

А. В. Яскевич, канд. техн. наук, нач. отдела, Andrey.Yaskevich@rsce.ru,  
ПАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С. П. Королева"

## Уравнения динамики стыковочных механизмов. Часть 2. Алгоритмы для кинематических контуров\*

*Рассматривается методика составления уравнений динамики механизмов для стыковки космических аппаратов. Она основана на преобразовании исходной структуры механической системы к древовидной на основе замены отдельных шарниров уравнениями связей в обратной последовательности, начиная с внешнего контура с максимальным номером. Решение этих уравнений методом разделения переменных осуществляется в прямой последовательности, начиная с первого контура, а редукция уравнений динамики преобразованной механической системы — вновь в обратной последовательности. Это позволяет описать движение произвольных механизмов данного класса.*

**Ключевые слова:** космический аппарат, стыковочный механизм, уравнения динамики, уравнения связей, метод разделения обобщенных координат

### Введение

Стыковочные механизмы (СтМ) космических аппаратов (КА), обеспечивающие их сцепку, поглощение кинетической энергии относительно движения и стягивание стыковочных интерфейсов, являются параллельными механизмами (ПМ) [1] с полностью замкнутой или частично "открытой" кинематической схемой. Их параллельные кинематические цепи (КЦ) образуют кинематические контуры, в которых все тела являются одновременно и предшествующими, и последующими. При составлении уравнений динамики (УД) механической системы (МС) ограничения на движения двух смежных тел КЦ, соединенных шарниром, могут учитываться явно в виде уравнений связей относительно координат, скоростей и ускорений или неявно — в виде рекуррентных кинематических соотношений (РКС), которые являются решением этих уравнений. Из-за отсутствия в кинематических контурах исходных и терминальных тел описать их, используя только РКС, невозможно. Поэтому эти контуры "размыкаются", т. е. отдельные или все их шарниры замещаются уравнениями связей. В результате исходная МС заменяется преобразованной. Если замещаются все шарниры, т. е. все уравнения связей учитываются в явном виде, то положение каждого тела определяется его координатами относительно неподвижного основания, а динамика МС описывается уравнениями Лагранжа 1-го рода. В этом случае уравнения связей составляются для отдельных тел, а не КЦ, и определяются более короткими математическими выражениями, а структура связей может быть произвольной. Однако при этом размерность системы УД является максимальной [2—4 и др.]. Если в контурах замещаются только отдельные шарниры, то большая часть уравнений связей учитывается неявно путем применения РКС для преобразованной МС, которая имеет древовидную структуру. Оставшиеся уравнения связей называются контурными, и они также могут учитываться в УД в явном или неявном виде.

Если кинематические, т. е. алгебраические, уравнения контурных связей учитываются в явном виде, то они объединяются с УД преобразованной МС в систему дифференциально-алгебраических уравнений (СДАУ) и обуславливают ее вырожденность, т. е. усложнение схем численного интегрирования. Мера этой вырожденности характеризуется индексом СДАУ, значение которого указывает на сложность обеспечения стабильности и точности решения. В системах с индексом 3 или 2 объединяются соответственно ускорения и координаты, ускорения и скорости, т. е. фактически различные неизвестные переменные. Их решение основано на приведении к одному составу неизвестных на основе той или иной схемы дискретизации, лежащей в основе неявной схемы численного интегрирования, например BDF-методов [5—8 и др.]. В СДАУ с индексом 1 неизвестными являются только обобщенные ускорения. В этом случае устойчивость решения обеспечивается более простым способом, например, использованием неявного метода интегрирования Эйлера, как, например, в работе [4], или введением в УД стабилизирующих сил, пропорциональных ошибкам и их производным в уравнениях связей [2, 9, 10]. Но в последнем случае введенные искусственные осцилляторы усложняют вид уравнений связей, вносят в систему несуществующие частоты и требуют экспертной настройки параметров, обеспечивающих устойчивость решения. Размерность СДАУ даже при частичном замещении шарниров превышает число степеней свободы исходной МС. Применение рекуррентных УД [11] не приводит к увеличению вычислительной эффективности из-за усложнения алгоритма расчета ускорений с учетом контуров. При этом уравнения остаются дифференциально-алгебраическими и состав их переменных не изменяется.

При неявном учете уравнений контурных связей используется их решение, т. е. выражение зависимых переменных через независимые. На его основе получаются УД в замкнутой форме минимальной размерности, равной числу степеней свободы исходной МС. Одной из первых в этом направлении была работа [12], в которой решения уравнений связей для координат и скоростей позволили определить энергию МС только через независимые переменные, после чего были использованы уравнения Лагранжа 2-го рода. Но УД в замкнутой форме относительно полного набора шар-

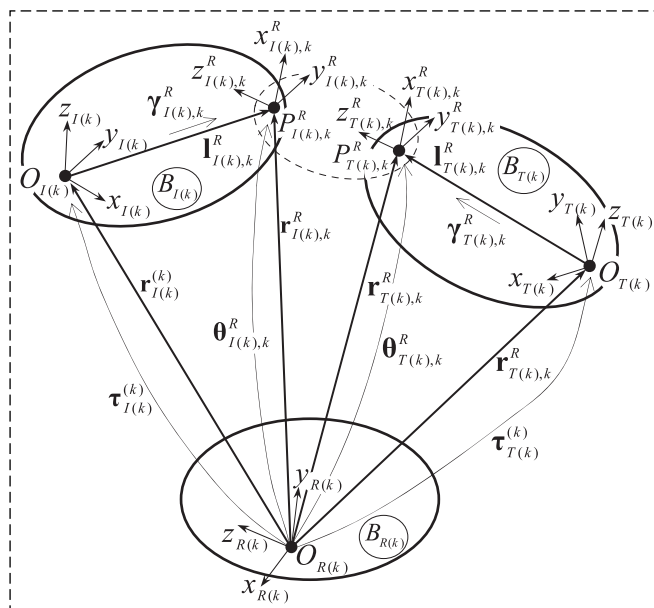
\* Часть 1 опубликована в журнале "Мехатроника, автоматизация, управление", 2018, Т.19, № 1.

