

Г. А. Рустамов, д-р техн. наук, проф., gazanfar.rustamov@gmail.com,  
В. Г. Фархадов, канд. техн. наук, доц., Р. Г. Рустамов, докторант,  
Азербайджанский технический университет, г. Баку, Азербайджан

## Исследование $K_{\infty}$ -робастных систем при ограниченном управлении

*Исследуется влияние эффекта насыщения регулятора на расход энергии управления и робастные свойства систем, синтезированных без учета ограничения на управление при постановке задачи. В статье эта задача рассматривается применительно к  $K_{\infty}$ -робастным системам управления.*

*Показано, что в следящих робастных системах в начальный момент времени управление принимает чрезмерно большое значение, что обеспечивает робастность динамического (переходного) режима. Это связано с тем, что в начальный момент времени начальные условия имеют большое значение. Основной причиной ухудшения робастных свойств связано со стеснением управления именно в начальном интервале времени. Обеспечение же робастности статического режима не требует больших усилий управления.*

*Для предельных систем характерны следующие динамические процессы. В пределе, когда коэффициент усиления стремится к бесконечности, все траектории мгновенно попадают на предельную плоскость  $s = 0$ . Дальнейшее движение в положение равновесия происходит по этой плоскости. При достаточно большом конечном коэффициенте, а следовательно, ограниченном управлении, все траектории стремятся к предельной плоскости и через заданное время установления достигают ее малой окрестности, определяемой заданной точностью слежения. Дальнейшее движение в положение равновесия происходит в пределах этой окрестности. Стеснение управления может привести к нарушению заданных показателей и устойчивости системы. В статье предельная плоскость названа "разомкнурым аттрактором" с правым концом в устойчивом положении равновесия.*

*Впервые с помощью компьютерной графики в трехмерном пространстве показаны траектории различных режимов движения: быстрое и медленное движения; установившееся движение в пределах заданной точности. Предложен интегральный критерий оценки показателя робастности.*

*Достоверность теоретических рассуждений подтверждена путем решения модельной задачи в блочно-визуальной среде имитационного моделирования Simulink.*

**Ключевые слова:** неопределенность, робастная система управления, функция Ляпунова, большой коэффициент усиления, разомкнутый аттрактор, ограничение, насыщение, оценка робастности

### Введение

Построение систем управления при наличии ограничения на управление с точки зрения практики является весьма актуальным. Тем не менее наличие ограничения значительно усложняет решение задач синтеза, в которых отыскивается управление с обратной связью. Основное замечание экспертов к задачам синтеза связано с указанной проблемой [см., например, 1, 2, с. 33–46]. Игнорирование ограничения часто обосновывается предположением о том, что система функционирует в малой окрестности рабочей точки, где вариации управления и переменных состояния малы.

В настоящее время, в отличие от методов нахождения программного управления, не имеется удовлетворительных инженерных решений, связанных с синтезом робастных регуляторов в условиях ограниченного управления. Вмешательство в естественный ход развития процесса путем введения различных ограничений затрудняет использование стандартных методов теории автоматического управления. При синтезе преобладают эвристические методы с множеством допущений, часть которых является не

адекватными реальному процессу, который по определению является неопределенным.

В робастных следящих системах в начальный момент времени наблюдается высокое значение сигнала управления [2–7]. Эта особенность связана с требованиями робастности, заложенными в основу постановки задачи. Поскольку на практике имеются физические ограничения, то возникает задача выбора компромисса между предельным значением управления и показателем робастности. Ограниченность управления в начальном интервале времени в основном ухудшает робастность динамического (переходного) режима.

Впервые о  $K_{\infty}$ -робастных системах управления упоминается в работах [3–7]. Эти системы относятся к предельным системам управления с большим коэффициентом усиления (СУБКУ). Начало данного направления заложено в классических работах М. Меерова [8, 9] и развито А. Востриковым, Г. Французовой [10–13], А. Филимоновым, Н. Филимоновым [1, 14] и др.

Основу метода синтеза СУБКУ составляет зависимость статической ошибки от коэффициента усиления разомкнутой цепи. Решение этой простой на первый взгляд задачи наталкивается

на принципиальную трудность — увеличение коэффициента усиления приводит к потере устойчивости замкнутой системы. Имеющиеся исследования в этом направлении сконцентрированы вокруг решения этой проблемы. Первичной задачей в указанном направлении является синтез структуры, позволяющей беспредельное увеличение коэффициента усиления разомкнутой цепи без нарушения устойчивости. При этом задача сводится к структурному синтезу и в настоящее время не имеет строгого математического решения. Преобладают эвристические рассуждения.

Принципиальным отличием СУБКУ является то, что в них не используются номинальная модель неопределенного объекта и средства адаптации, в частности алгоритмы идентификации неопределенностей. К основным недостаткам можно отнести отсутствие аналитической формулы для определения коэффициента усиления  $K$  и усиление высокочастотных помех, имеющих доступ в регулятор. Кроме того, при синтезе СУБКУ, как и во многих других задачах синтеза, на управление ограничение не налагается.

Отличительной особенностью  $K_\infty$ -робастных систем является тот факт, что основой синтеза являются не эвристические приемы, а применяется метод функции Ляпунова. Построенная таким образом система имеет методологическую основу, кроме того, регулятор является не астатическим, а робастным. Как известно, астатический регулятор обеспечивает нулевую статическую ошибку  $\Delta_s = 0$  для определенного класса возмущений без их измерения. При изменении типа возмущений требуется вновь настраивать регулятор.

