощью замен переменных исходная задача оптимальной переориентации осесимметричного КА упрощается (в отношении динамических уравнений Эйлера) до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. Для этой задачи представлено точное аналитическое решение в классе конических движений. Дается алгоритм оптимальной переориентации КА. Приводится числовой пример.

Ключевые слова: *оптимальное программное управление, космический аппарат, осесимметричное твердое тело, коническое движение*

Введение

Точное аналитическое решение задачи оптимальной переориентации (оптимального разворота) для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости космического аппарата (КА) не найдено даже в случае сферической симметрии КА, не говоря уже о его произвольной динамической конфигурации. Известны лишь некоторые частные случаи решения задачи (см., например, работы [1—8]); в общем случае приходится рассчитывать только на приближенные численные методы. Между тем аналитическое решение задачи оптимального разворота КА (твердого тела) в замкнутой форме имеет не только теоретический, но и большой практический интерес, так как позволяет использовать на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории.

В настоящей статье рассматривается задача программного оптимального по быстродействию разворота КА как твердого тела с одной осью симметрии при произвольных граничных условиях по угловому положению КА и ограниченной по модулю функции управления. С помощью замен переменных исходная задача упрощается (в отношении динамических уравнений Эйлера) до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. С использованием кватернионов на основании принципа максимума Л. С. Понтрягина получено новое аналитическое решение этой задачи в классе конических движений. Представлено явное выражение для оптимального управления и постоянного по модулю оптимального вектора угловой скорости КА. Траектория движения осесимметричного КА представляет собой регулярную прецессию (в этом отличие предлагаемого решения от представленного в работе [4]). Векторы начального и конечного значений угловой скорости КА должны принадлежать конической поверхности, порождаемой произвольно заданными постоянными условиями задачи. На примере осесимметричного КА "Спейс Шаттл", рассматриваемого как твердое тело, приводятся результаты численного решения задачи оптимальной по быстродействию переориентации КА в классе конических движений (в виде регулярной прецессии).

Статья продолжает исследования, начатые в работе [9], где рассматривалась задача оптимального по быстродействию разворота сферически симметричного КА.

1. Постановка задачи

Движение КА как твердого тела с одной осью симметрии вокруг центра масс описывается дифференциальными уравнениями [1]:

$$2\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{w}; \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} I_1\dot{w}_1 &= M_1; \\ I_2\dot{w}_2 &= M_2 - (I_1 - I_2)w_1w_3; \\ I_2\dot{w}_3 &= M_3 + (I_1 - I_2)w_1w_2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь фазовыми координатами являются

• $\mathbf{L}(t)$ — нормированный кватернион поворота КА:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) &= l_0(t) + l_1(t)i_1 + l_2(t)i_2 + l_3(t)i_3 = \\ &= [l_0(t), l_1(t), l_2(t), l_3(t)]^{\mathrm{T}}; \\ \|\mathbf{L}\| &= l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где i_1, i_2, i_3 — орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона), которые можно идентифицировать с ортами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ жестко связанного с КА трехмерного векторного пространства, и

• $\mathbf{w}(t)$ — вектор угловой скорости КА:

$$\mathbf{w}(t) = w_1(t)\mathbf{i}_1 + w_2(t)\mathbf{i}_2 + w_3(t)\mathbf{i}_3 = [w_1(t),\ w_2(t),\ w_3(t)]^{\mathrm{T}}.$$

Символ "$\circ$" означает кватернионное умножение, а управление — вектор $\mathbf{M}(t)$ действующего на КА внешнего момента:

$$\mathbf{M}(t) = M_1(t)\mathbf{i}_1 + M_2(t)\mathbf{i}_2 + M_3(t)\mathbf{i}_3 = [M_1(t),\ M_2(t),\ M_3(t)]^{\mathrm{T}}.$$

Фазовые координаты и управление подчинены требованиям задачи понтрягинского типа ($\mathbf{L}(t)$, $\mathbf{w}(t)$ — непрерывные функции, $\mathbf{M}(t)$ — кусочно-непрерывная функция). В динамических уравнениях Эйлера (1.2) для КА с одной осью симметрии (направленной в нашем случае вдоль орта $\mathbf{i}_1$ связанной с КА системы координат) I_1, I_2 — главные центральные моменты инерции твердого тела, I_1, $I_2 = \mathrm{const} > 0$.

На модуль вектора управления наложено наиболее простое из ограничений (область допустимых управлений — шар):

$$|\mathbf{M}| \leqslant M_{\max}. \tag{1.4}$$

Заданы произвольные граничные условия по угловому положению

$$\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}_0,\ \mathbf{L}(T) = \mathbf{L}_T \tag{1.5}$$

и угловой скорости КА

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0,\ \mathbf{w}(T) = \mathbf{w}_T. \tag{1.6}$$

Требуется определить оптимальное управление $\mathbf{M}^{\text{опт}}(t)$ системой (1.1), (1.2) при условиях (1.4)—(1.6), доставляющее минимум функционалу (задача быстродействия):

$$J = T. \tag{1.7}$$

Как видно из соотношений (1.3), в задаче присутствует ограничение на фазовые координаты (компоненты кватерниона поворота КА).

2. Переход к безразмерным переменным

Перейдем от размерных переменных задачи к безразмерным по следующим формулам:

$$\begin{gathered} t^{\text{безраз}} = t(M_{\max}/I^{\text{масш}})^{1/2}; \\ \mathbf{w}^{\text{безраз}} = \mathbf{w}(I^{\text{масш}}/M_{\max})^{1/2};\ \mathbf{M}^{\text{безраз}} = \mathbf{M}/M_{\max}; \\ I_k^{\text{безраз}} = I_k/I^{\text{масш}};\ k = 1, 2; \\ I^{\text{масш}} = ((I_1^2 + 2I_2^2)/3)^{1/2}. \end{gathered}$$

При этом вид формул (1.1)—(1.3), (1.5)—(1.7) не изменится, а ограничение на модуль вектора управления (1.4) запишется следующим образом:

$$|\mathbf{M}| \leqslant 1. \tag{2.1}$$

Далее будем иметь в виду постановку задачи в безразмерных переменных и верхние индексы у них будут опущены.

