

Г. Л. Дегтярев, д-р техн. наук, зав. кафедрой, gldegtyarev@mail.ru,

Р. Н. Файзутдинов, канд. техн. наук, доц., rustemfn@gmail.com, И. О. Спиридонов, аспирант,
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева — КАИ, г. Казань

Многокритериальный синтез робастного регулятора нелинейной механической системы*

Рассматривается задача многокритериального синтеза робастного закона управления нелинейной механической системой, динамика которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода. Подобные задачи имеют многочисленные практические приложения, например, при проектировании регуляторов робототехнических систем и гиросtabilизированных платформ.

На практике при проектировании регуляторов часто приходится использовать неточные математические модели объектов управления. Поэтому важным требованием к проектируемой системе является обеспечение ее робастности при неопределенности параметров самой системы и внешних возмущений. В современной теории робастного управления наиболее разработаны методы синтеза регуляторов для линейных систем. При использовании этих методов для нелинейных систем нелинейности обычно включают в описание неопределенностей объекта. В результате синтезированные регуляторы получаются слишком консервативными, особенно при значительных неопределенностях. Развитием теории линейных робастных систем является нелинейная теория H_∞ -оптимального управления, разработанная на базе теории дифференциальных игр. Методы нелинейной теории позволяют обеспечить робастную устойчивость синтезируемых систем управления. Однако для синтеза нелинейного H_∞ -управления необходимо решить дифференциальное уравнение в частных производных, что является достаточно трудной задачей. Кроме того, при использовании данного метода трудно обеспечить робастное качество процессов управления.

В статье для синтеза робастного закона управления использованы методы теории линейных систем, зависящих от параметров. Показано, что лагранжева система может быть адекватно представлена в виде квазилинейной параметрической модели. С вычислительной точки зрения процедура синтеза сводится к технике выпуклой оптимизации при ограничениях, выраженных в форме линейных матричных неравенств (ЛМН). Измеряемые параметры включаются в закон управления, что позволяет обеспечить непрерывную подстройку коэффициентов регулятора к текущей динамике объекта управления и лучшее качество процессов управления по сравнению с H_∞ -регулятором. Кроме того, использование аппарата ЛМН позволяет учесть при синтезе регулятора требования к качеству переходных процессов.

Так как квазилинейная параметрическая система непрерывно зависит от вектора параметров, то система ЛМН получается бесконечномерной. Эта бесконечномерная система уменьшается до конечного числа ЛМН с использованием полиномиального представления параметрической модели.

Приведен пример многокритериального синтеза робастного закона стабилизации и наведения линии визирования оптико-электронной системы, закрепленной на двухосной стабилизированной платформе.

Ключевые слова: многокритериальный синтез, робастный регулятор, нелинейная механическая система, полиномиальная модель, линейные матричные неравенства

Введение

Движение множества технических систем, используемых на практике, описывается нелинейными уравнениями Лагранжа второго рода. Примерами таких систем являются роботы-манипуляторы, гиросtabilизированные платформы, мостовые краны. Поэтому задача управления лагранжевыми системами привлекает внимание множества исследователей [1, 2].

При проектировании законов управления такими системами, как правило, предполагают, что параметры объекта известны точно. Однако на практике большинство параметров может быть определено только с той или иной степенью неопределенности. Поэтому одним из основных требований к проектируемой системе управления является обеспечение робастности системы в условиях неопределенности параметров самой системы и внешних возмущений [3, 4]. Большая часть результатов современной теории робастного управления получена на основе линейных методов, т. е. эти результаты основаны на предположении, что номинальный объект — линейный. Если ре-

* Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания подведомственных образовательных организаций (шифр проекта 8.3974.2017/4.6).

альный объект имеет нелинейную динамику, эти нелинейности обычно включают в описание неопределенностей объекта. Недостатком такого подхода является то, что он игнорирует доступную информацию о нелинейностях объекта, и синтезированные регуляторы получаются слишком консервативными, особенно при значительных неопределенностях.

Естественным развитием теории линейных робастных систем является нелинейная теория H_∞ -оптимального управления. Теоретической базой для разработки методов синтеза законов нелинейного H_∞ -управления являлась теория дифференциальных игр [5]. В рамках данной теории были развиты методы, позволяющие обеспечить робастную устойчивость систем стабилизации и слежения за командным сигналом. Однако для синтеза нелинейного H_∞ -управления необходимо решить дифференциальное уравнение в частных производных, что является достаточно трудной задачей. При значительных неопределенностях параметров системы этот метод дает слишком консервативные результаты. Кроме того, при использовании данного метода трудно обеспечить робастное качество процессов управления.