В статье исследуется случай, когда выходной сигнал регулятора ограничивается из-за выхода сигнала управления за пределы физических ограничений, т. е. при насыщении регулятора. Анализируется влияние этой особенности на потребление энергии управления и робастные показатели  $K_\infty$ -робастных систем управления.

### Постановка и решение задачи

В работах [3—7] рассматривается одномерный по входу и выходу (SISO) неопределенный объект, заданный скалярным уравнением

$$y^{(n)} = f(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) + b(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})u + v(t),$$

где  $y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T \in R^n$  — доступный измерению или оценке вектор состояния;  $y \in R$  — регулируемый выход;  $u \in R$  — скалярное управление;  $f(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}), b(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) > 0$  — неизвестные ограниченные функции;  $v(t)$  — неконтролируемое ограниченное внешнее возмущение.

Рассматривается задача слежения, состоящая в выборе такого управления с обратной связью  $u$ , которое после завершения переходной составляющей обеспечивает движение выхода  $y(t)$  объекта по эталонной траектории  $y_d(t)$  с заданной точностью

$$|y_d(t) - y(t)| = |e(t)| \leq \delta_s, \quad t \geq t_s,$$

где  $t_s$  — заданное время установления (*settling time*) переходной составляющей для  $\delta_s = (1...5)\%$ -ной ошибки слежения.

С использованием функции Ляпунова  $V = 1/2s^2$  получен робастный П закон управления:

$$u = Ks = K(c_1 e + c_2 \dot{e} + \dots + e^{(n-1)}) = Kc^T e, \quad (1)$$

где  $K > 0$  — коэффициент усиления регулятора (достаточно большое число);  $c^T = (c_1, c_2, \dots, 1)$ ;  $e^T = (e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)})$ ;  $K, c^T$  — параметры настройки регулятора. После некоторого конечного значения  $K$  достигаются заданные показатели качества.

Можно показать, что условию асимптотической устойчивости  $dV/dt = s\dot{s} < 0$  также отвечают релейное  $u = -K \text{sign}s$  и линейно-релейное управления  $u = -K \text{sat}(s, \Delta)$ , где  $\Delta$  — ширина зоны линейности.

Относительно ошибки  $e(t)$  регулятор (1) является пропорционально-дифференциальным регулятором  $(n-1)$ -го порядка (ПД $^{n-1}$  регулятором). Подобный регулятор в определенном смысле можно отнести к полиномиальным регуляторам [15] с передаточной функцией  $W = R(s)/C(s)$  при  $\deg C(s) = 0 \Rightarrow C(s) = c_0$ , где  $c_0 = 1/K$ .

При стремлении  $K$  к бесконечности в пределе система описывается уравнением гиперплоскости, характеризующем ее свободное движение:

$$s = c_1 e + c_2 \dot{e} + \dots + e^{(n-1)} = 0, \quad s(0) = 0.$$

Для устойчивости движения угловые коэффициенты  $c_i$  характеристического полинома

$$H(p) = p^n + c_{n-1}p^{n-1} + \dots + c_1$$

должны удовлетворять условию  $\text{Re} p_i < 0$ .

В пределе приведенная линейная система приобретает инвариантное свойство с устойчивым положением равновесия. При решении прикладных задач использование достаточно большого конечного значения коэффициента усиления  $K$  позволяет получить удовлетворительные показатели качества. При этом гиперплоскость  $s = 0$  выступает в роли разомкнутого аттрактора (назовем это *аттракторной воронкой*), к которому притягиваются все траектории приведенной линейной системы.

В работе [16] управление (1) под названием "робастное эквивалентное управление" по аналогии с работой [17] использовано для синхронизации неидентичных динамических систем. Отметим, что структура системы синхронизации для многомерного случая не раскрыта и приведем некоторое разъяснение. При последовательной структуре выход ведущей системы подается на вход первой ведомой системы, а выход каждой ведомой системы является входом последующей ведомой системы. При параллельной структуре выход ведущей системы подается на входы ведомых систем, составляющих цепочку, а при смешанной структуре используются всевозможные комбинации указанных соединений.

В статье ограничение на управление реализуется релейно-линейным блоком  $u_{sat} = \text{sat}(u, u_0, \bar{u}_{sat})$  (*saturation* — насыщение), включенным на выход робастного регулятора.  $\text{sat}(\cdot)$  выполняет функцию П регулятора с учетом интервальных ограничений  $u_{sat} \leq |\bar{u}_{sat}|$ .

В данном случае функция  $\text{sat}(\cdot)$  описывается выражением

$$u_{sat} = \begin{cases} ku, & \text{если } |u| \leq u_0; \\ \bar{u}_{sat} \text{sign} u, & \text{если } |u| > u_0, \end{cases}$$

где  $u_0, \bar{u}_{sat}$  — параметры настройки;  $k = \bar{u}_{sat}/u_0$ ;  $u = Ks$  — входной сигнал.