3. Замены переменных в задаче с осевой симметрией КА

В целях упрощения (в отношении динамических уравнений Эйлера) задачи (1.1)—(1.3), (1.5)—(1.7), (2.1) осуществим замены переменных, сводящие исходную задачу к задаче оптимального разворота КА со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. Для этого перепишем уравнения (1.2) в виде

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= m_1; \\ \dot{w}_2 &= b_1m_2 - bw_1w_3; \\ \dot{w}_3 &= b_1m_3 - bw_1w_2, \end{aligned}$$

где $m_1 = M_1/I_1$, $m_2 = M_2/I_1$, $m_3 = M_3/I_1$, $b = (I_1 - I_2)/I_2$, $b_1 = I_1/I_2$.

Заменим переменные w_1, w_2, w_3 на новые ω_1, ω_2, ω_3:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Тогда получим для уравнений Эйлера (1.2) в кватернионной записи

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\mathbf{B}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \mathbf{B}; \quad (3.2)$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_1 \theta(t)/2\}, \quad (3.3)$$

где "~" — сопряжение кватерниона, "**exp**{.}" — кватернионная экспонента, вектор $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3]^{\mathrm{T}}$, а

$$\theta(t) = b_2 \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau, \quad (3.4)$$

$$b_2 = b b_1^{-1} = 1 - I_2/I_1 = 1 - b_1^{-1}.$$

Отметим, что $|\mathbf{B}(t)| = 1$, $\forall t$.

Кватернионное уравнение углового движения КА (1.1) при этом запишется следующим образом:

$$2\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{B} \circ (b_1^{-1}\omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3) \circ \tilde{\mathbf{B}}, \quad (3.5)$$

где кватернион $\mathbf{B}$ определяется соотношением (3.3).

С учетом начального условия по угловой скорости КА (1.5) уравнение (3.2) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\boldsymbol{\beta}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \boldsymbol{\beta}; \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \mathbf{exp}\left\{ \mathbf{i}_1 b_2 \int_0^t \left(\int_0^\tau m_1(\xi) d\xi + w_{0_1} \right) d\tau/2 \right\} \quad (3.7)$$

Нелинейное выражение, стоящее в правой части (3.5) и зависящее только от переменных $m_k(t)$, $k = \overline{1,3}$, примем за новое управление $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{u} = \tilde{\boldsymbol{\beta}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \boldsymbol{\beta}, \quad (3.8)$$

где $\boldsymbol{\beta}$ определяется выражением (3.7). Отметим, что $u_1(t) = b_1 m_1(t)$, и поэтому в замене переменных (3.8) всегда можно совершить обратный ход: по новой векторной переменной $\mathbf{u}(t)$ (когда она будет известна) восстановить управление $\mathbf{m}(t)$ задачи (1.1), (1.2), (1.4)—(1.6), (2.1).

Модуль вектора нового управления связан с модулем вектора управляющего момента КА так:

$$|\mathbf{u}| = \left|\tilde{\boldsymbol{\beta}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \boldsymbol{\beta}\right| = b_1 \left|\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right| |\mathbf{m}| |\boldsymbol{\beta}| =$$
$$= b_1 |\mathbf{m}| = b_1 |\mathbf{M}|/I_1 = |\mathbf{M}|/I_2.$$

Исходя из (3.5), осуществим еще одну замену переменных:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \tilde{\mathbf{B}}, \quad (3.9)$$

где $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}(t)$ — новая кватернионная переменная, описывающая угловое положение КА, при этом, так как $\|\mathbf{B}(t)\| = |\mathbf{B}(t)|^2 = 1$, $\forall t$, то $\|\mathbf{L}(t)\| = \|\boldsymbol{\Lambda}(t)\| = 1$, $\forall t$.

С учетом всех указанных выше замен переменных задача оптимального разворота КА (1.1), (1.2), (1.4)—(1.6), (2.1) примет вид

$$2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}; \quad (3.10)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u}; \quad (3.11)$$

$$\dot{\theta} = b_2 \omega_1; \quad (3.12)$$

$$|\mathbf{u}| \leqslant I_2^{-1}; \quad (3.13)$$

$$\theta(0) = 0; \quad (3.14)$$

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 = b_1 w_{0_1} \mathbf{i}_1 + w_{0_2} \mathbf{i}_2 + w_{0_3} \mathbf{i}_3;$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(0) = \boldsymbol{\Lambda}_0 = \mathbf{L}_0; \quad (3.15)$$

$$\boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T = \tilde{\mathbf{B}}(\theta(T)) \circ$$
$$\circ (b_1 w_{T_1} \mathbf{i}_1 + w_{T_2} \mathbf{i}_2 + w_{T_3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta(T)); \quad (3.16)$$
$$\boldsymbol{\Lambda}(T) = \boldsymbol{\Lambda}_T = \mathbf{L}_T \circ \mathbf{B}(\theta(T));$$

$$J = T \to \min, \quad (3.17)$$

где $w_{0_1}, w_{0_2}, w_{0_3}, w_{T_1}, w_{T_2}, w_{T_3}$ — компоненты вектора $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), w_3(t)]^{\mathrm{T}}$ в начальный и конечный моменты времени соответственно, а кватернион $\mathbf{B}(\theta(T))$ определяется по формуле (3.3).

Согласно соотношениям (3.9), (3.16) задачу (3.10)—(3.17) можно переформулировать так: в восьмимерном фазовом пространстве $\boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{\omega} \times \theta$ управляемую систему (3.10)—(3.12) необходимо за минимальный промежуток времени перевести из начального состояния (3.14), (3.15) на многообразие, которое определяется соотношениями

$$\begin{aligned} &\mathrm{vect}(\boldsymbol{\Lambda} \circ \tilde{\mathbf{B}}(\theta) \circ \tilde{\mathbf{L}}_T) = 0; \\ &\boldsymbol{\omega} - \tilde{\mathbf{B}}(\theta) \circ (b_1 w_{T_1} \mathbf{i}_1 + w_{T_2} \mathbf{i}_2 + w_{T_3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta) = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где "vect(.)" обозначает векторную часть кватерниона.