Альтернативой нелинейной теории H_∞ -управления является теория линейных систем, зависящих от параметров [6]. В рамках данного подхода объект управления описывается множеством линейных моделей, непрерывно зависящих от вектора параметров. Многие нелинейные модели можно адекватно описать с помощью квазилинейных параметрических моделей. Достоинством метода является то, что при синтезе закона управления можно использовать эффективный аппарат линейной теории синтеза робастных систем. С вычислительной точки зрения применение метода сводится к широко используемой в настоящее время технике выпуклой оптимизации при ограничениях, выраженных в форме линейных матричных неравенств [7]. Измеряемые параметры включаются в закон управления, что позволяет обеспечить непрерывную подстройку коэффициентов регулятора к текущей динамике объекта управления и лучшее качество процессов управления по сравнению с H_∞ -регулятором. Кроме того, использование аппарата линейных матричных неравенств (ЛМН) позволяет учесть при синтезе регулятора требования к качеству переходных процессов.

В данной работе предложена методика многокритериального синтеза робастного регулятора лагранжевой системы с использованием методов теории линейных параметрических

систем. В первом разделе приведена постановка задачи. Во втором разделе описана методика расчета параметров регулятора с использованием квазилинейной параметрической модели лагранжевой системы. В третьем разделе приведен пример синтеза регулятора.

Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную механическую систему, движение которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода в векторно-матричном виде [2]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau + \tau_e, \quad (1)$$

где $q \in R^m$ — вектор обобщенных координат; $M(q)$ — матрица инерции; $C(q, \dot{q})$ — матрица кориолисовых и центробежных сил; $G(q)$ — m -мерный вектор потенциальных (гравитационных) сил; τ — m -мерный вектор управляющих обобщенных сил; τ_e — m -мерный вектор внешних возмущающих обобщенных сил.

Зададим желаемую траекторию $q_d(t)$ системы (1) и введем векторы ошибки $e_q(t)$ и скоростной ошибки $\dot{e}_q(t)$:

$$e_q(t) = q(t) - q_d(t); \quad (2)$$

$$\dot{e}_q(t) = \dot{q}(t) - \dot{q}_d(t). \quad (3)$$

Для обеспечения отслеживания системой (1) желаемой траектории $q_d(t)$ необходимо синтезировать закон управления, обеспечивающий выполнение соотношений $e_q(t) = 0$, $\dot{e}_q(t) = 0$.

Для оценки робастности системы управления представим матрицы уравнения (1) в виде

$$M(q) = M_0(q) + \Delta M(q);$$

$$C(q, \dot{q}) = C_0(q, \dot{q}) + \Delta C(q, \dot{q});$$

$$G(q) = G_0(q) + \Delta G(q),$$

где $M_0(q)$, $C_0(q, \dot{q})$, $G_0(q)$ — номинальные матрицы, определенные при точных значениях параметров системы; $\Delta M(q)$, $\Delta C(q, \dot{q})$, $\Delta G(q)$ — неопределенности модели, определяемые неопределенностями параметров системы. В результате уравнение (1) приобретает следующий вид:

$$M_0(q)\ddot{q} + C_0(q, \dot{q})\dot{q} + G_0(q) = \tau + \delta(q, \dot{q}, \ddot{q}), \quad (4)$$

где

$$\delta(q, \dot{q}, \ddot{q}) = -(\Delta M(q)\ddot{q} + \Delta C(q, \dot{q})\dot{q} + \Delta G(q)) + \tau_e.$$

Используя соотношения (2), (3), запишем уравнения, описывающие динамику ошибок системы (4) в форме пространства состояния:

$$\begin{cases} \frac{de_q}{dt} = \dot{e}_q; \\ \frac{d\dot{e}_q}{dt} = -M_0^{-1}C_0(q, \dot{q})\dot{e}_q + u + w, \end{cases} \quad (5)$$

где $u = M_0^{-1}(\tau - M_0(q)\ddot{q}_d - C_0(q, \dot{q})\dot{q}_d - G_0(q))$ — вектор управления; $w = M_0^{-1}\delta(q, \dot{q}, \ddot{q})$ — вектор возмущающих воздействий.

Введем вектор состояния $x = [e_q^T \ \dot{e}_q^T]^T$ и перепишем уравнения (5) в матричном виде:

$$\dot{x} = A(\dot{q}, q)x + Bu + Bw, \quad (6)$$

где

$$A(\dot{q}, q) = \begin{bmatrix} 0_{m \times m} & I_m \\ 0_{m \times m} & -M_0^{-1}C_0(q, \dot{q}) \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0_{m \times m} \\ I_m \end{bmatrix}; \quad (7)$$

I_m — $m \times m$ -мерная единичная матрица; $0_{m \times m}$ — $m \times m$ -мерная нулевая матрица.

Вектор управляющих сил τ вычисляется через управление u как

$$\tau = M_0(q)(u + \ddot{q}_e) + C_0(q, \dot{q})\dot{q}_e + G_0(q).$$

Матрица $A(\dot{q}, q)$ зависит только от обобщенных координат $q(t)$ и обобщенных скоростей $\dot{q}(t)$. Поэтому систему (6) можно рассматривать как квазилинейную параметрическую систему [6], зависящую от вектора переменных параметров $\rho(t) = [q^T(t) \ \dot{q}^T(t)]^T$.