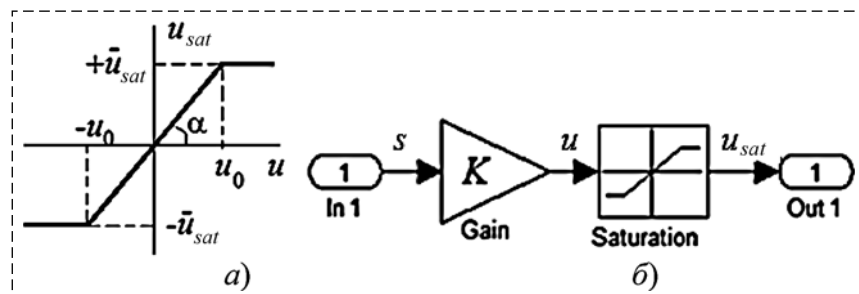


Рис. 1. Статическая характеристика (а) и схема реализации (б) функции  $\text{sat}(\cdot)$   
Fig. 1. The static characteristic (a) and the realization scheme (b) of the function  $\text{sat}(\cdot)$

На рис. 1 показаны статическая характеристика (а) и схема реализации (б) функции  $\text{sat}(\cdot)$  в пакете *Simulink*.

Здесь  $k = \tan \alpha = 1 \Rightarrow u_0 = \bar{u}_{sat}$ . При этом на интервале линейности  $u \in [-u_0; +u_0]$  входной сигнал проходит на выход без изменения  $u_{sat} = u = Ks$ .

Робастный регулятор с учетом ограничения имеет  $n + 1$  параметров настройки:  $n - 1$  угловых коэффициентов  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , плоскости  $s = 0$ , коэффициент усиления  $K$  и предельное значение  $\pm \bar{u}_{sat}$ . При  $n = 2$  имеем всего три параметра настройки. Методика определения параметров  $c_i$  и  $K$  изложена в работах [3, 4].

## Результаты моделирования

**Пример.** Рассмотрим особенности управления математическим маятником [18, с. 27] в случае ограниченности выходного сигнала регулятора при параметрической и сигнальной неопределенности:

$$\begin{aligned} d^2\theta/dt^2 &= -k_1 \sin \theta + k_2 u + v(t); \\ k_1 &= g/l; \quad k_2 = 2/(ml^2), \end{aligned}$$

где  $m$  — масса груза;  $\theta$  — угол отклонения от положения равновесия (вертикаль);  $l$  — длина стержня;  $v(t)$  — неконтролируемое ограниченное внешнее возмущение.

Генеральные составляющие модели:

$$f(\cdot) = -k_1 \sin \theta + v(t), \quad b(\cdot) = k_2.$$

Обозначая  $y = x_1 = \theta, x_2 = \dot{y} = \dot{\theta}$ , уравнение маятника запишем в координатах состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_1; \\ \dot{x}_2 &= -k_1 \sin x + k_2 u + v(t); \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Пусть возмущение  $v(t) = 1 + \sin(10t) + \cos(4t)$ , эталонная траектория (неявная эталонная модель)  $y_d = 0,5 \sin(0,5t) + 0,5 \cos(t)$ . Показатели качества:  $t_s = 2$  с,  $\delta_s = 2\%$ . Начальные условия:  $x(0) = (x_{10}, x_{20})^T = (2, 0)^T$ . Соответствующее начальное условие по ошибке слежения:  $e(0) = y_d(0) - y(0) = 0,5 - 2 = -1,5$ .

Сначала рассмотрим особенности функционирования  $K_\infty$ -роба-

стной системы, когда не учитывается ограничение на управление. При  $n = 2$  уравнение робастного регулятора  $u = Ks = K(ce + \dot{e})$ . Согласно работам [3, 4] при заданных показателях качества и начальных условиях для монотонной переходной характеристики угловой коэффициент (параметр настройки) линии  $s = ce + \dot{e} = 0$  равен  $c = 2,16$ .

Номинальное значение параметров  $m = l = 1$ . Пусть модель имеет параметрическую неопределенность по  $m$  и  $l$  на довольно широких интервалах  $0,5 \leq m \leq 1,5$ ;  $0,5 \leq l \leq 1,5$ .

В работах [10, 11] динамика управляемого процесса в робастных системах с большим коэффициентом усиления разбита на два интервала: быстрое движение, когда траектории за короткое время достигают малой окрестности плоскости  $s = 0$  и быстро затухают по экспоненте  $\exp(-Kt)$ ; медленное движение по  $s = 0$  в положение равновесия. Эта особенность авторами названа эффектом локализации движения. В  $K_\infty$ -робастных системах также наблюдается аналогичная закономерность.

На рис. 2, а—е показаны динамические характеристики системы при  $K = 120$  без уче-

та ограничения на управляющий сигнал  $u$ . Моделирование выполнено при дискретных значениях параметров  $m = [0,5; 1,0; 1,5]$ ,  $l = [0,5; 1,0; 1,5]$ . Соответственно,  $k_1 = [19,6; 9,8; 6,5]$ ,  $k_2 = [16; 2; 0,6]$ .

На рис. 2 изображены пучки, состоящие из трех кривых, которые соответствуют различным комбинациям параметров модели. Таким образом демонстрируется, что при достаточно большом коэффициенте усиления ( $K = 120$ ) концентрация пучков велика, и это свидетельствует об удовлетворительных робастных свойствах системы. На рис. 2, е показано, что при малых  $K$  ( $K = 5$ ) разброс траекторий внутри пучка увеличивается, и это говорит об ухудшении робастности.