нирных переменных преобразованной МС могут быть получены с помощью более эффективных алгоритмов, не основанных на данном формализме. Метод разделения обобщенных координат, предложенный в работе [13], позволяет редуцировать матрицу обобщенной инерции и вектор обобщенных сил вне зависимости от вида определяющих их математических выражений на основе решения уравнений связей для ускорений. В результате вместо СДАУ движение МС описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений минимальной размерности, увеличивается инерция, приведенная к степеням свободы, и, соответственно, устойчивость численного интегрирования УД. Естественно, метод разделения переменных применим только в случае существования решения уравнений контурных связей, т. е. при отсутствии у МС сингулярных конфигураций. Во многих случаях эта проблема может быть решена изменением состава независимых переменных. Метод разделения обобщенных координат [13] наилучшим образом подходит для моделирования МС СтМ с числом тел, значительно превышающим число степеней подвижности, с фиксированным составом независимых и зависимых переменных, с ограниченным числом вариантов зависимых КЦ и отсутствием сингулярных конфигураций. В данной работе рассматривается его модификация, позволяющая относительно просто учесть все возможные в классе СтМ варианты образования кинематических контуров.

### Условия замыкания контуров для замещаемых шарниров

Здесь и далее используются обозначения, введенные в первой части этой работы [14]. Каждое  $j$ -е тело МС может содержать дополнительно к ранее введенным характерным точкам (ХТ) центры  $P_{j,k}^R$  замещаемых шарниров  $k$ -го контура (см. рисунок).

Обозначения векторов и матриц, описывающих взаимное расположение систем координат (СК)  $x_{R(k)}y_{R(k)}z_{R(k)}$  корневого тела  $B_{R(k)}$   $k$ -го контура на независимой ветви, СК  $x_{I(k)}y_{I(k)}z_{I(k)}$  тела  $B_{I(k)}$ , замыкающего контур на независимой ветви, и СК  $x_{T(k)}y_{T(k)}z_{T(k)}$  тер-



Геометрия тел, замыкающих  $k$ -й кинематический контур

минального тела  $B_{T(k)}$   $k$ -й зависимой ветви соответствуют принятой ранее нотации и не поясняются. В центрах  $P_{I(k)}^R$  и  $P_{T(k)}^R$  замещаемых шарниров тел  $B_{I(k)}$  и  $B_{T(k)}$  определяются локальные СК  $x_{I(k),k}^R, y_{I(k),k}^R, z_{I(k),k}^R$  и  $x_{T(k),k}^R, y_{T(k),k}^R, z_{T(k),k}^R$ .

Особенности КЦ СтМ, рассмотренные в первой части работы, определяют условия замыкания кинематических контуров, в таблице описания которых каждая  $k$ -я строка содержит номер  $R(k)$  корневого тела контура, номер  $F(k)$  первого и  $T(k)$  терминального тел в простой КЦ зависимой ветви, номер  $I(k)$  тела в независимой ветви, замыкающего контур, и тип замещаемого шарнира. Номер замещаемого шарнира равен номеру контура, номеру зависимой ветви и номеру строки в таблице описания контуров. Нумерация начинается с внутренних контуров и заканчивается внешними. Их размыкание выполняется в обратной последовательности, начиная с контура с максимальным номером.

Если замещается  $k$ -й вращательный шарнир с тремя степенями подвижности (число налагаемых связей равно  $m_k = 3$ ), то условия замыкания  $k$ -го контура для координат, скоростей и ускорений отражают совмещение центров этого шарнира в соединяемых им телах  $B_{T(k)}$  в  $k$ -й зависимой ветви и  $B_{I(k)}$  в независимой ветви:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{k,1} &= \mathbf{r}_{T(k),k}^{R(R(k))} - \mathbf{r}_{I(k),k}^{R(R(k))} = \mathbf{0}; \\ \dot{\mathbf{f}}_{k,1} &= \mathbf{v}_{T(k),k}^{R(R(k))} - \mathbf{v}_{I(k),k}^{R(R(k))} = \mathbf{0}; \\ \ddot{\mathbf{f}}_{k,1} &= \dot{\mathbf{v}}_{T(k),k}^{R(R(k))} - \dot{\mathbf{v}}_{I(k),k}^{R(R(k))} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}_{T(k),k}^{R(R(k))}$ ,  $\mathbf{r}_{I(k),k}^{R(R(k))}$ ,  $\mathbf{v}_{T(k),k}^{R(R(k))}$ ,  $\mathbf{v}_{I(k),k}^{R(R(k))}$ ,  $\dot{\mathbf{v}}_{T(k),k}^{R(R(k))}$ ,  $\dot{\mathbf{v}}_{I(k),k}^{R(R(k))}$  — векторы положений, скоростей и ускорений точек  $P_{T(k),k}^R$  и  $P_{I(k),k}^R$  в СК  $x_{R(k)}y_{R(k)}z_{R(k)}$ ;  $\mathbf{f}_k$  —  $(3 \times 1)$ -мерная вектор-функция.