Представим систему (6) в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\rho(t))x + Bu + Bw; \\ z = Cx + D_1u + D_2w, \end{cases} \quad (8)$$

где $z \in R^s$ — вектор выходных переменных; C, D_1, D_2 — постоянные матрицы соответствующих размерностей. Выходные переменные z могут включать ошибки отслеживания командных сигналов, затраты на управление и другие сигналы, которые необходимо минимизировать в результате применения управления $u(t)$.

Предполагается, что параметры $\rho(t)$ можно вычислить в реальном масштабе времени на основании сигналов, поступающих с датчиков. При "замораживании" параметров $\rho(t)$ система (8) становится линейной стационарной системой.

Будем предполагать, что все состояния $x(t)$ доступны измерению. Регулятор возьмем в виде функции от переменных состояния $u = u(x)$.

Пусть на вход объекта (8) действует ограниченное по норме L_2 возмущение $w(t)$, т. е.

$$\|w\|_{L_2} = \left(\int_0^\infty |w(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Тогда, если регулятор асимптотически стабилизирует замкнутую систему и обеспечивает выполнение неравенства

$$\sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}} < \gamma, \gamma > 0, \quad (9)$$

то уровень гашения возмущений в замкнутой системе меньше заданного числа γ [7]. Величина $\|z\|_{L_2} / \|w\|_{L_2}$ представляет собой коэффициент усиления системы между входом w и выходом z . Максимальный коэффициент усиления нелинейной системы для всех L_2 -ограниченных возмущений (сигналов с ограниченной энергией) представляет собой H_∞ -норму системы [3, 4]. Задача синтеза регулятора, обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы и гашение возмущений в соответствии с условием (9), называется задачей синтеза субоптимального H_∞ -регулятора [5]. H_∞ -регулятор с минимальным значением γ считается [7] оптимальным H_∞ -регулятором.

Субоптимальный H_∞ -регулятор обеспечивает только асимптотическую устойчивость и гашение возмущений в замкнутой системе. Для обеспечения качества переходных процессов потребуем размещение полюсов системы в область $S(\alpha, r, \theta)$ (рис. 1). Размещение полюсов в область $S(\alpha, r, \theta)$ гарантирует [8], что переходные процессы в замкнутой системе имеют степень устойчивости не меньше α и колебательность не больше $\text{tg}\theta$. Степень устойчивости характеризует быстродействие в системе. Значение полюсов ограничено сверху константой r .

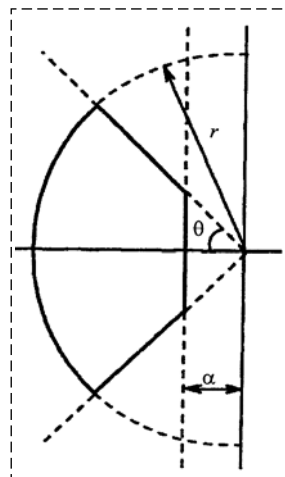


Рис. 1. Область $S(\alpha, r, \theta)$ для размещения полюсов
Fig. 1. The pole-placement region $S(\alpha, r, \theta)$

Задачу многокритериального синтеза закона управления линейной параметрической системой (8) поставим следующим образом. Найти регулятор в форме полной обратной связи по состоянию

$$u(t) = K(\rho(t))x(t), \quad (10)$$

такой что замкнутая система (8), (10) устойчива, удовлетворяет H_∞ -критерию (9), и полюса замкнутой системы находятся в области $S(\alpha, r, \theta)$.

Методика расчета параметров робастного многокритериального закона управления на основе линейных матричных неравенств

При управлении (10) уравнение замкнутой системы имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c(\rho(t))x + B_c w; \\ z = C_c x + D_c w, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A_c(\rho(t)) &= A(\rho(t)) + BK(\rho(t)), \quad B_c = B; \\ C_c(\rho(t)) &= C + D_2K(\rho(t)), \quad D_c = D_1. \end{aligned}$$

Известно [7, 9], что при фиксированном $\rho(t)$ система (11) удовлетворяет H_∞ -критерию (9) тогда и только тогда, когда существуют матричные переменные $Y = Y^T > 0$ и $Z = KY$, удовлетворяющие ЛМН

$$\begin{bmatrix} YA^T(\rho) + A(\rho)Y + Z^T B^T + BZ & B & YC^T + Z^T D_2^T \\ B^T & -\gamma I & D_1^T \\ CY + D_2 Z & D_1 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

Задачу размещения полюсов в область $S(\alpha, r, \theta)$ можно свести к решению следующих матричных неравенств [7, 9]:

$$A(\rho)Y + YA^T(\rho) + BZ + Z^T B^T + 2\alpha Y < 0; \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} -rY & A(\rho)Y + BZ \\ YA^T(\rho) + Z^T B^T & -rY \end{bmatrix} < 0; \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12} & N_{11} \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

где

$$N_{11} = (A(\rho)Y + YA^T(\rho) + BZ + Z^T B^T) \sin \theta;$$

$$N_{12} = (A(\rho)Y + BZ - YA^T(\rho) - Z^T B^T) \cos \theta.$$

Если существуют матричные переменные $Y = Y^T > 0$ и Z , удовлетворяющие ЛМН (12)–(15), то параметры регулятора K определяются

как $K = ZY^{-1}$. Для линейной параметрической системы ЛМН должны выполняться для всех допустимых значений вектора $\rho(t)$. Так как вектор $\rho(t)$ непрерывен, то система ЛМН получается бесконечномерной. При использовании политопного представления модели (8) бесконечномерную систему ЛМН можно уменьшить до конечного множества ЛМН.

