

С. В. Феофилов, д-р техн. наук, доц., svfeofilov@mail.ru, А. В. Козырь, аспирант, Kozyr_A_V@mail.ru, Тульский государственный университет, г. Тула

Анализ периодических движений в цифровых автоколебательных системах управления¹

Статья посвящена исследованию релейных систем с цифровым управлением. Автоколебания в таких системах являются рабочим режимом. Дискретизация по времени оказывает существенное влияние на параметры периодических колебаний. В работе предлагается точный метод анализа периодических режимов в цифровых автоколебательных системах управления с двухпозиционным релейным элементом. Предлагаемый подход распространяет метод фазового годографа на класс систем, работающих в дискретном времени. Представлен метод получения фазового годографа для случая автоколебательных систем с дискретизацией по времени и линейным объектом управления. В работе предлагается численно-аналитическая процедура построения семейства фазовых годографов дискретной релейной системы как в частотной области, так и во временной.

Данный подход позволяет выделить все возможные симметричные периодические движения в рассматриваемых системах. Частотный подход основан на выделении непрерывного линейного объекта и дискретной управляющей части. Выходной сигнал с цифровой части в периодическом режиме можно разложить в дискретный ряд Фурье. Это позволяет с учетом линейности объекта управления получить аналитические зависимости для выходного сигнала непрерывной части. Дискретизация системы управления приводит к некоторому запаздыванию переключения реле в периодическом режиме по сравнению с непрерывным случаем. На основе разработанного в статье метода можно определить все симметричные периодические колебания в релейных системах с дискретизацией по времени. По аналогии с данным методом предлагается подход к получению семейства фазовых годографов для таких систем во временной области. Подход основан на рассмотрении объекта управления в пространстве состояний. Фазовый годограф определяется с помощью решения матричного уравнения. Обсуждаются вопросы оценки устойчивости и области притяжения предельных циклов. Дается оценка влияния дискретизации на периодические процессы при неустойчивом объекте управления. Показано, что в таком случае в системе возникают микрохаотические колебания. На примере упрощенной модели пневматического привода приводятся результаты анализа влияния дискретизации на параметры периодических режимов работы системы.

Ключевые слова: автоколебания, релейное управление, дискретные системы, предельный цикл, метод фазового годографа, релейно-импульсные системы

Введение

Классический подход к проектированию регуляторов для релейных автоколебательных систем управления (PCY) основан на исследовании систем, работающих в непрерывном времени. Однако в настоящее время такие регуляторы в основном имеют цифровую реализацию. При этом дискретизация по времени может существенно изменить параметры периодического режима, в том числе привести к срыву автоколебательного процесса. Первые теоретические результаты, посвященные исследованию нелинейных импульсных систем, основывались на методе фазовой плоскости [1]. Полученные методы представляют собой достаточно сложную вычислительную процедуру и в большинстве случаев применимы лишь к системам второго порядка. В работах [1, 2] в различных вариантах был предложен точный метод определения возможных периодических движений в нелинейных дискретных системах. Данные методы были основаны на численном решении систе-

мы нелинейных уравнений, где порядок системы определялся числом тактов дискретизации на периоде возможных колебаний. Данный подход связан с серьезными вычислительными трудностями и не дает явной зависимости параметров колебаний от параметров дискретной системы. К исследованию симметричных периодических режимов, возможных в нелинейных импульсных системах, в работах [3, 4] был применен метод гармонического баланса с определенными изменениями. Метод фазового годографа также применялся к исследованию цифровых автоколебательных следящих систем [5, 6]. Однако предложенный подход в неполной мере позволял учесть все специфические особенности, возникающие в автоколебательных системах при введении импульсного элемента.

При проектировании цифровых автоколебательных систем на этапе синтеза корректирующих устройств важно точно оценивать влияние цифровой реализации на качество работы системы. Необоснованный выбор частоты дискретизации при проектировании автоколебательной системы может существенно ухудшить качественные показатели PCY. В настоящей работе предлагается распространение подхода, используемого в методе фазового го-

¹ Статья подготовлена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-08-01141).

дографа, на класс автоколебательных систем управления с цифровым управлением.

Работа состоит из нескольких частей. В следующем разделе представлена математическая постановка исследуемой проблемы.

Математическое описание исследуемых систем

В работе будут рассматриваться РСУ с линейным объектом управления (ОУ). Структурная схема замкнутой системы управления приведена на рис. 1.