Дополнительные условия замыкания контуров для зависимых КЦ вида  $R_2R_2R_2$ ,  $R_3P_1R_2$ ,  $R_1R_3R_2$  с замещением вращательного шарнира с двумя степенями подвижности ( $m_k = 4$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} f_{k,2} &= \theta_{T(k),k}^R(2) \cdot \theta_{I(k),k}^R(3) = 0; \\ \dot{f}_{k,2} &= \mathbf{n}_{R,k}^* \cdot (\boldsymbol{\omega}_{T(k)}^{(R(k))} - \boldsymbol{\omega}_{I(k)}^{(R(k))}) = 0; \\ \ddot{f}_{k,2} &= \mathbf{n}_{R,k}^{*T} \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{T(k)}^{(R(k))} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{I(k)}^{(R(k))}) + \\ &+ \dot{\mathbf{n}}_{R,k}^{*T} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{T(k)}^{(R(k))} - \boldsymbol{\omega}_{I(k)}^{(R(k))}) = 0, \end{aligned}$$

где  $\theta_{T(k),k}^R(2)$ ,  $\theta_{I(k),k}^R(3)$  — вторая и третья вектор-строки соответствующих матриц;  $\mathbf{n}_{R,k}^* = \theta_{T(k),k}^R(2) \times \theta_{I(k),k}^R(3)$  — единичный вектор в СК  $x_{R(k)}y_{R(k)}z_{R(k)}$  оси, относительно которой вращение в шарнире невозможно;

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}}_{R,k}^* &= (\boldsymbol{\omega}_{T(k)}^{(R(k))} \times \theta_{T(k),k}^R(2)) \times \theta_{I(k),k}^R(3) + \\ &+ \theta_{T(k),k}^R(2) \times (\boldsymbol{\omega}_{I(k)}^{(R(k))} \times \theta_{I(k),k}^R(3)) \end{aligned}$$

— производная этого вектора, изменяющего ориентацию в процессе движения.

Однако в цепях  $R_2R_2R_2$  трудно реализовать устройства, создающие активные моменты (привод, демпфер или пружинный механизм), а в цепях  $R_3P_1R_2$  и  $R_1R_3R_2$ , эквивалентных  $R_2P_1R_3$  и  $R_1R_2R_3$ , движение управляемого тела ограничено шарниром с меньшей подвижностью, чем в шарнире у основания, что нелогично и увеличивает приведенную к этому телу инерцию зависимой ветви. Поэтому зависимые КЦ, в которых  $m_k = 4$ , далее в этой работе не рассматриваются.

Условия (1) замыкания  $k$ -го контура преобразуются в уравнения контурных связей относительно полного вектора  $\ddot{\mathbf{p}}$  шарнирных ускорений преобразованной МС:

$$\hat{\mathbf{T}}_{T(k),k}^{R(R(k))} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{w}_{T(j),k}^{R(R(k))} - \hat{\mathbf{T}}_{I(k),k}^{R(R(k))} \ddot{\mathbf{p}} - \mathbf{w}_{I(k),k}^{R(R(k))} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

в которых  $(3 \times n)$ -мерные матрицы парциальных скоростей  $\hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{R(R(k))}$  ХТ  $P_{j,k}^R$  относительно СК  $x_{R(k),k}, y_{R(k),k}, z_{R(k),k}$ , а также  $(3 \times 1)$ -мерные векторы  $\mathbf{w}_{j,k}^{R(R(k))}$  ( $j \in \{T(k), R(k)\}$ ) ускорений этих ХТ, нелинейно зависящих от шарнирных скоростей, вычисляются по обычным РКС. Первые  $R(k)$  столбцов матриц парциальных скоростей являются нулевыми, а векторы угловых скоростей и нелинейных составляющих ускорений не зависят от шарнирных скоростей  $\dot{p}_k$ ,  $k \leq R(k)$ . Если корневым телом контура является основание механизма, то  $R(k) = 0$ .

Для плоских контуров ( $m_k = 2$ ) определены аналоги пространственных векторно-матричных операций, и уравнения связей имеют вид, аналогичный (2).

### Последовательное формирование и решение уравнений контурных связей

Особенность применения в данной работе метода, предложенного в статье [13], состоит в последовательном определении зависимых переменных каждого очередного контура, начиная с последнего, через все шарнирные переменные с меньшими номерами, в том числе через шарнирные переменные еще не рассмотренных контуров. Это позволяет использовать один несложный алгоритм для всех возможных вариантов структур СтМ. В частности, можно учесть наличие внутренних кинематических контуров у зависимых направляющих КЦ.