Пусть значения параметров принадлежат диапазонам

$$\rho_{j\min} \leq \rho_j \leq \rho_{j\max}, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad l = 2m. \quad (16)$$

Тогда вектор параметров $\rho(t)$ изменяется внутри гиперкуба пространства R^l с $N = 2^l$ вершинами $\Pi_i, i = 1, 2, \dots, N$.

Матричным политопом [10] называют выпуклую оболочку конечного числа матриц A_i одинаковой размерности:

$$Co(A_i, i = 1, 2, \dots, N) = \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}.$$

Политопное представление линейной параметрической модели (8) внутри гиперкуба (16) имеет вид [10]

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i \right) x + Bu + Bw; \\ z = Cx + D_1 u + D_2 w, \end{cases} \quad (17)$$

где $A_i = A(\Pi_i)$ — значение матрицы $A(\rho(t))$ в вершине политопа Π_i .

С использованием политопной модели (17) решение бесконечномерной системы ЛМН (12)–(15) сводится к решению следующей конечной системы ЛМН [10]:

$$\begin{bmatrix} YA_i^T + A_i Y + Z_i^T B^T + BZ_i & B & YC^T + Z_i^T D_2^T \\ B^T & -\gamma I & D_1^T \\ CY + D_2 Z_i & D_1 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0; \quad (18)$$

$$A_i Y + YA_i^T + BZ_i + Z_i^T B^T + 2\alpha Y < 0; \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} -rY & A_i Y + BZ_i \\ YA_i^T + Z_i^T B^T & -rY \end{bmatrix} < 0; \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} N_{11i} & N_{12i} \\ N_{12i} & N_{11i} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (21)$$

где

$$N_{11i} = (A_i Y + YA_i^T + BZ_i + Z_i^T B^T) \sin \theta;$$

$$N_{12i} = (A_i Y + BZ_i - YA_i^T - Z_i^T B^T) \cos \theta.$$

Если существуют матричные переменные $Y = Y^T > 0$ и Z_i , $i = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяющие системе ЛМН (18)–(21), то матрицу $K(\rho(t))$ регулятора (10) можно вычислить по формуле

$$K(\rho(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i K_i, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad (22)$$

где $K_i = Z_i Y^{-1}$ — значения матриц коэффициентов регуляторов в вершинах политопа Π_r .

Таким образом, задача многокритериального синтеза закона управления (10) линейной параметрической системой (8) сведена к решению системы ЛМН (18)–(21).

Параметры регулятора (10) определяются в зависимости от непрерывно изменяющегося вектора параметров $\rho(t)$. Траектория $\rho(t)$ заранее не известна, но вычисляется на основании сигналов датчиков в процессе функционирования системы. За счет этого в процессе реального времени происходит непрерывная настройка параметров регулятора, что обеспечивает высокое качество процессов управления.

Решение системы ЛМН (18)–(21) и вычисление матриц коэффициентов K_i можно провести заранее. Единственные вычисления, которые необходимо выполнить в процессе реального времени управления объектом (8), — это вычисления по формуле (22).

Пример расчета

Двухосная стабилизированная (СП) (рис. 2) состоит из трех тел: основания (тело 1), жестко прикрепленного к несущему телу, внешнего подвеса рысканья (тело 2), внутреннего тангажного подвеса (тело 3) и полезной оптоэлектронной нагрузки (ПОЭН), установлен-

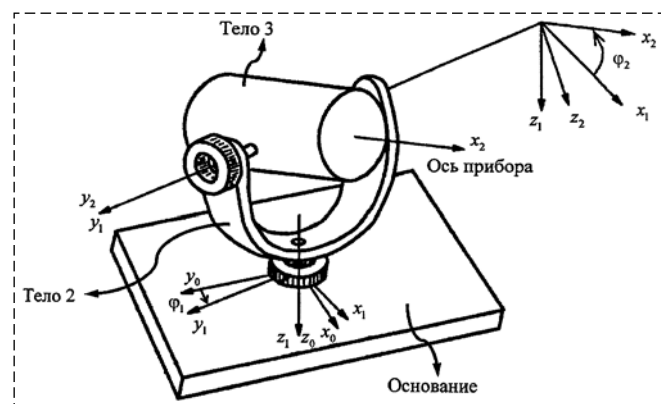


Рис. 2. Двухосная стабилизированная платформа
Fig. 2. The two-axis inertially stabilized platform