На рис. 1 ЭНП — экстраполятор нулевого порядка, ИЭ — импульсный элемент, РЭ — релейный элемент. На схеме функция $F(e[k])$ задает статическую характеристику двухпозиционного РЭ с гистерезисом (рис. 2, а). На его вход подается последовательность $e[kT_s] = f[kT_s] - y[kT_s]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где $f[kT_s]$ — дискретный входной сигнал. Сигнал обратной связи формируется путем дискретизации непрерывного выходного сигнала $y(t)$ с постоянным шагом квантования T_s . На объект управления в каждый интервал времени t , $kT_s \leq t < (k+1)T_s$, $k = 0, 1, 2, \dots$, поступает сигнал $U(t) = U[k]$. Математическая модель замкнутой системы может быть представлена в пространстве состояний

$$\begin{cases} \mathbf{x}[(k+1)T_s] = \Phi \mathbf{x}[kT_s] + \Psi U[k]; \\ y[kT_s] = C^T \mathbf{x}[kT_s], \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{x} — вектор фазовых переменных.

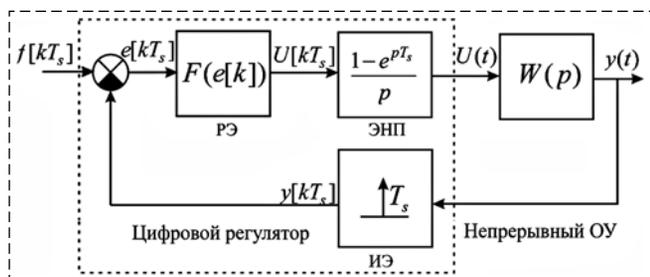


Рис. 1. Релейная автоколебательная система с цифровым управлением

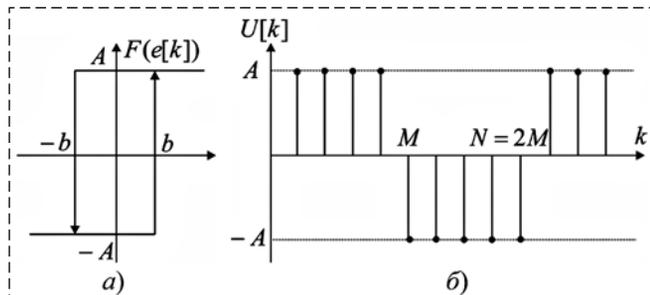


Рис. 2. Статическая характеристика (а) и выходной сигнал релейного элемента (б)

Матрицы системы определяются известными соотношениями:

$$\Phi = e^{AT_s}, \Psi = \int_0^{T_s} e^{AT_s} \mathbf{B} ds, \quad (2)$$

где \mathbf{A} , \mathbf{B} — матрицы соответствующих размерностей непрерывного ОУ.

Дискретную передаточную функцию ОУ можно записать как

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} W(p) \right\} \right\}. \quad (3)$$

Далее, для систем со структурной схемой, представленной на рис. 1, и математическим описанием (1)—(3) будем использовать термин "дискретная релейная система".

Частотный подход к определению фазового годографа дискретной релейной системы

Предположим, что в системе существует симметричный предельный цикл с периодом $N = 2M$.

В дискретной системе выходную последовательность с РЭ в периодическом режиме можно представить в виде решетчатой функции (рис. 2, б):

$$\begin{cases} U[k] = A, & \text{при } k = 1 + mN, 2 + mN, \dots, M + mN; \\ U[k] = -A, & \text{при } k = M + 1 + mN, \dots, N + mN, \\ & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4)$$

Разложим периодический сигнал (4) в ряд Фурье [7]:

$$U[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N C_n e^{jn\omega_0 k}, \quad (5)$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$, комплексный коэффициент C_n вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=1}^N U(k) e^{-jn\omega_0 k} = \\ &= \sum_{k=1}^M e^{-\frac{jn\pi k}{M}} - \sum_{k=M+1}^N e^{-\frac{jn\pi k}{M}} = A_1 - A_2; \\ A_1 &= \sum_{n=1}^M e^{-\frac{jn\pi k}{M}} = \frac{j e^{-j\pi n/N}}{\sin\left(\frac{\pi}{N} n\right)}; \\ A_2 &= \sum_{n=M+1}^N e^{-\frac{jn\pi k}{M}} = \frac{e^{-\frac{jn\pi(M+1)}{M}}}{\frac{-jn\pi}{M}} = (-1)^n A_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, в данном случае при четных значениях n коэффициент C_n равен нулю:

$$C_n = (1 - (-1)^n) \frac{j e^{-j\pi n/N}}{\sin\left(\frac{\pi}{N} n\right)}. \quad (7)$$

Найдем сигнал на выходе непрерывной части при воздействии на вход дискретной последовательности (5):

$$\begin{aligned} y[k] &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N W(e^{jn\omega_0}) C_n e^{jn\omega_0 k} = \\ &= \frac{j}{N} \sum_{n=1}^N (1 - (-1)^n) W(e^{jn\omega_0}) \frac{e^{-j\pi n/N}}{\sin\left(\frac{\pi}{N} n\right)} e^{\frac{2ink}{N}}. \end{aligned} \quad (8)$$