Установившийся режим — движение по коридору шириною  $2|\delta_s|$  — наступает после момента времени  $t_s$ . При таком движении фазовая траектория не покидает малую окрестность положения равновесия (здесь — начало координат, рис. 2, з).

В правильности указанной последовательности движений в СУБКУ можно убедиться, если построить фазовый портрет, задавая время си-

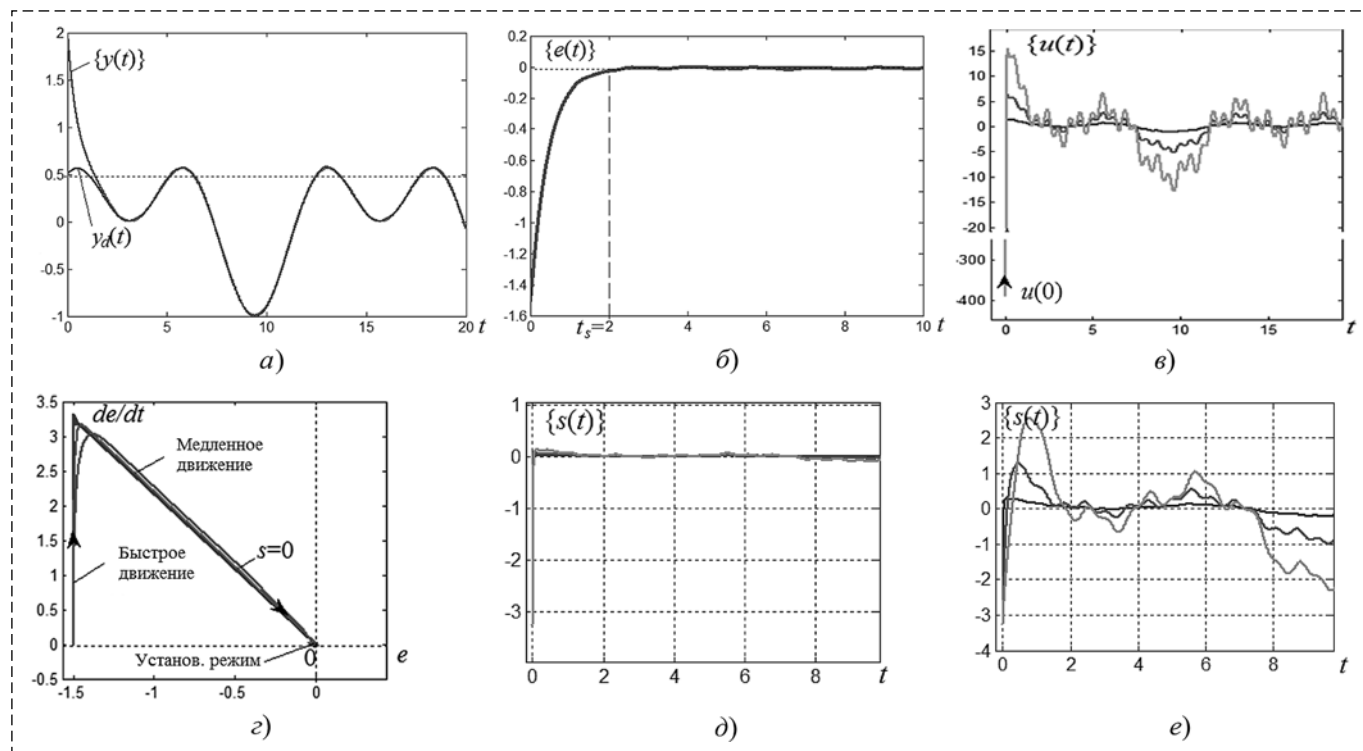


Рис. 2. Характеристики  $K_\infty$ -робастной системы управления:

а — переходные характеристики по выходу; б — ошибка слежения; в — сигнал управления; г — фазовый портрет при  $T = 10$  с; д, е — графики изменения  $s(t)$  при  $K = 120$  и  $K = 5$

Fig. 2. Characteristics of the  $K_\infty$ -robust control system:

а — transition characteristics for the output; б — tracking error; в — control signal; г — phase portrait at  $T = 10$  s; д, е — graphs of the variation of  $s(t)$  for  $K = 120$  and  $K = 5$

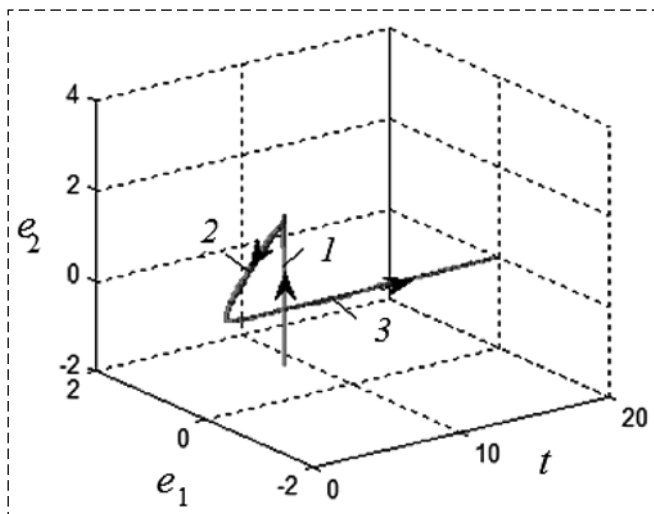


Рис. 3. Характер движения системы в трехмерном пространстве  
Fig. 3. The nature of the system motion in three-dimensional space

муляции равным времени установления:  $T = t_s = 2$  с. Поскольку полученная при этом картинка по виду похожа на фазовый портрет, показанный на рис. 2,  $\varepsilon$  ( $T = 10$  с), то ее здесь не будем демонстрировать.