ной в тангажной рамке внутреннего подвеса. С несущим телом связана базовая система координат $Ox_0y_0z_0$. С карданом рысканья связана система координат $Ox_1y_1z_1$, с тангажным карданом — система координат $Ox_2y_2z_2$. Будем предполагать, что начала всех трех систем координат совпадают. Угловые положения рам карданова подвеса (тел 2, 3) по отношению к предыдущим телам определяются соответственно углами φ_1 , φ_2 (рис. 2). Ориентация линии визирования определяется относительно базовой системы координат $Ox_0y_0z_0$. Эта ориентация определяется с помощью последовательности углов поворота φ_1 и φ_2 вокруг осей карданова подвеса, совмещающих базовую систему координат с системой координат $Ox_2y_2z_2$, связанной с карданом, на котором прикреплена ПОЭН.

Моменты инерции тел 2, 3 (все величины в $\text{кг} \cdot \text{м}^2$):

$$J_2 = \begin{bmatrix} J_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,065 & 0 & 0 \\ 0 & 0,069 & 0 \\ 0 & 0 & 0,07 \end{bmatrix};$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} J_{3x} & 0 & 0 \\ 0 & J_{3y} & 0 \\ 0 & 0 & J_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,018 & 0 & 0 \\ 0 & 0,024 & 0 \\ 0 & 0 & 0,025 \end{bmatrix}.$$

Уравнение динамики СП имеет вид [11]

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = \tau + \tau_e,$$

где

$$M(q) = \begin{bmatrix} J_{2z} + J_{3x} \sin^2 q_2 + J_{3z} \cos^2 q_2 & 0 \\ 0 & J_{3y} \end{bmatrix};$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -(J_{3z} - J_{3x})\dot{q}_1 \sin 2q_2 \\ \frac{1}{2}(J_{3z} - J_{3x})\dot{q}_1 \sin 2q_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

В качестве обобщенных координат примем следующий вектор: $q = [q_1(t) \ q_2(t)]^T = [\varphi_1(t) \ \varphi_2(t)]^T$. Запишем уравнения динамики ошибок СП в форме квазилинейной параметрической модели (8):

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\rho(t))x + Bu + Bw; \\ z = Cx + D_1u + D_2w, \end{cases} \quad (23)$$

где матрица $A(\rho(t))$ определяется формулой (7):

$$\rho(t) = [q^T(t) \ \dot{q}^T(t)]^T; \quad C = [I_2 \ I_2]; \quad B = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix};$$

$$D_1 = I_2; \quad D_2 = 0_{2 \times 2}; \quad x = [e_q^T \ \dot{e}_q^T]^T.$$

Будем предполагать, что обобщенные координаты и скорости ограничены:

$$q_{1\min} \leq q_1 \leq q_{1\max}, q_{2\min} \leq q_2 \leq q_{2\max}; \quad (24)$$

$$|\dot{q}_1| \leq \dot{q}_{\max}, |\dot{q}_2| \leq \dot{q}_{\max}, \quad (25)$$

где $q_{1\min} = -\pi/4$, $q_{2\min} = -\pi/4$, $q_{1\max} = \pi/4$, $q_{2\max} = \pi/4$, $\dot{q}_{\max} = 10$ рад/с.

Представим уравнение (23) в политопной форме:

$$\dot{x} = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(t) A_i \right) x + Bu + Bw, \quad (26)$$

где $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, $\alpha_i(t) \geq 0$, A_i — значение матрицы $A(p(t))$ в вершине политопа P_i . Следуя работе [12], для уменьшения объема вычислений при синтезе регулятора матрицу $A(q, \dot{q})$ приближенно заменим на $A(q) = A(q, \dot{q}_{\max})$. Это позволяет уменьшить число вершин политопа (24), (25), в которых решается система ЛМН (18) — (21). Политоп определяется четырьмя вершинами: $P_1 = [q_{1\min}, q_{2\min}]$, $P_2 = [q_{1\max}, q_{2\max}]$, $P_3 = [q_{1\min}, q_{2\max}]$, $P_4 = [q_{1\max}, q_{2\min}]$. Коэффициенты $\alpha_i(t)$ в политопном представлении (26) имеют следующий вид:

$$\alpha_1(t) = \frac{(q_{1\max} - q_1(t))(q_{2\max} - q_2(t))}{(q_{2\max} - q_{2\min})(q_{1\max} - q_{1\min})};$$

$$\alpha_2(t) = \frac{(q_1(t) - q_{1\min})(q_2(t) - q_{2\min})}{(q_{2\max} - q_{2\min})(q_{1\max} - q_{1\min})};$$

$$\alpha_3(t) = \frac{(q_{1\max} - q_1(t))(q_2(t) - q_{2\min})}{(q_{2\max} - q_{2\min})(q_{1\max} - q_{1\min})};$$

$$\alpha_4(t) = \frac{(q_1(t) - q_{1\min})(q_{2\max} - q_2(t))}{(q_{2\max} - q_{2\min})(q_{1\max} - q_{1\min})}.$$