В обратной последовательности для каждого  $k$ -го контура, начиная с последнего ( $k = \overline{K}, 1$ ), в символьном виде формируются  $(m_k \times 1)$ -мерный вектор  $\mathbf{p}_k^{(d)}$ , содержащий шарнирные переменные его зависимой ветви, и  $(n_k \times 1)$ -мерный вектор  $\mathbf{p}_k^{(i)}$ , состоящий из всех условно независимых  $n_k$  шарнирных переменных с меньшими номерами  $\left( n_k = n - \sum_{i=1}^k m_i \right)$ :

$$\mathbf{p}_k^{(d)}(i) = \mathbf{p}(n_k - m_k + i), \quad i = \overline{1, m_k};$$

$$\mathbf{p}_k^{(i)}(i) = \mathbf{p}(i), \quad i = \overline{1, n_k}.$$

Уравнения (2) контурных связей для ускорений  $k$ -го контура записываются в виде

$$\mathbf{C}_k^{(d)} \ddot{\mathbf{p}}_k^{(d)} = \mathbf{C}_k^{(i)} \ddot{\mathbf{p}}_k^{(i)} + \mathbf{c}_k, \quad (3)$$

где для  $m_k = 3$  и  $m_k = 2$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k^{(d)}(i, j) &= \hat{\mathbf{T}}_{T(k),k}^{R(R(k))}(i, n_k - m_k + j); \\ \mathbf{C}_k^{(i)}(i, j) &= \hat{\mathbf{T}}_{I(k),k}^{R(R(k))}(i, j); \\ \mathbf{c}_k(i) &= \mathbf{w}_{I(k),k}^{R(R(k))}(i) - \mathbf{w}_{T(j),k}^{R(R(k))}(i), \end{aligned} \quad (4)$$

$i = \overline{1, m_k}$ ,  $j = \overline{1, m_k}$  для  $\mathbf{C}_k^{(d)}$  и  $j = \overline{1, n_k - m_k}$  для  $\mathbf{C}_k^{(i)}$ .

Матрицы  $\mathbf{C}_k^{(d)}$ ,  $\mathbf{C}_k^{(i)}$  и вектор  $\mathbf{c}_k$  также формируются в символьном виде.

Решение уравнений контурных связей выполняется в прямой последовательности, т. е. от первого кон-

тура к последнему ( $k = \overline{1, K}$ ). Для шарнирных скоростей и ускорений  $k$ -го контура оно имеет вид

$$\dot{\mathbf{p}}_k^{(d)} = [\mathbf{C}_k^{(d)}]^{-1} \mathbf{C}_k^{(i)} \dot{\mathbf{p}}_k^{(i)} = \mathbf{H}_k \dot{\mathbf{p}}_k^{(i)}, \quad (5)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_k^{(d)} = [\mathbf{C}_k^{(d)}]^{-1} (\mathbf{C}_k^{(i)} \ddot{\mathbf{p}}_k^{(i)} + \mathbf{c}_k) = \mathbf{H}_k \ddot{\mathbf{p}}_k^{(i)} + \mathbf{h}_k, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{H}_k = [\mathbf{C}_k^{(d)}]^{-1} \mathbf{C}_k^{(i)}, \quad (7)$$

$$\mathbf{h}_k = [\mathbf{C}_k^{(d)}]^{-1} \mathbf{c}_k, \quad (8)$$

$\mathbf{C}_k^{(d)} = \partial \mathbf{f}_k / \partial \mathbf{p}_k^{(d)} = \partial \dot{\mathbf{f}}_k / \partial \dot{\mathbf{p}}_k^{(d)} = \partial \ddot{\mathbf{f}}_k / \partial \ddot{\mathbf{p}}_k^{(d)}$  —  $(m_k \times m_k)$ -мерная матрица,  $\mathbf{H}_k$  и  $\mathbf{C}_k^{(i)}$  —  $(m_k \times (n_k - m_k))$ -мерные матрицы;  $\mathbf{h}_k$  и  $\mathbf{c}_k$  —  $(m_k \times 1)$ -мерные векторы.

Значения зависимых шарнирных координат в общем случае могут быть определены итерационным методом Ньютона:

$$\mathbf{p}_k^{(d), i+1} = \mathbf{p}_k^{(d), i} - [\mathbf{C}_k^{(d)}]^{-1} \mathbf{f}_k^{(d), i}, \quad (9)$$

что требует многократного вычисления тригонометрических функций углов в шарнирах и обращения матрицы  $\mathbf{C}_k^{(d)}$ .

### Аналитическое решение уравнений контурных связей для координат

Для ограниченного числа типов зависимых ветвей контуров СтМ, рассмотренных в первой части работы [14], могут быть получены аналитические решения уравнений связей относительно координат, позволяющие исключить итерационную процедуру и сократить объем вычислений. Для всех зависимых КЦ предполагаются известными:

- положение в СК  $x_{R(k)}, y_{R(k)}, z_{R(k)}$  корневого тела  $R(k)$  центра первого шарнира вращения зависимой ветви  $k$ -го контура, т. е. вектор  $\mathbf{l}_{R(k), F(k)}^{(R(k))}$ , где  $F(k)$  — номер первого звена зависимой ветви;
- положение в СК  $x_{R(k)}, y_{R(k)}, z_{R(k)}$  центра  $P_{I(k)}^R$  замещенного шарнира на звене  $I(k)$  независимой ветви, т. е. вектор  $\mathbf{r}_{I(k), k}^{(R(k))}$ .

Для пространственных зависимых КЦ типа  $R_2 P_1 R_3$  и  $R_2 C_2 R_2$  длина  $L_{0, k}$  зависимой КЦ в исходном положении (ИП) определяется как модуль вектора  $\mathbf{L}_k^{(R(k))} = [L_k, m_k, n_k]^T = \mathbf{r}_{I(k), k}^{(R(k))} - \mathbf{l}_{R(k), F(k)}^{(R(k))}$ . Длина  $L_k = \sqrt{L_k^2 + m_k^2 + n_k^2}$  этого же вектора, вычисляемая в произвольном допустимом положении механизма, позволяет определить относительное перемещение в поступательном шарнире  $p_{k, 3} = L_k - L_{0, k}$ , а проекции этого вектора на оси СК первого шарнира  $\mathbf{L}_k^{(F(k))} = [L_{k, x}^{(F(k))}, L_{k, y}^{(F(k))}, L_{k, z}^{(F(k))}]^T = \gamma_{R(k), F(k)} \mathbf{L}_k^{(R(k))}$  — тригонометрические функции углов  $p_{k, 1}$  и  $p_{k, 2}$  с учетом того, что при отклонениях СтМ от ИП  $|p_{k, 1}| < 90^\circ$ ,  $|p_{k, 2}| < 90^\circ$