Более наглядное представление различных участков движения можно получить в трехмерной системе координат  $(e, \dot{e}, t)$  (рис. 3).

На рис. 3 1 — траектория быстрого движения, 2 — траектория медленного движения по линии  $s = 0$ , 3 — установившийся режим. Рисунок получен путем ввода функции  $\text{plot3}(e_1, e_2, t)$  из командного окна *MATLAB*. Здесь  $e_1, e_2$  обозначены ошибка слежения и ее производная.

Рассмотрим закономерности влияния ограничения на расход энергии управления. Вычислим энергию управления для трех комбинаций параметров  $k_1, k_2$  за  $t = 20$  с (время симуляции) при отсутствии ограничения:

$$E_K = \int_0^{20} u^2 dt = [83,9; 384,1; 1365,0].$$

Основной причиной возникновения высоких значений  $E_K$  является то, что в начальный момент времени управляющий сигнал принимает чрезмерно большое значение  $u(0) = [377; 270; 125]$ .

Построим характеристики системы при наличии ограничения  $u_{sat} \in [+20; -20]$ . На рис. 4 показаны динамические характеристики  $K_\infty$ -робастной системы.

Данная схема отличается от схемы, используемой для моделирования системы без учета ограничения, лишь тем, что в ней после робастного ПД регулятора включен блок *Saturation*. В этом случае предельное значение управляющего сигнала для всех трех комбинаций параметров составляет  $u_{sat} = \bar{u}_{sat}(0) = 20$ . Из рис. 4,  $\varepsilon$  видно, что ограниченность управления в основном влияет на робастность (здесь — отклонение траектории от предельной точки  $s = 0$ ) переходного (быстрое движение + медленное движение) режима.

При ограничении  $u_{sat} \in [+20; -20]$  энергия управления за время  $t = 20$  с

$$E_M = [9,6; 116,5; 542,8].$$

Сравним затраченную энергию управления до и после введения ограничения:

$$\Delta E = E_K - E_M = [41,6; 267,6; 722,2].$$

Как видно, при каждой комбинации параметров имеется

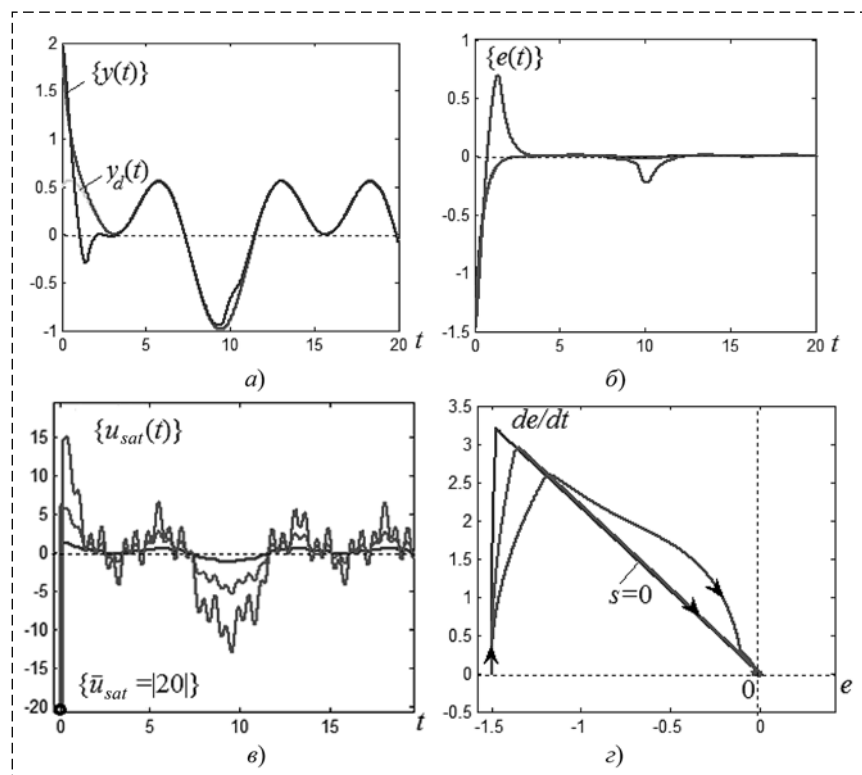


Рис. 4. Динамические характеристики  $K_\infty$ -робастной системы при ограниченном управлении

Fig. 4. The dynamic characteristics  $K_\infty$ -robust system with limited control