Из этой задачи найдем оптимальные управление $\mathbf{u}^{\text{опт}}$ и траекторию $\mathbf{\Lambda}^{\text{опт}}$, $\boldsymbol{\omega}^{\text{опт}}$. Как видно, векторное дифференциальное уравнение (3.11) имеет структуру, соответствующую динамическим уравнениям Эйлера для сферически-симметричного твердого тела. Это существенно облегчает исследование задачи.

Далее будем рассматривать задачу (3.10)—(3.17), (3.18).

4. Применение принципа максимума

Выполним процедуру принципа максимума Л. С. Понтрягина [1, 10]. Введем вспомогательные функции $\mathbf{\Psi}(t)$ (кватернион), $\boldsymbol{\varphi}(t)$ (вектор) и $\rho(t)$ (скаляр), сопряженные к фазовым координатам $\mathbf{\Lambda}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\theta(t)$. Составим функцию Гамильтона—Понтрягина

$$H = \left(\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}\right)/2 + (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) + b_2\omega_1\rho, \qquad (4.1)$$

где "(., .)" — скалярное произведение векторов.

Отметим, что фазовое ограничение на компоненты кватерниона $\mathbf{\Lambda}$ (1.3), которое переходит в ограничение на компоненты $\mathbf{L}$, является первым интегралом задачи и поэтому в процедуре принципа максимума не учитывается.

Сопряженная система:

$$\begin{cases} 2\dot{\mathbf{\Psi}} = \mathbf{\Psi} \circ \boldsymbol{\omega}; \\ \dot{\rho} = 0; \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\text{vect}(\tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{\Psi})/2 - b_2\rho\,\mathbf{i}_1. \end{cases} . \qquad (4.2)$$

Как видно, уравнения для переменных $\mathbf{\Psi}$ и $\mathbf{\Lambda}$ совпадают с точностью до константы. Используя этот факт и введя обозначение [1]

$$\mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{\Psi}) = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{c}_v \circ \mathbf{\Lambda}, \qquad (4.3)$$

где $\mathbf{c}_v$ — произвольная векторная постоянная, сопряженную систему запишем следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{c}_v \circ \mathbf{\Lambda},\ \rho = \rho_0 = \text{const}; \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathbf{p}/2 - b_2\rho_0\,\mathbf{i}_1. \end{cases} \qquad (4.4)$$

Следует отметить, что применение этого приема [1], основанного на самосопряженности дифференциальной кватернионной системы уравнений (3.10) (замена кватернионной сопряженной переменной $\mathbf{\Psi}$ на векторную переменную $\mathbf{p}$ (4.3)), позволяет понизить размерность краевой задачи, получаемой после применения принципа максимума, на четыре единицы.

Условие максимума функции Гамильтона—Понтрягина (4.1) на компактном множестве (3.13) дает следующую структуру оптимального управления:

$$\mathbf{u}^{\text{опт}} = \boldsymbol{\varphi}/(|\boldsymbol{\varphi}|I_2). \qquad (4.5)$$

Из соотношений (3.10), (3.11), (4.4), (4.5) имеем

$$\dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}]; \qquad (4.6)$$

$$\mathbf{p} = -2\left(\left(|\boldsymbol{\varphi}|\frac{d^2\boldsymbol{\omega}}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\frac{d|\boldsymbol{\varphi}|}{dt}\right)I_2 + b_2\rho_0\mathbf{i}_1\right), \qquad (4.7)$$

где "[., .]" означает векторное произведение.

Подставляя выражение (4.7) в (4.6), получим

$$\frac{d^3\boldsymbol{\omega}}{dt^3} = \left[\frac{d^2\boldsymbol{\omega}}{dt^2} + \frac{b_2\rho_0\mathbf{i}_1}{I_2}, \boldsymbol{\omega}\right] + \\ + \frac{1}{|\boldsymbol{\varphi}|}\left(\frac{d|\boldsymbol{\varphi}|}{dt}\left(\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \boldsymbol{\omega}\right] - 2\frac{d^2\boldsymbol{\omega}}{dt^2}\right) - \frac{d^2|\boldsymbol{\varphi}|}{dt^2}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right). \qquad (4.8)$$

Таким образом, оптимальная угловая скорость КА на всем интервале времени движения удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению третьего порядка (4.8).

Из постановки задачи видно, что конечные значения фазовых координат $\mathbf{\Lambda}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ не являются фиксированными величинами, а принадлежат многообразию, определяемому выражениями (3.4), (3.15), (3.16), (3.18). Поэтому для фазовых координат $\mathbf{\Lambda}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\theta(t)$ и сопряженных переменных $\mathbf{\Psi}(t)$, $\boldsymbol{\varphi}(t)$, ρ_0 в момент времени $t = T$ верны условия трансверсальности:

$$\text{scal}(\tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{\Psi}(t)) = 0, \qquad (4.9)$$

где "scal(.)" обозначает скалярную часть кватерниона, и

$$\rho_0 + p_1(T)/2 + \varphi_2(T)\omega_3(T) - \varphi_3(T)\omega_2(T) = 0, \qquad (4.10)$$

полное построение которых приведено в приложении.

Относительно условия (4.9) отметим, что оно выполняется автоматически при переходе к вектору сопряженных переменных $\mathbf{p}$ (4.3). Условие (4.10) вытекает из первого интеграла задачи (3.10)—(3.17), (4.2), (4.4)—(4.6), (4.8), который справедлив для оптимального управления и оптимальной траектории и получается

на основе выражений (3.11), (4.4)—(4.6). Покажем это.

Из выражений (3.11), (4.5) следует, что $[\dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\varphi}] = 0,\ \forall t \in [0,\ T]$. Тогда с учетом выражения для $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ (4.4) и $\dot{\mathbf{p}}$ (4.6) можем записать

$$\dot{\omega}_2\varphi_3 - \dot{\omega}_3\varphi_2 + \omega_2\dot{\varphi}_3 - \omega_3\dot{\varphi}_2 = \dot{p}_1/2$$

или

$$p_1(t)/2 + \omega_3(t)\varphi_2(t) - \omega_2(t)\varphi_3(t) = \text{const} = \rho_0,\quad \forall t \in [0,\ T]. \qquad (4.11)$$

Это выражение и есть первый интеграл задачи (3.10)—(3.17), (3.18), (4.2), (4.4)—(4.6), (4.8).