$$\text{ctg } p_{k, 1} = -L_{k, x}^{(F(k))} / L_{k, z}^{(F(k))};$$

$$\sin p_{k, 1} = \frac{\text{sgn}(\text{ctg } p_{k, 1})}{\sqrt{1 + \text{ctg}^2 p_{k, 1}}}; \quad \cos p_{k, 1} = \sqrt{1 - \sin^2 p_{k, 1}};$$

$$\sin p_{k, 2} = L_{k, y}^{(F(k))} / L_k; \quad \cos p_{k, 2} = \sqrt{1 - \sin^2 p_{k, 2}}.$$

Для определения зависимых шарнирных координат необходимо вычислить разложением в ряд три математические функции, в то время как в решении (9) для КЦ  $R_2P_1R_3$  необходимо вычислять четыре математические функции на каждой итерации.

В цилиндрическом шарнире шток является телом только с центральными моментами инерции. Так как во втянутом положении он полностью входит в корпус цилиндра, то в нем отсутствуют геометрические особенности, требующие учета угла его разворота относительно продольной оси. При таком развороте не изменяются и его инерционные свойства относительно любой системы координат, в том числе и при приведении к телам независимой ветви механизма. Поэтому в уравнениях динамики и при решении уравнений связей кинематическая цепь  $R_2C_2R_2$  эквивалентна цепи  $R_2P_1R_3$ .

При определении шарнирных координат зависимой пространственной КЦ типа  $R_1R_2R_3$  дополнительно предполагается известным единичный вектор  $\mathbf{n}_{F(k)}^{P(R(k))} = [n_{F(k),x}^P, n_{F(k),y}^P, n_{F(k),z}^P]^T$  оси вращения ее первого шарнира. В ИП СтМ определяются параметры плоскости  $P_k$ , проходящей через центр этого шарнира нормально к  $\mathbf{n}_{F(k)}^{P(R(k))}$ , система координат  $x_{F(k)}^J, y_{F(k)}^J, z_{F(k)}^J$  и матрица преобразования  $\gamma_{R(k),F(k)}^J$ . Далее для упрощения записи решения центры первого, второго и третьего (замещаемого) шарниров обозначаются

точками  $O_{1,k} = (x_{1,k}, y_{1,k}, z_{1,k})$ ,  $O_{2,k} = (x_{2,k}, y_{2,k}, z_{2,k})$  и  $O_{3,k} = (x_{3,k}, y_{3,k}, z_{3,k})$ , где  $[x_{1,k}, y_{1,k}, z_{1,k}]^T = \mathbf{I}_{R(k),F(k)}^{(R(k))}$ ,  $[x_{3,k}, y_{3,k}, z_{3,k}]^T = \mathbf{r}_{I(k),k}^{(R(k))}$ . Проекция точки  $O_{3,k}$  на плоскость  $P_k$  обозначается  $O_{3,k}^P$ . Положительные величины  $l_{12,k}^P$ ,  $l_{23,k}^P$ ,  $l_{13,k}^P$  обозначают длины сторон треугольника  $O_{1,k}O_{2,k}O_{3,k}^P$  в этой плоскости, определяющие угол  $\varphi_{k,1}$  поворота от оси  $y_{F(k)}^J$  до продольной оси  $O_{1,k}O_{2,k}$  первого звена.

Кинематическая цепь  $R_1R_2R_3$  в ИП и в процессе функционирования СтМ может иметь две различные конфигурации, характеризующиеся различными знаками угла  $\varphi_{k,1}$ . Предполагается, что переход из одной в другую, связанный с прохождением через сингулярность, не реализуется. Принимается, что  $\varphi_{k,1} < 0$  соответствует первой из них, а  $\varphi_{k,1} > 0$  — второй. В произвольном положении КЦ  $R_1R_2R_3$  с учетом ее начальной конфигурации (знака угла  $\varphi_{k,1}$ ) последовательно вычисляются:

1) координаты  $x_{3,k}^P, y_{3,k}^P, z_{3,k}^P$  точки  $O_{3,k}^P$  в текущем положении механизма:

$$\begin{aligned} x_{3,k}^P &= x_{3,k} + hn_{k,x}^P, & y_{3,k}^P &= y_{3,k} + hn_{k,y}^P, \\ z_{3,k}^P &= z_{3,k} + hn_{k,z}^P, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} h &= -(n_{F(k),x}^P x_{3,k} + n_{F(k),y}^P y_{3,k} + n_{F(k),z}^P z_{3,k} - \\ &\quad - \mathbf{n}_{F(k)}^{(R(k))T} \mathbf{I}_{R(k),F(k)}^{(R(k))}); \end{aligned}$$

2) расстояния между точками  $O_{1,k}$ ,  $O_{3,k}^P$  и  $O_{2,k}$ ,  $O_{3,k}^P$  в плоскости  $P_k$ :

$$\begin{aligned} l_{13,k}^P &= \sqrt{(x_{k,3}^P - x_{k,1})^2 + (y_{k,3}^P - y_{k,1})^2 + (z_{k,3}^P - z_{k,1})^2}, \\ l_{23,k}^P &= \sqrt{l_{23,k}^2 - h^2}; \end{aligned}$$