Для размещения полюсов замкнутой системы в область $S(\alpha, r, \theta)$ зададим $\alpha = 5$, $r = 13$, $\theta = \pi/4$. Уровень гашения возмущения возьмем $\gamma = 0,1$. Тогда матрицы коэффициентов регуляторов в вершинах политопа равны

$$K_1 = \begin{bmatrix} -75,88 & 0 & -17,47 & -0,79 \\ 0 & -75,88 & 1,46 & -17,47 \end{bmatrix};$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -75,88 & 0 & -17,47 & 0,79 \\ 0 & -75,88 & -1,46 & -17,47 \end{bmatrix};$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -75,88 & 0 & -17,47 & 0,79 \\ 0 & -75,88 & -1,46 & -17,47 \end{bmatrix};$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -75,88 & 0 & -17,47 & -0,79 \\ 0 & -75,88 & 1,46 & -17,47 \end{bmatrix}.$$

Промоделируем два режима работы СП. Первый режим: приведение угловых положений платформы в нулевые значения: $q_d(t) = [0 \ 0]^T$. В качестве начальных значений приняты $\varphi_{10} = 0^\circ$, $\varphi_{20} = 6^\circ$. Результаты моделирования замкнутой системы с синтезированным регулятором показаны на рис. 3, 4.

На рис. 5 показаны результаты моделирования замкнутой системы при варьировании значений элементов тензора инерции J_2 . Взяты три значения тензора инерции $J_2 = J_2 + \delta$ при $\delta = -0,3; 0; 0,3$. Видно, что синтезированный регулятор обеспечивает достаточно хорошую робастность замкнутой системы управления в присутствии параметрических неопределенностей.

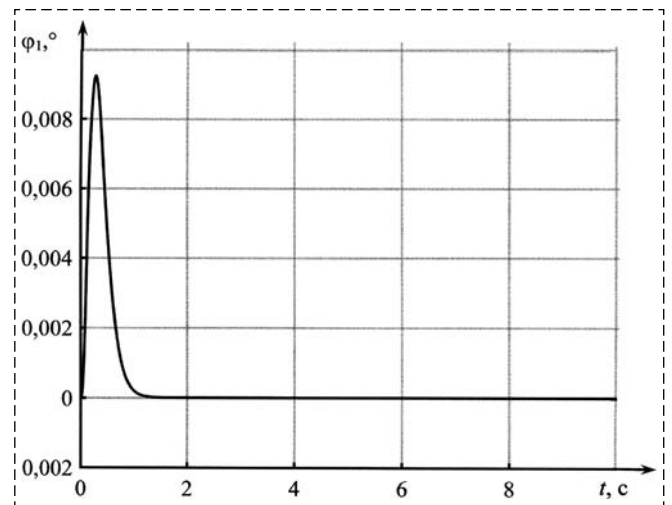


Рис. 3. Ошибка по углу φ_1

Fig. 3. Graph on the φ_1 angle tracking error

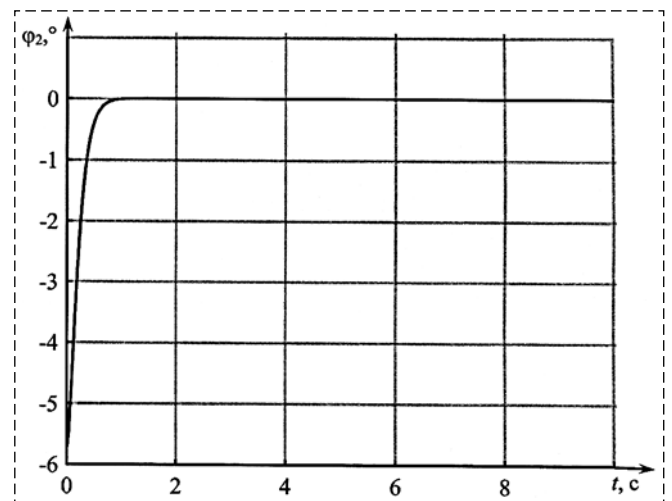


Рис. 4. Ошибка по углу φ_2

Fig. 4. Graph on the φ_2 angle tracking error

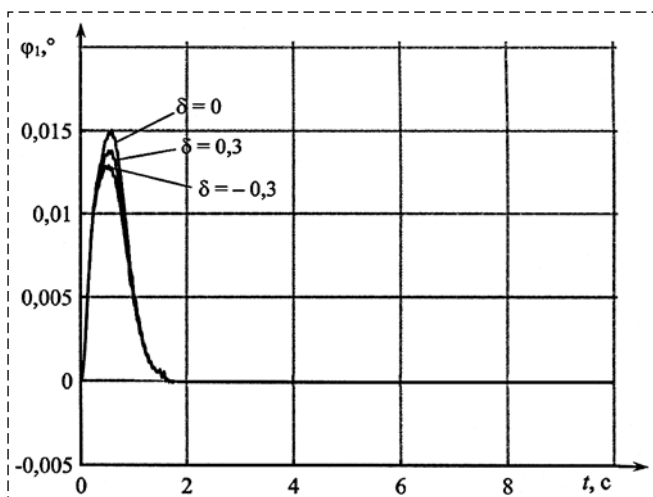


Рис. 5. Ошибка по углу φ_1 при варьировании элементов матрицы J_2
Fig. 5. Graph on the φ_1 angle tracking error in the presence of matrix J_2 perturbations