5. Аналитическое решение задачи оптимального разворота КА в классе конических движений

Рассмотрим класс частных решений задачи оптимального по быстродействию разворота КА при условии, что модуль вектора $\boldsymbol{\varphi}$ сохраняет постоянное значение, т.е.

$$|\boldsymbol{\varphi}| = c. \qquad (5.1)$$

В этом случае сопряженные переменные $\mathbf{p}$, $\boldsymbol{\varphi}$ и управление $\mathbf{u}$ выражаются через вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ по формулам

$$\boldsymbol{\varphi} = cI_2\dot{\boldsymbol{\omega}};\ \mathbf{p} = -2(cI_2\ddot{\boldsymbol{\omega}} + b_2\rho_0\mathbf{i}_1);\ \mathbf{u} = \dot{\boldsymbol{\omega}}. \qquad (5.2)$$

При этом угловая скорость должна удовлетворять уравнению

$$\dddot{\boldsymbol{\omega}} = [\ddot{\boldsymbol{\omega}} + i_1 b_2\rho_0/I_2, \boldsymbol{\omega}]. \qquad (5.3)$$

Решение поставленной задачи оптимального управления (3.10)—(3.17) сводится, тем самым, к решению краевой задачи (3.10), (3.12), (3.14)—(3.16), (3.18), (5.3). Отметим, что, не нарушая общности, постоянную c в выражениях (5.1), (5.2) можно положить равной $c = 1/I_2$.

Будем искать решение уравнений (3.10), (5.3) в классе конических движений. Для этого оптимальную угловую скорость КА представим следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{i}_1\gamma + \alpha\,\tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ (\mathbf{i}_2 \sin\Omega t + \mathbf{i}_3 \cos\Omega t) \circ \mathbf{e}_\delta, \qquad (5.4)$$

где α, δ, γ, Ω — неопределенные постоянные, а $\mathbf{e}_\delta = \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_1\delta/2\}$.

Последовательно дифференцируя (5.1) три раза по переменной t, получим:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \alpha\Omega\tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ (\mathbf{i}_2 \cos\Omega t - \mathbf{i}_3 \sin\Omega t) \circ \mathbf{e}_\delta; \qquad (5.5)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\omega}} = -\alpha\Omega^2\tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ (\mathbf{i}_2 \sin\Omega t + \mathbf{i}_3 \cos\Omega t) \circ \mathbf{e}_\delta; \qquad (5.6)$$

$$\dddot{\boldsymbol{\omega}} = -\alpha\Omega^3\tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ (\mathbf{i}_2 \cos\Omega t - \mathbf{i}_3 \sin\Omega t) \circ \mathbf{e}_\delta. \qquad (5.7)$$

Подставляя (5.4)—(5.7) в выражение (5.3) и учитывая выражения (3.11), (4.5), (4.11), убедимся в выполнении равенства в (5.3); при этом

$$\gamma = \Omega - b_2\alpha^2/((1 + b_2)\Omega),\quad \rho_0 = 2\alpha^2 I_2\Omega/(1 + b_2). \qquad (5.8)$$

Отметим, что

$$\dddot{\boldsymbol{\omega}} = [\ddot{\boldsymbol{\omega}} + b_2\rho_0\mathbf{i}_1/(2I_2), \boldsymbol{\omega}] = ((\ddot{\boldsymbol{\omega}} + b_2\rho_0\mathbf{i}_1/(2I_2)) \circ \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \circ (\ddot{\boldsymbol{\omega}} + b_2\rho_0\mathbf{i}_1/(2I_2)))/2.$$

Траектория движения КА при угловой скорости (5.4) из выражений (3.10), (3.16) находится явно и имеет вид регулярной прецессии:

$$\boldsymbol{\Lambda}(t) = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ \mathbf{exp}\{(\mathbf{i}_3\alpha + \mathbf{i}_1(\gamma - \Omega))t/2\} \circ \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_1(\Omega t + \delta)/2\}. \qquad (5.9)$$

Вектор оптимального управления $\mathbf{u}$ определяется из формул (5.2), (5.5). Ограничение (3.13) будет выполнено, если потребовать

$$\alpha^2\Omega^2 = I_2^{-2}. \qquad (5.10)$$

Возвращаясь к исходным безразмерным переменным задачи (1.1), (1.2), (1.4)—(1.6), (2.1), запишем окончательные выражения для вектора оптимальной угловой скорости:

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{i}_1 b_1^{-1}\gamma + \alpha(\mathbf{i}_2\sin((\Omega - b_2\gamma)t + \delta) + + \mathbf{i}_3\cos((\Omega - b_2\gamma)t + \delta), \qquad (5.11)$$

кватерниона оптимальной траектории

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{L}_0 \circ \tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ \mathbf{exp}\{(\mathbf{i}_3\alpha + \mathbf{i}_1(\gamma - \Omega))t/2\} \circ \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_1((b_2\gamma + \Omega)t + \delta))/2\} \qquad (5.12)$$

и вектора оптимального управляющего момента КА

$$\mathbf{M}(t) = I_2\alpha\Omega(\mathbf{i}_2\cos((\Omega + b_2\omega_1)t - \delta) - - \mathbf{i}_3\sin((\Omega + b_2\omega_1)t - \delta)), \qquad (5.13)$$

где γ определяется первым из выражений (5.8).