3) тригонометрические функции шарнирной переменной  $p_{k,3}$ :

$$\sin p_{k,3} = h/l_{23}, \quad \cos p_{k,3} = \sqrt{1 - (\sin p_{k,3})^2};$$

4) тригонометрические функции шарнирной переменной  $p_{k,2}$ :

$$\begin{aligned} \cos p_{k,2} &= -\frac{l_{12}^2 + l_{23}^2 - l_{13}^2}{2l_{12}l_{23}}, \\ \sin p_{k,2} &= -\operatorname{sgn} \varphi_{k,1} \sqrt{1 - (\cos p_{k,2})^2}; \end{aligned}$$

5) тригонометрические функции угла  $\varphi_{k,3}$  поворота стороны  $O_{1,k}O_{3,k}^P$  до совмещения со стороной  $O_{1,k}O_{2,k}$  треугольника  $O_{1,k}O_{2,k}O_{3,k}^P$ :

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{k,3} &= -\frac{l_{12,k}^2 + l_{13,k}^2 - l_{23,k}^2}{2l_{12}l_{13}}, \\ \sin \varphi_{k,3} &= \operatorname{sgn} \varphi_{k,1} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{k,3}}; \end{aligned}$$

6) тригонометрические функции угла  $\varphi_{k,4}$  поворота оси  $y_k^P$  до совмещения со стороной  $O_{1,k}O_{3,k}^P$  треугольника  $O_{1,k}O_{2,k}O_{3,k}^P$ :

$$\sin \varphi_{k,4} = -x_{k,3}^P/l_{13,k}^P, \quad \cos \varphi_{k,4} = y_{k,3}^P/l_{13,k}^P;$$

7) тригонометрические функции шарнирной переменной  $p_{k,1}$  с учетом того, что  $p_{k,1} = 90 + \varphi_{k,1}$  и  $\varphi_{k,1} = \varphi_{k,3} + \varphi_{k,4}$ ,

$$\begin{aligned} \cos p_{k,1} &= -\sin \varphi_{k,1} = \\ &= -(\sin \varphi_{k,3} \cos \varphi_{k,4} + \cos \varphi_{k,3} \sin \varphi_{k,4}), \\ \sin p_{k,1} &= \cos \varphi_{k,1} = \cos \varphi_{k,3} \cos \varphi_{k,4} - \sin \varphi_{k,3} \sin \varphi_{k,4}. \end{aligned}$$

Если вращение первого звена ограничивается механическими упорами, то дополнительно вычисляется значение угла поворота

$$p_{k,1} = \arcsin(\sin p_{k,1}).$$

Всего необходимо вычислить разложением в ряд не более шести математических функций. При решении уравнений связей для ветви  $R_1R_2R_3$  в общем виде (9) такое число функций вычисляется за одну итерацию.

Аналитические решения уравнений контурных связей относительно шарнирных координат для других зависимых КЦ определяются аналогично.

### Редукция уравнений динамики в замкнутой форме

Уменьшение размерности матрицы обобщенной инерции и вектора обобщенных сил преобразованной МС проводится в обратной последовательности, начиная с последнего контура ( $k = K, 1$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^{(ii)} &= \mathbf{A}_k^{(ii)} + \mathbf{A}_k^{(id)} \mathbf{H}_k + (\mathbf{A}_k^{(id)} \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{H}_k^T \mathbf{A}_k^{(dd)} \mathbf{H}_k; \\ \mathbf{b}_k^{(i)} &= \mathbf{b}_k^{(i)} - \mathbf{A}_k^{(id)} \mathbf{h}_k + \mathbf{H}_k^T (\mathbf{b}_k^{(d)} - \mathbf{A}_k^{(dd)} \mathbf{h}_k), \end{aligned} \quad (10)$$

где верхние индексы  $i$  и  $d$  подматриц указывают на соответствие индексов их строк и столбцов независимым (условно независимым) или зависимым шарнирным переменным  $k$ -го контура.

Уравнения динамики ПМ после приведения к независимой ветви инерции и сил всех контуров имеют вид

$$\mathbf{A}_0^{(ii)} \ddot{\mathbf{p}}_0^{(i)} = \mathbf{b}_0^{(i)}, \quad (11)$$

где  $\ddot{\mathbf{p}}_0^{(i)}$  является вектором обобщенных ускорений ( $\ddot{\mathbf{p}}_0^{(i)} = \ddot{\mathbf{q}}$ ).

После решения этой системы линейных алгебраических уравнений относительно вектора  $\ddot{\mathbf{p}}_0^{(i)}$  в прямой последовательности, от первого контура к последнему ( $k = \overline{1, K}$ ) определяются зависимые шарнирные ускорения  $\ddot{\mathbf{p}}_k^{(d)}$  решением уравнений (4). Определенные таким образом шарнирные ускорения и скорости позволяют рассчитать обобщенные силы, действующие на зависимую ветвь  $k$ -го контура:

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{C}_k^{(d)\tau} \boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{b}_k^{(d)} - \mathbf{A}_k^{(id)\tau} \ddot{\mathbf{p}}_k^{(i)} - \mathbf{A}_k^{(d)} \ddot{\mathbf{p}}_k^{(d)}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Но эти векторы содержат значения сил и моментов, приведенных только к степеням подвижности. Поэтому силы и моменты, действующие на основание СтМ, определяются по алгоритму, рассмотренному в первой части работы, с использованием полных векторов  $\mathbf{p}$ ,  $\dot{\mathbf{p}}$ ,  $\ddot{\mathbf{p}}$ .