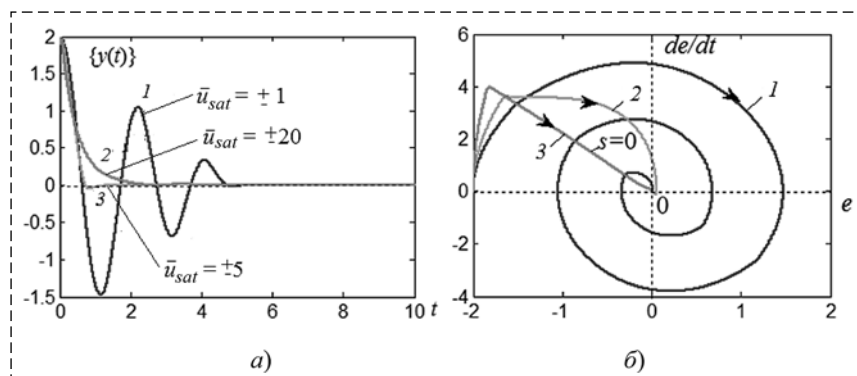


Рис. 5. Характеристики свободного движения при различных ограничениях  
Fig. 5. Characteristics of free movement under various restrictions

значительная экономия энергии управления, обусловленная наличием ограничения. Однако в переходном режиме (интервал  $0 \leq t \leq t_s = 2$  с) наблюдается ослабление робастности: происходит некоторое расхождение траекторий от линии  $s = 0$  (рис. 5).

На рис. 5, а и б влияние ограничения на управление показано для свободного движения системы при  $y_d(t) = 0$ ,  $v(t) = 0$  и трех значений  $\bar{u}_{sat} = \pm[1; 5; 20]$  при  $k_1 = 9,8$ ;  $k_2 = 2$ .

Графические построения позволяют еще раз констатировать известную истину, что для улучшения показателей системы (в том числе и робастных) следует расширить интервал ограничений. В данном примере  $u_{sat} \in [+ \bar{u}_{sat}; - \bar{u}_{sat}]$ .

При построении робастных систем управления одной из важных задач является определение и оценка показателя робастности. В настоящее время не имеется инженерных методик оценки качественных показателей робастности неопределенных нелинейных систем. Оценка робастности на основе теории чувствительности, инвариантности и др. для инженерных приложений является обременительной и часто не востребуемой на практике задач.

В статье для оценки робастности динамического режима (быстрое движение + медленное движение) СУБКУ предложен интегральный критерий, характеризующий "сгущение траекторий" в окрестности гиперплоскости  $s(t) = 0$ :

$$J_j = \int_0^{t_s} |s_j(t)| dt, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где  $t_s$  — время установления.

Здесь  $N$  — число точек разбиения реквизитов объекта, например неопределенных параметров, на дискретные значения внутри известных интервалов. Разбиение проводится

в целях более наглядного представления понятия робастности. Можно показать, что в пределе, когда  $K \rightarrow \infty$ , значения  $J_j = 0$ . При конечном  $K$  значение  $J_j$  отличается от нуля (см. рис. 2, е).

Концентрацию пучка по  $s(t)$  (см. рис. 2, д, е) определим путем усреднения по ансамблю:

$$\bar{J} = (J_1 + J_2 + \dots + J_N)/N.$$

Без учета ограничения при  $K = 200$ ,  $t_s = 2$  с имеем пучок из трех траекторий ( $N = 3$ ). Значения  $J_1 = 0,01012$ ;  $J_2 = 0,03898$ ;  $J_3 = 0,09266 \Rightarrow \bar{J} = 0,04725$ . При ограничении  $u_{sat} \in [+20; -20]$  значения  $J_1 = 0,03461$ ;  $J_2 = 0,1227$ ;  $J_3 = 0,3174 \Rightarrow \bar{J} = 0,1582$ .

Соотношение  $\lambda = 0,1582/0,04725 = 3,3481$ . Как и следовало ожидать, наложение ограничения на управление ухудшает робастное свойство, в данном примере приблизительно в 3,35 раза.

В работе для демонстрации робастности интервал изменения параметров разбит на несколько дискретных значений. Это позволяет оценить робастность как "сгущение траекторий" по  $s(t)$  в окрестности гиперплоскости  $s(t) = 0$ . Если при моделировании на этих интервалах задать некоторую непрерывную функцию времени, например гармоническую, то получим единственную траекторию  $s(t)$  и, следовательно,  $\bar{J} = J_1$ .

Значение  $K$  должно обеспечивать выполнение условий  $\bar{J} \leq \gamma$  и  $|e(t)| \leq \delta_s$ ,  $t \geq t_s$ , где  $\gamma > 0$  — заданное малое число.

## Заключение

На основе теоретических результатов и компьютерного моделирования можно прийти к следующим выводам.

1. В предельных следящих системах с большим коэффициентом усиления, в частности  $K_\infty$ -робастных системах, в начальном интервале времени управление принимает чрезмерно большое значение, которое обеспечивает робастность динамического режима. Эта особенность связана с тем, что в начальный момент времени начальное условие  $e^T(0)$  имеет относительно большое значение. Например, при  $e(0) = -1,5$ ;  $\dot{e}(0) = 0$ ;  $c = 2,16$ ;  $K = 120$  значение  $s(0) = \dot{e}(0) + ce(0) = -3,14 \Rightarrow u(0) = |377|$ .

2. Сужение ограничений главным образом ухудшает робастность динамического режима из-за стеснения управления в начальном интервале времени.