При $t = 0$ из выражения (5.7) имеем

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{i}_1 b_1^{-1}(\Omega - b_2\alpha^2/((1 + b_2)\Omega)) + \\ + \alpha(\mathbf{i}_2\sin\delta + \mathbf{i}_3\cos\delta). \quad (5.14)$$

При $t = T$ из соотношений (1.4), (5.11), (5.12) имеем

$$\mathbf{w}(T) = \mathbf{i}_1 b_1^{-1}(\Omega - b_2\alpha^2/((1 + b_2)\Omega)) + \\ + \alpha(\mathbf{i}_2\sin((\Omega - b_2\gamma)T + \delta)) + \\ + \mathbf{i}_3\cos((\Omega - b_2\gamma)T + \delta)); \quad (5.15)$$

$$\mathrm{vect}(\tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ \mathbf{exp}\{(\mathbf{i}_3\alpha + \mathbf{i}_1 b_2\alpha^2/((1 + b_2)\Omega))T/2\} \circ \\ \circ \mathbf{exp}\{\mathbf{i}_1(\Omega T(1 + b_2) - b_2\alpha^2 T/((1 + b_2)\Omega)) + \delta)/2\} \circ \quad (5.16) \\ \circ \tilde{\mathbf{L}}_T \circ \mathbf{L}_0) = 0.$$

В выражения (5.14), (5.15) входят три произвольные постоянные α, δ, Ω и неизвестное время переориентации T. Определяя их из условия (5.10) и системы трех нелинейных алгебраических уравнений (5.16), удовлетворим граничные условия по угловому положению КА (1.4) (α, δ, Ω, T будут зависеть от компонент кватернионов $\mathbf{L}_0$, $\mathbf{L}_T$ и главных центральных моментов инерции КА (твердого тела) I_1, I_2). Из-за недостаточного числа произвольных постоянных в решении задачи на величины $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{w}_T$ (1.4) налагаются требования вида (5.14), (5.15).

Таким образом, в случаях, когда на граничные условия по угловой скорости КА наложены ограничения вида (5.14), (5.15) (это означает, что вектор угловой скорости $\mathbf{w}(t)$ на всем интервале времени движения принадлежит некоторой конической поверхности, определяемой в пространстве заданными постоянными задачи I_1, I_2, $\mathbf{L}_0$, $\mathbf{L}_T$), траектория углового движения осесимметричного КА находится в классе конических движений и определяется явными аналитическими выражениями (5.11), (5.12), управляющий момент КА определяется соотношением (5.13) и, согласно (5.10), подчинен ограничению (2.1):

$$|\mathbf{M}(t)|^2 = I_2^2\alpha^2\Omega^2 = I_2^2 I_2^{-2} = 1, \ \forall t \in [0, T].$$

Из выражений (4.4), (4.5), (4.11), (5.2), (5.5) и (5.8) можно найти сопряженные переменные. Тем самым задача при существующих ограничениях решена полностью.

Приведем алгоритм решения задачи оптимального разворота осесимметричного КА (1.1), (1.2), (1.4)—(1.6), (2.1) в безразмерных переменных в классе конических движений.

Шаг 1. По заданным кватернионам $\mathbf{L}_0$, $\mathbf{L}_T$ (1.5), главным центральным моментам инерции КА (твердого тела) I_1, I_2 и формулам (5.10), (5.16) определяются величины α, δ, Ω и время переориентации КА (время быстродействия) T.

Шаг 2. Используя α, δ, Ω, I_1, I_2, T, вычисляются значения векторов $\mathbf{w}_0^{\text{выч}}$, $\mathbf{w}_T^{\text{выч}}$ по формуле (5.14):

$$\mathbf{w}_0^{\text{выч}} = \mathbf{i}_1(\Omega - b_2\alpha^2/((1 + b_2)\Omega))I_2/I_1 + \\ + \alpha(\mathbf{i}_2\sin\delta + \mathbf{i}_3\cos\delta)$$

и по формуле (5.15):

$$\mathbf{w}_T^{\text{выч}} = \mathbf{i}_1(\Omega - b_2\alpha^2/((1 + b_2)\Omega))I_2/I_1 + \\ + \alpha(\mathbf{i}_2\sin((\Omega - b_2\gamma)T + \delta)) + \\ + \mathbf{i}_3\cos((\Omega - b_2\gamma)T + \delta)), \ b_2 = 1 - I_2/I_1.$$

Шаг 3. Полученные значения $\mathbf{w}_0^{\text{выч}}$, $\mathbf{w}_T^{\text{выч}}$ сравниваются с заданными в (1.6) величинами $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{w}_T$.

Шаг 4. Если равенство на шаге 3 алгоритма выполняется, то оптимальное решение задачи находится в классе конических движений; при этом угловая скорость КА, траектория его углового движения и вектор управляющего момента вычисляются по формулам (5.11)—(5.13) и шагу 1 алгоритма.

Шаг 5. Сопряженные переменные задачи находятся по формулам (4.4), (4.5), (4.11), (5.2), (5.5) и (5.8).

6. Числовой пример

В данном разделе на примере КА "Спейс Шаттл" [11] приводятся результаты численного решения задачи оптимального по быстродействию разворота осесимметричного КА в классе конических движений по формулам раздела 5. На рисунке представлены графики изменения во времени компонент угловой скорости $w_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, векторной части кватерниона ориентации $L_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, и компонент вектора управляющего момента $M_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, КА.

Расчеты проводили для значений:

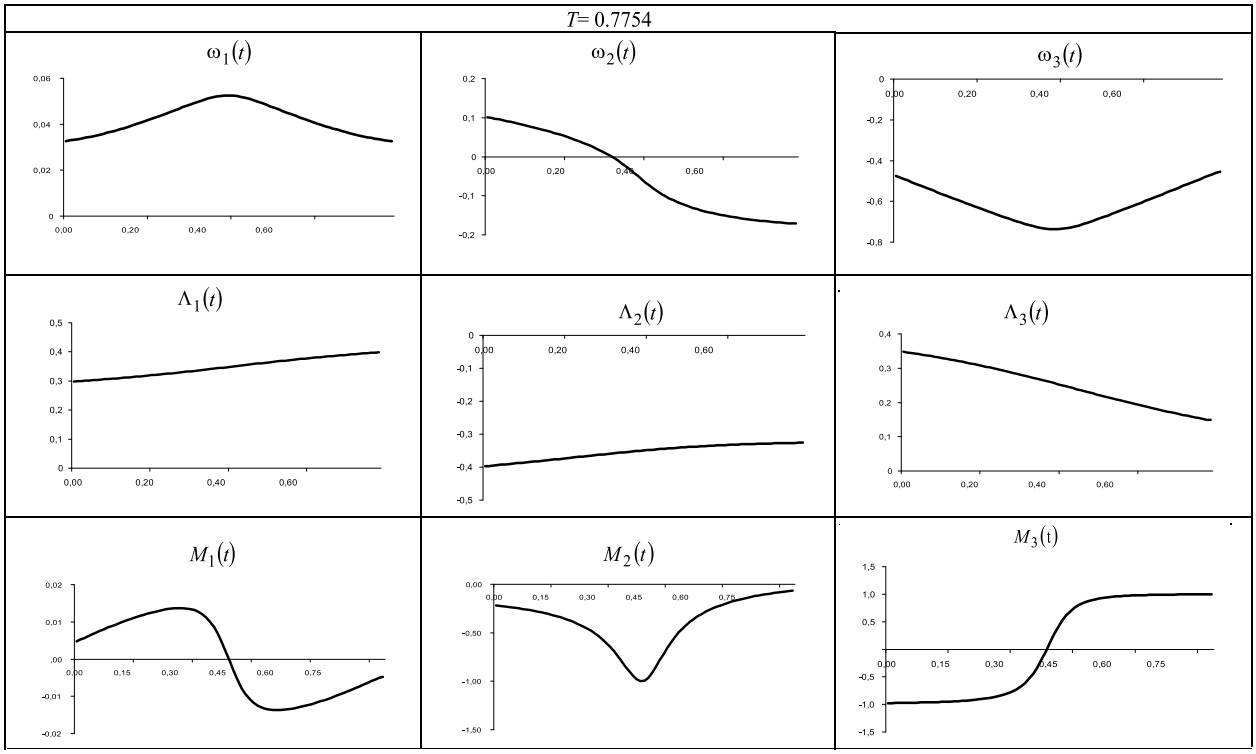
$$I_1 = 3\ 400\ 648 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \ I_2 = 21\ 041\ 672 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \\ I_3 = I_2 = 21\ 041\ 672 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 \\ \text{или } I_1 = 0{,}1967, \ I_2 = 1{,}2168, \ I_3 = I_2 \\ \text{(безразмерные моменты инерции);}$$

$$\mathbf{L}_0 = [0{,}79505;\ 0{,}29814;\ -0{,}39752;\ 0{,}34783]^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{L}_T = [0{,}84434;\ 0{,}39846;\ -0{,}3260;\ 0{,}14848]^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{w}_0 = [0{,}03268;\ 0{,}10119;\ -0{,}47492]^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{w}_T = [0{,}03268;\ -0{,}17132;\ -0{,}45435]^{\mathrm{T}}, \quad (6.1)$$



Решение задачи в классе конических движений
Solution of the problem in the class of conical motions

где граничные условия по угловой скорости КА удовлетворяют ограничениям раздела 5. Учитывалось ограничение на управление в безразмерном виде $|\mathbf{M}| \leqslant 1$ (2.1).

Вначале по формулам (5.10), (5.16) находили величины α, δ, Ω, T ($\alpha = 1{,}17404$, $\delta = -3{,}35152$, $\Omega = 0{,}70042$, $T = 0{,}77536$), затем по формулам (5.11)—(5.13) определяли векторы **w**, **M** и кватернион **L**.

Отметим, что кватернион ориентации КА $\mathbf{L}(t)$ может быть двузначным [1], т. е. **L** и $-\mathbf{L}$ соответствуют одному и тому же угловому положению КА в пространстве.

Заключение

Представленное в статье аналитическое решение задачи оптимального разворота осесимметричного КА (твердого тела) в классе конических движений (в виде регулярной прецессии) может найти свое применение при построении систем управления КА, как и известное оптимальное аналитическое решение задачи, полученное в классе конических движений для частного случая граничных условий по угловой скорости КА [4].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Построение условий трансверсальности. При построении условий трансверсальности воспользуемся работой [10] и подходом [12]. Для этого перепишем конечные условия (3.15), (3.16) ($\theta(T) = \theta_T$):

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\omega}(T) - \tilde{\mathbf{B}}(\theta_T) \circ (b_1 w_{T_1}\mathbf{i}_1 + w_{T_2}\mathbf{i}_2 + w_{T_3}\mathbf{i}_3) \circ \\ &\circ \mathbf{B}(\theta_T) = 0; \\ &\mathrm{vect}(\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}(T) \circ \mathbf{L}_T \circ \mathbf{B}(\theta_T)) = 0\end{aligned} \qquad (\text{П. } 1)$$

или, записывая кватернион $\tilde{\mathbf{B}}(\theta_T)$ в явном виде:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\omega}(T) \circ (\cos(\theta_T/2) - \mathbf{i}_1 \sin(\theta_T/2)) \circ \\ &\circ (b_1 w_{T_1}\mathbf{i}_1 + w_{T_2}\mathbf{i}_2 + w_{T_3}\mathbf{i}_3) \circ \\ &\circ (\cos(\theta_T/2) + \mathbf{i}_1 \sin(\theta_T/2)) = 0; \\ &\mathrm{vect}(\boldsymbol{\Lambda}(T) \circ \mathbf{L}_T \circ \\ &\circ (\cos(\theta_T/2) + \mathbf{i}_1 \sin(\theta_T/2))) = 0.\end{aligned} \qquad (\text{П. } 2)$$

Фазовые координаты $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Lambda}$, θ должны удовлетворять условиям трансверсальности:

$$\varphi_i + \sum_{k=1}^{6} a_k \frac{\partial G_k}{\partial \omega_i} = 0,\ t = T;\ i = \overline{1,3};$$

$$\psi_i + \sum_{k=1}^{6} a_k \frac{\partial G_k}{\partial \lambda_j} = 0,\ t = T;\ j = \overline{0,3};$$

$$\rho_0 + \sum_{k=1}^{6} a_k \frac{\partial G_k}{\partial \theta} = 0,\ t = T,$$

где a_k $(k = \overline{1,6})$ есть множители Лагранжа, подлежащие определению; соотношения

$$G_k(t;\ \omega_1, \omega_2,\ \omega_3; \lambda_1, \lambda_2,\ \lambda_3; \theta) = 0\ \ (t = T; k = \overline{1,6})$$