При расчете движения параллельного механизма на каждом шаге интегрирования последовательно вычисляются:

1) кинематика ХТ замещенных шарниров в независимой КЦ МС;

2) зависимые шарнирные координаты каждого контура, в прямой последовательности — сначала внешние контуры, потом внутренние ( $k = \overline{1, K}$ );

3) матрицы  $\hat{\mathbf{T}}_{T(k),k}^{R(R(k))}$  парциальных скоростей для ХТ замещаемых шарниров каждого контура, в прямой последовательности;

4) матрицы  $\mathbf{H}_k$  по соотношениям (4) и (7) в обратной последовательности — сначала внутренние контуры, потом внешние ( $k = \overline{K, 1}$ );

5) зависимые шарнирные скорости решением уравнений (5), в прямой последовательности ( $k = \overline{1, K}$ );

6) вектор  $\mathbf{h}_k$  по соотношениям (8), в прямой последовательности ( $k = \overline{1, K}$ );

7) матрицы  $\mathbf{A}_k^{(i)}$  и векторы  $\mathbf{b}_k^{(i)}$  (10), в обратной последовательности ( $k = \overline{K, 1}$ );

8) вектор независимых ускорений МС решением системы уравнений (11);

9) зависимые шарнирные ускорения по соотношениям (6), в прямой последовательности ( $k = \overline{1, K}$ );

10) силы и моменты, действующие на основание СтМ для всех тел преобразованной МС со структурой дерева.

Так как большинство зависимых КЦ не связано между собой непосредственно, то описанный выше подход приводит к формированию матриц  $\mathbf{C}_k^{(d)}$ ,  $\mathbf{C}_k^{(i)}$ ,  $\mathbf{H}_k$ ,  $\mathbf{A}_k^{(i)}$ ,  $\mathbf{A}_k^{(id)}$ ,  $\mathbf{A}_k^{(d)}$  с большим числом нулевых элемен-

тов. Избыточные вычисления с нулевыми операндами исключаются при реализации алгоритма в специализированной системе символьных преобразований.

## Заключение

Предложен последовательный способ формирования уравнений контурных связей и использования их решений для редукции УД в замкнутой форме преобразованной МС на основе метода разделения обобщенных координат. Он позволяет учитывать произвольные разновидности кинематических контуров в классе СтМ. Получено аналитическое решение уравнений контурных связей относительно координат для основных типов зависимых кинематических цепей.

## Список литературы

1. **ParalleMIC** — the Parallel Mechanisms Information Center. URL: <http://www.parallemic.org> (дата обращения: 04.09.2017)
2. **Бойков В. Г., Юдаков А. А.** Моделирование динамики систем твердых и упругих тел в программном комплексе EULER // Изв. РАН. Информационные технологии и вычислительные системы. 2001. № 1. С. 42—52.
3. **Горобцов А. С.** Формирование уравнений движения пространственной механической системы, содержащей кинематические цепи произвольной структуры // Машиностроение и инженерное образование. 2005. № 2. С. 46—54.
4. **Open Dynamic Engine.** Home page. URL: <http://www ode.org> (дата обращения: 04.09.2017).
5. **Petzold L. R.** Computational challenges in mechanical system simulation // Computer-Aided Analysis of rigid and flexible Mechanical Systems. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1994. P. 483—499.
6. **Pogorelov D.** Differential-algebraic equations in multibody system modeling // Numerical algorithms. 1998. Vol. 19. P. 183—194.
7. **Rampalli R., Vikram Sohoni V., Steigerwald M. F., Joseph F. McGrath J. F.** Numerical Methods in ADAMS Mechanical Simulation Code. Mechanical Dynamics, Inc., 1990. 14 P.
8. **Ibrahim Z. B., Suleiman M., Othman K. I.** Direct block backward differentiation formulas for solving second order ordinary differential equations // Int. Journal of Mathematical, Physical, Electrical and Computer Engineering, 2008. Vol. 2, N. 2. P. 260—262.
9. **Baumgarte J. W.** Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamic Systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1972. Vol. 1. P. 1—16.
10. **Горобцов А. С., Солоденков С. В.** Алгоритмы численного интегрирования уравнения движения систем тел с множителями Лагранжа // Машиностроение и инженерное образование. 2005. № 3. С. 20—27.
11. **Brandl H., Johanni R., Otter M.** An algorithm for the simulation of multibody systems with kinematical loops // Proc. of the 7th World Congress on The Theory of Machines and Mechanisms. Sevilla. 1987. Vol. 2. P. 407—411.
12. **Wicker J.** Dynamic behavior of spatial linkages: Exact equation of motion // Transaction of the ASME: Ser. B. 1969. Vol. 9, N. 1. P. 251—258.
13. **Wehage R. A., Haug J. E.** Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of dynamical systems // Journal of Mechanical Design 1982. N. 104. P. 247—255.
14. **Яскевич А. В.** Уравнения динамики стыковочных механизмов. Часть 1. Алгоритмы для механических систем со структурой дерева // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 1. С. 58—64.