3. Впервые с помощью компьютерной графики в трехмерной координатной системе  $(e, \dot{e}, t)$  дано наглядное представление участков фазовых траекторий, относящихся к различным видам движений: быстрое движение из произвольного начального состояния, которое обеспечивает попадание изображающей точки на плоскость  $s = 0$ ; медленное движение по  $s = 0$  — локализация А. С. Вострикова; установившееся движение в пределах заданной точности  $\pm \delta_s$ .

4. Для предельных систем управления с большим коэффициентом усиления предложена интегральная оценка показателя робастности, заключающаяся в вычислении интеграла от  $|s(t)|$  с верхней границей, равной заданному времени установления. Этот показатель характеризует отклонение реальной траектории  $s(t)$  относительно предельной  $s(t) = 0$ . Показано, что в пределе при  $K \rightarrow \infty$  интеграл равен нулю.

5. Сформулировано условие для определения коэффициента усиления  $K$ .

6. Компьютерное моделирование предельных робастных систем значительно отстает от теоретических исследований.

7. В среде имитационного моделирования *Simulink* построена схема моделирования  $K_\infty$ -робастных систем управления, которая может составить основу моделирования других классов подобных систем.

8. Теоретические положения обоснованы путем решения модельной задачи на примере гармонического осциллятора с параметрической неопределенностью. Компьютерное исследование позволило сделать ряд положительных выводов, имеющих важное прикладное значение.

## Список литературы

1. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Метод больших коэффициентов усиления и эффект локализации движения в задачах синтеза систем автоматического управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 2. С. 2—10.
2. Фуртат И. Б. Управление с компенсацией возмущений. СПб.: Университет ИТМО, 2017. 65 с.
3. Рустамов Г. А. Робастная система управления с повышенным потенциалом // Известия Томского Политехнического Университета. 2014. Т. 324, № 5. С. 13—20.
4. Рустамов Г. А.  $K_\infty$ -робастные системы управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 7. С. 435—442.
5. Rustamov G. A. Absolutely robust control systems // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. Vol. 47, N. 5. P. 227—241.
6. Рустамов Г. А., Рустамов Г. А. Система робастного управления. Евразийский патент № 025475 от 30.12.2016 г.
7. Рустамов Г. А. Анализ методов построения робастных систем управления с большим коэффициентом усиления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 6. С. 363—373.
8. Мееров М. В. Системы автоматического управления, устойчивые при бесконечно больших коэффициентах усиления // Автоматика и телемеханика. 1947. Т. 8, № 4. С. 225—243.
9. Мееров М. В. Синтез структур систем автоматического управления высокой точности. М.: Наука, 1967. 424 с.
10. Востриков А. С. Синтез систем регулирования методом локализации. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. 252 с.
11. Востриков А. С. Старшая производная и большие коэффициенты усиления в задаче управления нелинейными нестационарными объектами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 5. С. 2—7.
12. Востриков А. С. Проблема синтеза регуляторов для систем автоматики: состояние и перспективы // Автоматрия. 2010. Т. 46, № 2. С. 3—19.
13. Востриков А. С., Французова А. Г. Синтез ПИД-регуляторов для нелинейных нестационарных объектов // Автоматрия. 2015. Т. 51, № 5. С. 53—60.
14. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Робастная коррекция динамических объектов в системах автоматического управления // Автоматрия. 2015. Т. 51, № 5. С. 61—68.
15. Тарарыкин С. В., Аполонский В. В., Терехов А. И. Исследование влияния структуры и параметров полиномиальных регуляторов "входа-выхода" на робастные свойства синтезированных систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. Т. 152, № 11. С. 2—9.
16. Рустамов Г. А. Синхронизация неидентичных динамических систем с помощью эквивалентного управления // Известия Томского Политехнического Университета. 2014. Т. 325, № 5. С. 33—42.
17. Utkin V. I. Sliding Mode in Optimization and Control Problems. New York, Springer-Verlag, 1992. P. 387.
18. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 272 с.

## Research of $K_\infty$ -Robust Systems with Constrained Control

G. A. Rustamov, gazanfar.rustamov@gmail.com, V. G. Farchadov, vahidf@mail.ru, R. G. Rustamov, rustamshrustamov@gmail.com,  
Azerbaijan Technical University

Corresponding author: Rustamov Gazanfar A., D. Sc., Professor,  
Azerbaijan Technical University, AZ1073, G. Javid avenue 25, Baku, Azerbaijan,  
e-mail: gazanfar.rustamov@gmail.com

### Abstract

At the present, there are no satisfactory engineering solutions related to the synthesis of robust regulators taking into account the constraints on control. In this connection, it is important to study the influence of saturation effect of the controller on the robust properties of systems. In this paper, this problem is considered in connection with  $K_\infty$ -robust control systems with a high gain. It is shown that in control limit systems, in particular,  $K_\infty$ -robust systems at the initial instant of time, the control assumes an excessively large value. This ensures the robustness of the dynamic mode. The reason for this feature is related to the fact that at the initial instant of time the initial conditions has a great importance. The main reason for the deterioration of robust properties is due to the tight control in the initial time interval. Provision of robustness of the static mode does not require great control efforts. For the first time, using computer graphics in a three-dimensional coordinate system, taking into account the time, a visual representation of the sections of phase trajectories pertaining to different types of movements is given: rapid motion from an arbitrary initial state that ensures hitting the imaging point into the degenerate trajectory; slow motion along this trajectory; steady-state motion within the specified accuracy. For the limit control systems, an integral robustness estimate is proposed, which consists in calculating the integral of the absolute value of the slow motion trajectory. This indicator characterizes the discrepancy (dispersion) of the real trajectory with respect to the limiting trajectory. The reliability of theoretical reasoning is confirmed by solving a model problem in the block-vision environment of Matlab/Simulink.