задают многообразие конечного состояния и соответствуют условиям (П. 1):

$$\begin{aligned}
G_1 &= \omega_1 - w_{T_1} b_1 = 0;\\
G_2 &= \omega_2 - w_{T_2} \cos\theta_T - w_{T_3} \sin\theta_T = 0;\\
G_3 &= \omega_3 + w_{T_2} \sin\theta_T - w_{T_3} \cos\theta_T = 0;\\
G_4 &= F_1 \cos(\theta_T/2) + F_0 \sin(\theta_T/2);\\
G_5 &= F_2 \cos(\theta_T/2) + F_3 \sin(\theta_T/2);\\
G_6 &= F_3 \cos(\theta_T/2) + F_2 \sin(\theta_T/2),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_0 &= L_{T_0}\lambda_0 + L_{T_1}\lambda_1 + L_{T_2}\lambda_2 + L_{T_3}\lambda_3;\\
F_1 &= L_{T_1}\lambda_0 - L_{T_0}\lambda_1 - L_{T_3}\lambda_2 + L_{T_2}\lambda_3;\\
F_2 &= L_{T_2}\lambda_0 + L_{T_3}\lambda_1 - L_{T_0}\lambda_2 - L_{T_1}\lambda_3;\\
F_3 &= L_{T_3}\lambda_0 - L_{T_2}\lambda_1 + L_{T_1}\lambda_2 - L_{T_0}\lambda_3.
\end{aligned}$$

Условия трансверсальности примут вид:

$$\varphi_1 + a_1 = 0,\ \varphi_2 + a_2 = 0,\ \varphi_3 + a_3 = 0; \qquad (\text{П. } 3)$$

$$\boldsymbol{\psi}(T) - \mathbf{L}_T \circ (\cos(\theta_T/2) + \mathbf{i}_1 \sin(\theta_T/2)) \circ \circ (a_4\mathbf{i}_1 + a_5\mathbf{i}_2 + a_6\mathbf{i}_3) = 0; \qquad (\text{П. } 4)$$

$$\begin{aligned}
&\rho_0 + a_2(w_{T_2} \sin\theta_T - w_{T_3} \cos\theta_T) +\\
&+ a_3(w_{T_2} \cos\theta_T + w_{T_3} \sin\theta_T) +\\
&+ a_4[F_0 \cos(\theta_T/2) - F_1 \sin(\theta_T/2)]/2 +\\
&+ a_5[F_3 \cos(\theta_T/2) - F_2 \sin(\theta_T/2)]/2 -\\
&- a_6[F_2 \cos(\theta_T/2) + F_3 \sin(\theta_T/2)]/2 = 0.
\end{aligned} \qquad (\text{П. } 5)$$

Исключим из полученных условий трансверсальности множители Лагранжа a_k $(k = \overline{1,6})$. Из условий (П. 3) имеем

$$a_1 = -\varphi_1,\ a_2 = -\varphi_2,\ a_3 = -\varphi_3. \qquad (\text{П. } 6)$$

Учитывая (3.9), (П. 4) перепишем в виде

$$(a_4\mathbf{i}_1 + a_5\mathbf{i}_2 + a_6\mathbf{i}_3) = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}(T) \circ \boldsymbol{\psi}(T).$$

Поскольку в левой части равенства стоит кватернион с нулевой скалярной частью (вектор), то

$$\begin{aligned}
&\mathrm{scal}(\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}(T) \circ \boldsymbol{\psi}(T)) = 0;\\
&(a_4\mathbf{i}_1 + a_5\mathbf{i}_2 + a_6\mathbf{i}_3) = \mathrm{vect}(\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}(T) \circ \boldsymbol{\psi}(T)).
\end{aligned} \qquad (\text{П. } 7)$$

Таким образом, имеем первое условие трансверсальности, не содержащее неизвестных констант; запишем его в кватернионной и скалярной формах:

$$\mathrm{scal}(\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}(T) \circ \boldsymbol{\psi}(T)) = 0 \qquad (\text{П. } 8)$$

или

$$\begin{aligned}
&\lambda_0(T)\psi_0(T) + \lambda_1(T)\psi_1(T) +\\
&+ \lambda_2(T)\psi_2(T) + \lambda_3(T)\psi_3(T) = 0.
\end{aligned}$$

Используя (3.1), (3.9), (3.10), (П. 7), а также выражения для первой компоненты вектора **p** (4.3) $p_1 = \psi_1\lambda_0 - \psi_0\lambda_1 + \psi_2\lambda_3 - \psi_3\lambda_2$, второе условие трансверсальности (П. 5) преобразуем в выражение

$$\begin{aligned}
&\rho_0 + p_1(T)/2 + \varphi_2(T)\omega_3(T) -\\
&- \varphi_3(T)\omega_2(T) = 0.
\end{aligned} \qquad (\text{П. } 9)$$

Таким образом, условия трансверсальности, связывающие основные фазовые и сопряженные переменные задачи (3.11)—(3.17) (исключена переменная θ), представляются выражениями (П. 8), (П. 9).

Список литературы

1. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

2. **Scrivener S. L., Thompson R. C.** Survey of time-optimal attitude maneuvers // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1994. V. 17, N. 2. P. 225—233.

3. **Петров Б. Н., Боднер В. А., Алексеев К. Б.** Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 6. С. 1235—1238.

4. **Бранец В. Н., Черток М. Б., Казначеев Ю. В.** Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исследования. 1984. Т. 22, Вып. 3. С. 352—360.

5. **Сиротин А. Н.** Оптимальное управление переориентацией симметричного твердого тела из положения покоя в положение покоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 36—47.

6. **Левский М. В.** Применение принципа максимума Л. С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 6. С. 144—157.

7. **Молоденков А. В., Сапунков Я. Г.** Новый класс аналитических решений в задаче оптимального разворота сферически симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 2. С. 16—27.

8. **Молоденков А. В., Сапунков Я. Г.** Аналитическое решение задачи оптимального в смысле комбинированного функционала разворота твердого тела в классе конических движений // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 2. С. 3—16.

9. **Сапунков Я. Г., Молоденков А. В.** Алгоритм оптимального по быстродействию разворота космического аппарата в классе конических движений // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 10. С. 66—70.

10. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.

11. **Li. F., Bainum P. M.** Numerical Approach for Solving Rigid Spacecraft Minimum Time Attitude Maneuvers // J. Guidance, Contr., and Dynamics. 1990. V. 13, N. 1. P. 38—45.

12. **Зелепукина О. В., Челноков Ю. Н.** Кватернионное решение задач управления угловым движением динамически симметричного космического аппарата // Сб. тр. Междунар. конф. "Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении". Саратов: ИПТМУ РАН, 2002. С. 180—188.

Algorithm of the Time-Optimal Reorientation of an Axially Symmetric Spacecraft in the Class of Conical Motions

Ya. G. Sapunkov, A. V. Molodenkov, iptmuran@san.ru,
Precision Mechanics and Control Problems Institute of RAS, Saratov,
T. V. Molodenkova, moltw@yandex.ru, Yu. A. Gagarin Saratov State Technical University,

Corresponding author: **Molodenkov Aleksey V.,** Ph. D., Senior Researcher,
Precision Mechanics and Control Problems Institute of RAS, Saratov, e-mail: iptmuran@san.ru

Accepted on July 03, 2018

Abstract

The problem of the time-optimal turn of a spacecraft as a rigid body with one axis of symmetry and bounded control function in absolute value is considered in the quaternion statement. For simplifying problem (concerning dynamic Euler equations), we change the variables reducing the original optimal turn problem of axially symmetric spacecraft to the problem of optimal turn of the rigid body with spherical mass distribution including one new scalar equation. Using the Pontryagin maximum principle, a new analytical solution of this problem in the class of conical motions is obtained. Algorithm of the optimal turn of a spacecraft is given. An explicit expression for the constant in magnitude optimal angular velocity vector of a spacecraft is found. The motion trajectory of a spacecraft is a regular precession. The conditions for the initial and terminal values of a spacecraft angular velocity vector are formulated. These conditions make it possible to solve the problem analytically in the class of conical motions. The initial and the terminal vectors of spacecraft angular velocity must be on the conical surface generated by arbitrary given constant conditions of the problem. The numerical example is presented. The example contain optimal reorientation of the Space Shuttle in the class of conical motions.

Keywords: *optimal program control, spacecraft, axially symmetric rigid body, conical motion*

For citation:

Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V., Molodenkova T. V. Algorithm of the Time-Optimal Reorientation of an Axially Symmetric Spacecraft in the Class of Conical Motions, *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 12, pp. 797—805.

DOI: 10.17587/mau.19.797-805

References

1. **Branets V. N., Shmyglevskij I. P.** *Primenenie kvaternionov v zadachax orientacii tverdogo tela* (The Use of Quaternions in Problems of Orientation of Solid Bodies), Moscow, Nauka, 1973. 320 p. (in Russian).

2. **Scrivener S. L., Thompson R. C.** Survey of time-optimal attitude maneuvers, *J. guidance, control, and dynamics,* 1994, vol. 17, no. 2, pp. 225—233.

3. **Petrov B. N., Bodner V. A., Alekseev K. B.** *Analiticheskoe reshenie zadachi upravleniya prostranstvennym povorotnym manevrom* (Analytical Solution of the Spatial Slew Manuever), *Doklady Akademii Nauk SSSR,* 1970, vol.192, no. 6, pp. 1235—1238 (in Russian).

4. **Branets V. N., Chertok M. B., Kaznacheev Yu. V.** *Optimal'nyj razvorot tverdogo tela s odnoj osyu simmetrii* (Optimal Slew of a Solid Body with a Single Symmetry Axis), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1984, vol. 22, no. 3, pp. 352—360 (in Russian).

5. **Sirotin A. N.** *Optimal'noe upravlenie pereorientaciej simmetrichnogo tverdogo tela iz polozheniya pokoya v polozhenie pokoya* (Optimal Reorientation of a Symmetric Solid Body from a State of Rest to Another State of Rest), *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela,* 1989, no. 1, pp. 36—46 (in Russian).

6. **Levskij M. V.** *Primenenie principa maksimuma L. S. Pontryagina k zadacham optimal'nogo upravleniya orientaciej kosmicheskogo apparata* (Pontryagin's Maximum Principle in Optimal Control Problems of Orientation of a Spacecraft, *Izvestiya Rossiyskoi Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya, 2008*, no. 6, pp. 144—157 (in Russian).

7. **Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G.** A New Class of Analytic Solutions in the Optimal Turn Problem for a Spherically Symmetric Body, *Mech. Solids*, 2012. vol. 47, no. 2, pp. 167—177.

8. **Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G.** Analytical Solution of the Optimal Attitude Maneuver Problem with a Combined Objective Functional for a Rigid Body in the Class of Conical Motions, *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 135—147.

9. **Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V.** *Algoritm optimal'nogo po bystrodeystviyu razvorota kosmicheskogo apparata v klasse konicheskix dvizhenij* (Algorithm of the Time-Optimal Turn of a Spacecraft in the Class of Conical Motion), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2013, no. 10, pp. 66—70 (in Russian).

10. **Pontryagin L. S., Boltyanskij V. G., Gamkrelidze R. V., Mishhenko E. F.** *Matematicheskaya teoriya optimal'nyx processov* (The Mathematical Theory of Optimal Processes), Moscow, Nauka, 1961, 384 p. (in Russian).

11. **Li. F., Bainum P. M.** Numerical Approach for Solving Rigid Spacecraft Minimum Time Attitude Maneuvers, *J. Guidance, Control, and Dynamics,* 1990, vol. 13, no. 1, pp. 38—45.

12. **Zelepukina O. V., Chelnokov Yu. N.** *Kvaternionnoe reshenie zadach upravleniya uglovym dvizheniem dinamicheski simmetrichnogo kosmicheskogo apparata* (Quaternion Solution of Control Problems of Angular Motion of Dynamically Symmetric Spacecraft), *in Proc. of Int. Conf. of Problems and Perspectives of Precision Mechanics, Precision Mech. and Cont. Problems. Inst., Rus. Acad. of Sci., Saratov,* 2002, pp. 180—188 (in Russian).