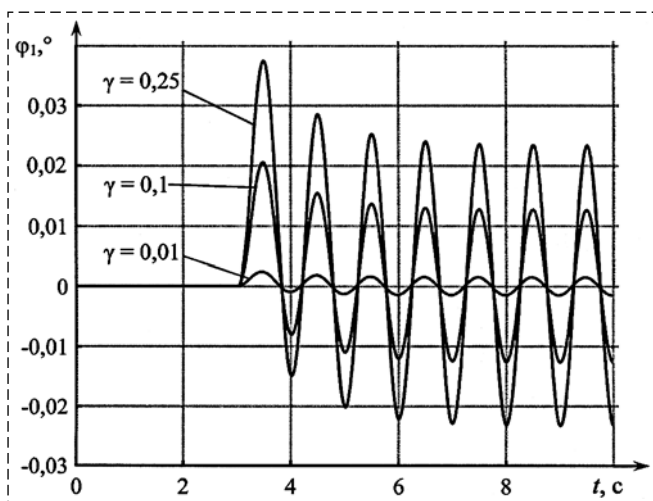


Рис. 6. Ошибка по углу φ_1 при подавлении возмущающего момента
Fig. 6. Graph on the φ_1 angle tracking error in the presence of disturbance torque

Второй режим — это стабилизация угловой скорости СП при действии на систему возмущающих моментов. На рис. 6 показаны результаты применения субоптимальных H_∞ -регуляторов по углу φ_1 для гашения возмущающего момента $\tau_e(t) = -0,05\sin 2\pi(t - t_0)$ при $\gamma = 0,01; 0,1; 0,25$. Возмущающий сигнал подается в момент времени $t_0 = 3$ с.

Заключение

В работе предложена методика многокритериального синтеза робастного закона управления нелинейной механической системы,

описываемой уравнениями Лагранжа второго рода. Показано, что лагранжева система может быть адекватно представлена в виде квазилинейной параметрической модели. Процедура синтеза сведена к технике выпуклой оптимизации при ограничениях, выраженных в форме ЛМН, выполнение которых обеспечивает устойчивость замкнутой системы, гашение внешних возмущений и желаемое качество переходных процессов. Так как квазилинейная параметрическая система непрерывно зависит от вектора параметров, то система ЛМН получается бесконечномерной. Эта бесконечномерная система сведена к конечному числу ЛМН с использованием политопного представления параметрической модели.

Приведен пример синтеза системы стабилизации и наведения линии визирования оптико-электронной системы (ОЭС), закрепленной на двухосной стабилизированной платформе. Синтезированная система стабилизации и наведения линии визирования ОЭС промоделирована в системе MATLAB. Результаты моделирования подтвердили робастность и достаточно высокое качество синтезированного закона управления.

Список литературы

1. Зенкевич С. Л., Ющенко А. С. Управление роботами. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.
2. Ortega R., Loria A., Nicklasson P. J., Sira-Ramirez H. Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems. London: Springer Verlag, 1998.
3. Поляк Б. Т., Шербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
4. Методы робастного, нейронеточного и адаптивного управления / Под ред. Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.
5. Basar T., Bernhard P. H_∞ -Optimal Control and Related Minimax Problems. Berlin: Birkhauser, 1990.
6. Briat C. Linear parameter-varying and time delay systems. Analysis, observation, filtering & control. Berlin: Springer Verlag, 2015.
7. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2006.
8. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1972.
9. Chilali M., Gahinet P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach // IEEE Trans. Aut. Contr, 1996. Vol. 41, N. 3. P. 358–367.
10. Apkarian P., Gahinet P., Becker G. Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example // Automatica, 1995. Vol. 31, N. 9. P. 1251–1261.
11. Бородин В. М., Спиридонов И. О., Файзутдинов Р. Н. Анализ динамики системы пассивной стабилизации линии визирования с четырехосным кардановым подвесом // Изв. вузов. Авиационная техника. 2016. Т. 59, № 4. С. 38–45.
12. Yu Z., Chen H., Woo P. Gain scheduled LPV H_∞ control based on LMI approach for a robotic manipulator // Journal of Robotic Systems. 2002. Vol. 19, N. 12. P. 585–593.