# Dynamic Equations of Docking Mechanisms. Part 2. Algorithms for Kinematical Loops

A. A. Yaskevich, Andrey.Yaskevich@rsce.ru,

Rocket Space Corporation "Energia", Korolev, 141070, Russian Federation

Corresponding author: **Yaskevich Andrey V.**, Ph. D., Head of Department of Docking Systems,  
Rocket Space corporation "Energia", 141070, Korolev, Russian Federation,  
e-mail: Andrey.Yaskevich@rsce.ru

Accepted on September 19, 2017

From the point of view of a docking dynamical process, a multi-loop docking mechanism, in spite of its low mass, is a more complex mechanical system than a spacecraft. An approach providing high computational efficiency of dynamic simulation algorithms for such a class of mechanisms is considered in this paper. Before simulation, a multi-loop mechanical system is transformed to a tree structure using constrain equations instead of some joints. Each loop of a docking mechanism can be partitioned to a controlled and a dependent kinematical chains with independent and dependent joint variables, and constrain equations for its replaced joint are non-singular. This paper describes an application of the generalized coordinate partitioning method (GCPM), which specifies that dependent joint accelerations of the transformed mechanical system are expressed as a function of independent ones through matrixes, which are used to reduce the dimension of dynamic equations. All loops and dependent chains of a docking mechanism are numbered from outermost to innermost. In contrast to GCPM, constrain equations are formulated in the inverse sequence, i.e. starting with the maximum loop number, and for a current loop they incorporate all joint accelerations except previous loops. So, dependent joint accelerations of a current loop are expressed as a function of joint accelerations of all next loops. It allows reducing the dimension of dynamic equations regardless of various combinations of outer and inner kinematical loops of docking mechanisms. Redundant mathematical operations with zero matrix elements can be eliminated using symbolic manipulation system. For higher computational efficiency, analytical solutions of joint coordinates constrain equations are proposed for main types of dependent kinematical chains.

**Keywords:** spacecraft, docking mechanisms, dynamic equations, constrain equations, generalized coordinate partitioning method

For citation:

**Yaskevich A. A.** Dynamic Equations of Docking Mechanisms. Part 2. Algorithms for Kinematical Loops, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 2, pp. 139–144.

DOI: 10.17587/mau.19.139-144

## References

1. **ParalleMIC** — the Parallel Mechanisms Information Center. Available at: <http://www.parallemic.org> (date of access 04.09.2017).
2. **Bojkov V. G., Judakov A. A.** Modelirovanie dinamiki sistem tverdyh i uprugih tel v programmnom komplekse EULER (Dynamic simulation of rigid and flexible body systems using EULER software), *Izv. RAN. Informaci-onnye tehnologii i vychislitel'nye sistemy*, 2001, no. 1, pp. 42–52 (in Russian).
3. **Gorobcov A. S.** Formirovanie uravnenij dvizheniya prostranstvennoj mehanicheskoy sistemy, *soderzhashhej kinemachieskie cepi proizvol'noj struktury* (A generation of motion equations of mechanical system with arbitrary structure of kinematical chains), *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2005, no. 2, pp. 46–54 (in Russian).
4. **Open Dynamic Engine.** Home page. <http://www.ode.org> (date of access 04.09.2017).
5. **Petzold L. R.** Computational challenges in mechanical system simulation, *Computer-Aided Analysis of rigid and flexible Mechanical Systems*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1994, pp. 483–499.
6. **Pogorelov D.** Differential-algebraic equations in multibody system modeling, *Numerical Algorithms*, 1998, vol. 19, pp. 183–194.
7. **Rampalli R., Vikram Sohoni V., Steigerwald M. F., Joseph F. McGrath J. F.** Numerical Methods in ADAMS Mechanical Simulation Code, Mechanical Dynamics, Inc., 1990, 14 p.
8. **Ibrahim Z. B., Suleiman M., Othman K. I.** Direct block backward differentiation formulas for solving second order ordinary differential equations, *Int. Journal of Mathematical, Physical, Electrical and Computer Engineering*, 2008, Vol. 2, no. 2, pp. 260–262.
9. **Baumgarte J. W.** Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamic Systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1972, vol. 1, pp. 1–16.
10. **Gorobcov A. S., Solodnikov S. V.** Algoritmy chislennogo integrirvaniya uravneniya dvizheniya sistem tel s mnozhitel'nyimi Lagranzha (Numerical integration algorithms of body system motion equations with Lagrangian coefficients), *Mashinostroenie i Inzhenernoe Obrazovanie*, 2005, no. 3 pp. 20–27. (in Russian).
11. **Brandl H., Johanni R., Otter M.** An algorithm for the simulation of multibody systems with kinematical loops, *Proceedings of the 7th World Congress on The Theory of Machines and Mechanisms*, Sevilla, 1987, vol. 2, pp. 407–411.
12. **Wicker J.** Dynamic behavior of spatial linkages: Exact equation of motion, *Transaction of the ASME: Ser. B*, 1969, vol. 9, no. 1, pp. 251–258.
13. **Wehage R. A., Haug J. E.** Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of dynamical systems, *Journal of Mechanical Design*, 1982, no. 104, pp. 247–255.
14. **Yaskevich A. V.** Uravneniya dinamiki stykovykh mekhanizmov. Chast 1. Algoritmy dlja mehanicheskikh sistem s drevovidnoj strukturoj (A dynamic equations of docking mechanisms. Part 1. Algorithms for mechanical systems with tree structure), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 58–64 (in Russian).

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5397, тел./факс: (499) 269-5510

Технический редактор Е. В. Конова. Корректор З. В. Наумова.

Сдано в набор 24.11.2017. Подписано в печать 16.01.2018. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН218. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,  
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций  
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансд солюнзн". Отпечатано в ООО "Авансд солюнзн".  
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.