**Keywords:** uncertainty, robust control system, Lyapunov function, high gain coefficient, attractor, constraints, saturation, estimation robustness

For citation:

Rustamov G. A., Farchadov V. G., Rustamov R. G. Research of  $K_\infty$ -Robust Systems with Constrained Control, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 11, pp. 699–706.

DOI: 10.17587/mau.19.699-706

### References

1. Filimonov A. B., Filimonov N. B. Metod bolshih koefitsientov usileniya i jeffekt lokalizatsii dvizheniya v zadachah sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (Large gain coefficients method and effect of the motion localization in the problem of synthesis of the automatic control system), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2009, no. 2, pp. 2–10 (in Russian).
2. Furtat I. B. Upravlenie s kompensaciej vozmushhenij (Control with compensation of disturbances), SPb, Publishing house of Universitet ITMO, 2017, pp. 65 (in Russian).
3. Rustamov G. A. Robastnaja sistema upravleniya c povyshennym potencialom (Robust Control System with High Potential), *Izvestija Tomskogo Politehnicheskogo Universiteta*, 2014, vol. 324, no. 5, pp. 13–20 (in Russian).
4. Rustamov G. A.  $K_\infty$ -robastnye sistemy upravleniya ( $K_\infty$ -robust control systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 7, pp. 435–442 (in Russian).
5. Rustamov G. A. Absolutely robust control systems, *Automatic Control and Computer Sciences*, 2013, vol. 47, no. 5, pp. 227–241.
6. Rustamov G. A., Rustamov G. A. Sistema robastnogo upravleniya (Robust control system), Evrazijskij patent № 025475 ot 30.12.2016 g. (in Russian).
7. Rustamov G. A. Analiz metodov postroenija robastnyh sistem upravleniya s bol'shim koefitsientom usileniya (Analysis of methods of design of robust control systems with high gain coefficient), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 6, pp. 363–373 (in Russian).
8. Meerov M. V. Sistemy avtomaticheskogo upravleniya, us-tojchivye pri beskonečno bol'shij koefitsientah usileniya (Automatic control system, stable at infinitely large gain factors), *Avtomatika i Telemekhanika*, 1947, vol. 8, no. 4, pp. 225–243 (in Russian).
9. Meerov M. V. Sintez struktur sistem avtomaticheskogo upravleniya vysokoj tochnosti (Synthesis of structures of automatic control systems with high precision), Moscow, Nauka, 1967, 424 p. (in Russian).
10. Vostrikov A. S. Sintez sistem regulirovanija metodom lokalizatsii (Synthesis of control systems by localization method), Novosibirsk, Publishing house of NGTU, 2007, 252 p. (in Russian).
11. Vostrikov A. S. Starshaja proizvodnaja i bol'shie koefitsienty usileniya v zadache upravleniya nelinejnymi nestacionarnymi obektami (The highest derivative and large coefficients in controlling the linear non-stationary objects), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2008, no. 5, pp. 2–7 (in Russian).
12. Vostrikov A. S. Problema sinteza reguljatorov dlja sistem avtomatiki: sostojanie i perspektivy (The problem of the synthesis of regulators for automation systems: state and prospects), *Avtometrija*, 2010, vol. 46, no. 2, pp. 3–19 (in Russian).
13. Vostrikov A. S., Francuzova A. G. Sintez PID-reguljatorov dlja nelinejnyh nestacionarnykh obektov (Synthesis of PID regulators for nonlinear nonstationary objects), *Avtometrija*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 53–60 (in Russian).
14. Filimonov A. B., Filimonov N. B. Robastnaja korrekciija dinamicheskij obektov v sistemah avtomaticheskogo upravleniya (Robust correction of dynamic objects in automatic control systems), *Avtometrija*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 61–68 (in Russian).
15. Tararykin S. V., Apolonskij V. V., Terehov A. I. Issledovanie vlijanija struktury i parametrov polinomial'nykh reguljatorov "vhoda-vyhoda" na robastnye svojstva sintezirovannykh sistem (Research of the influence of the structure and parameters of polynomial "input-output" regulators on the robust features of synthesized systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2013, vol. 152, no. 11, pp. 2–9 (in Russian).
16. Rustamov G. A. Sinhronizacija neidentichnyh dinamicheskij sistem s pomoshh'ju jekvivalentnogo upravleniya (Synchronization of non-identical dynamic systems using equivalent control), *Izvestija Tomskogo Politehnicheskogo Universiteta*, 2014, vol. 325, no. 5, pp. 33–42 (in Russian).
17. Utkin V. I. Sliding Mode in Optimization and Control Problems, New York, Springer-Verlag, 1992, 387 p.
18. Arnold V. I. Obyknoennye differencial'nye uravnenija (Ordinary differential equations), Moscow, Nauka, 1984, 272 p. (in Russian).