Multiobjective Robust Controller Synthesis for Nonlinear Mechanical System

G. L. Degtyarev, gldegtyarev@mail.ru, R. N. Faizutdinov, rustemfn@gmail.com,

I. O. Spiridonov, igor.georg.2@gmail.com,

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev, 420111, Kazan, Russian Federation

Corresponding author: **Degtyarev Gennadii L.**, D. Sc., Head of Automation and Control Department, Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev, 420111, Kazan, Russian Federation, e-mail: gldegtyarev@mail.ru

Accepted on August 07, 2018

Abstract

In the paper multiobjective robust controller synthesis problem for nonlinear mechanical system described by Lagrange's equations of the second kind is considered. Such tasks have numerous practical applications, for example in controller design of robotic systems and gyro-stabilized platforms. In practice, we often have to use uncertain mathematical plant models in controller design. Therefore, ensuring robustness in presence of parameters perturbations and unknown external disturbances is an important requirement for designed systems. Much of modern robust control theory is linear. When the actual system exhibits nonlinear behavior, nonlinearities are usually included in the uncertainty set of the plant. A disadvantage of this approach is that resulting controllers may be too conservative especially when nonlinearities are significant. The nonlinear H_∞ optimal control theory developed on the basis of differential game theory is a natural extension of the linear robust control theory. Nonlinear theory methods ensure robust stability of designed control systems. However, to determine nonlinear H_∞ -control law, the partial differential equation have to be solved which is a rather complicated task. In addition, it is difficult to ensure robust performance of controlled processes when using this method. In this paper, methods of linear parameter-varying (LPV) systems are used to synthesize robust control law. It is shown, that Lagrange system may be adequately represented in the form of quasi-LPV model. From the computational point of view, the synthesis procedure is reduced to convex optimization techniques under constraints expressed in the form of linear matrix inequalities (LMIs). Measured parameters are incorporated in the control law, thus ensuring continuous adjustment of the controller parameters to the current plant dynamics and better performance of control processes in comparison with H_∞ -regulators. Furthermore, the use of the LMIs allows to take into account the transient performance requirements in the controller synthesis. Since the quasi-LPV system depends continuously on the parameter vector, the LMI system is infinite-dimensional. This infinite-dimensional system is reduced to a finite set of LMIs by introducing a polytopic LPV representation. The example of multiobjective robust control synthesis for electro-optical device's line of sight pointing and stabilization system suspended in two-axes inertially stabilized platform is given.

Keywords: multiobjective synthesis, robust controller, nonlinear mechanical system, polytopic model, linear matrix inequalities

Acknowledgements: This article was financially supported by the Ministry of education and science of the Russian Federation within the framework of the state task of subordinate educational institutions (project code 8.3974.2017/4.6)

For citation:

Degtyarev G. L., Faizutdinov R. N., Spiridonov I. O. Multiobjective Robust Controller Synthesis for Nonlinear Mechanical System, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 11, pp. 691–698.

DOI: 10.17587/mau.19.691-698

References

1. Zenkevich S. L., Yushchenko A. S. *Upravleniye robotami. Osnovy upravleniya manipulyatsionnymi robotami* (Foundation of Control of Robot Manipulators), Moscow, Publishing house of MSTU named after N. E. Bauman Publ., 2000 (in Russian).
2. Ortega R., Loria A., Nicklasson P. J., Sira-Ramirez H. *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*, London, Springer Verlag, 1998.
3. Polyak B. T., Shcherbakov P. S. *Robastnaya ustoychivost' i upravleniye*. (Robust stability and control), Moscow, Nauka, 2002 (in Russian).
4. Egupov N. D. (ed.). *Metody robastnogo, neyro-nechetkogo i adaptivnogo upravleniya* (Methods of Robust, Neuro-fuzzy and Adaptive control), Moscow, Publishing house of MSTU named after N. E. Bauman Publ., 2002 (in Russian).
5. Basar T., Bernhard P. *H_∞ -Optimal Control and Related Minimax Problems*, Berlin, Birkhauser, 1990.
6. Briat C. *Linear parameter-varying and time delay systems. Analysis, observation, filtering & control*, Berlin, Springer Verlag, 2015.
7. Balandin D. V., Kogan M. M. *Sintez zakonov upravleniya na osnove lineinykh matrichnykh neravenstv* (Synthesis of Control Laws on the Basis of Linear Matrix Inequalities), Moscow, Fizmatlit, 2006 (in Russian).
8. Beseckerskij V. A., Popov E. P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* (The Theory of Automatic Control Systems), Moscow, Nauka, 1975 (in Russian).
9. Chilali M., Gahinet P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1996, vol. 41, no. 3, pp. 358–367.
10. Apkarian P., Gahinet P., Becker G. Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example, *Automatica*, 1995, vol. 31, no. 9, pp. 1251–1261.
11. Borodin V. M., Spiridonov I. O., Faizutdinov R. N. Analysis of Dynamics of a Passive Line-of-sight Stabilization System with Four-axis Gimbal Suspension, *Izv. Vuz. Av. Tekhnika*, 2016, vol. 59, no. 4, pp. 38–45. [Russian Aeronautics (Engl. Transl.), vol. 59, no. 4, pp. 480–488].
12. Yu Z., Chen H., Woo P. Gain scheduled LPV H_∞ control based on LMI approach for a robotic manipulator, *Journal of Robotic Systems*, 2002, vol. 19, no. 12, pp. 585–593.