По аналогии с непрерывным случаем [2] введем понятие фазового годографа дискретной релейной системы. Компоненты фазового годографа называются R -характеристиками, являются функциями полупериода колебаний и определяют значения фазовых переменных в момент переключения релейного элемента с минуса на плюс. Таким образом, фазовым годографом дискретной релейной системы будем называть векторную функцию $\mathbf{x}^*(M)$, зависящую от параметра M и выделяющую все симметричные периодические движения.

Так как в периодическом движении наблюдается симметрия $y[0] = -y[MT_s]$, то с учетом (8) имеем:

$$\begin{aligned} y^*[M] &= \frac{j}{N} \sum_{n=1}^N (1 - (-1)^n) W(e^{jn\omega_0}) \frac{e^{-j\pi n/N}}{\sin\left(\frac{\pi}{N} n\right)} e^{\frac{2inM}{N}} = \\ &= \frac{j}{N} \sum_{n=1}^N (1 - (-1)^n) W(e^{jn\omega_0}) \frac{e^{-j\pi n/N}}{\sin\left(\frac{\pi}{N} n\right)} e^{\frac{2in0}{N}} e^{in\pi} = -y^*[0]. \end{aligned}$$

Окончательное выражение для R -характеристики выходной координаты можно представить в виде

$$\begin{aligned} y^*[M] &= \frac{-1}{M} \sum_{n=1}^M \frac{(1 - (-1)^n)}{\sin\left(\frac{\pi}{2M} n\right)} \times \\ &\times \operatorname{Im} \left(W \left(e^{\frac{jn\pi}{M}} \right) e^{-jn\pi(M-0,5)/M} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Условие переключения РЭ в дискретной системе отличается от непрерывного случая. В непрерывной РСУ автоколебания определяются из условия принадлежности траектории $y(t)$ по-

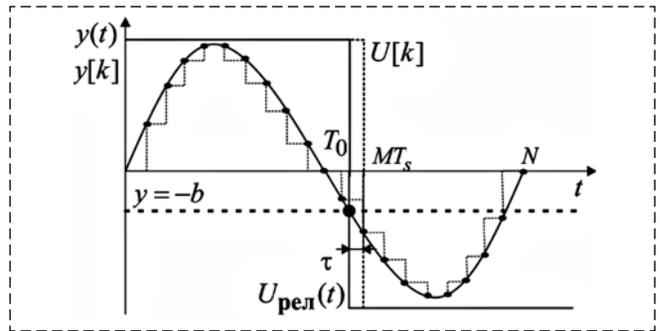


Рис. 3. К определению условия переключения в дискретной РСУ

верхности переключения $y^*(t) = -b$ в момент времени t^* . Однако в дискретном случае решетчатая функция $y[k]$ может переключить реле только в моменты времени, кратные целому значению интервала дискретизации $MT_s \geq t^*$. На рис. 3 представлено графическое условие переключения РЭ в дискретной системе $U[k]$ и в непрерывном случае $U_{\text{рел}}(t)$.

Таким образом, в дискретной РСУ по сравнению с непрерывным случаем переключение релейного элемента происходит с некоторой временной задержкой $\tau \in [0, T_s]$. Учесть такую задержку можно, введя эквивалентное фазовое запаздывание в непрерывную часть системы, рассмотрев модифицированную передаточную функцию

$$W_M(jn\omega_0, \tau) = A_n e^{i\left(\varphi_n - n\omega_0 \frac{\tau}{T_s}\right)}, \quad 0 < \tau < T_s,$$

где $A_n = |W_M(z)|_{z=e^{jn\omega_0}}$ — амплитудно-частотная характеристика объекта управления, $\varphi_n = \arg(H(z))|_{z=e^{jn\omega_0}}$ — фазовая частотная характеристика.

С учетом этого фазовый годограф дискретной релейной системы будет иметь вид

$$\begin{aligned} y^*[M, \tau] &= \frac{-1}{M} \sum_{n=1}^M \frac{(1 - (-1)^n)}{\sin\left(\frac{\pi}{2M} n\right)} \times \\ &\times \operatorname{Im} \left(W_M(jn\omega_0, \tau) e^{-jn\pi(M-0,5)/M} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Для определения периодических движений в дискретной релейной системе необходимо построить семейство фазовых годографов по зависимости (10), изменяя τ от 0 до T_s . Все точки $y^*[M, \tau]$, лежащие на прямой $y^* = -b$, будут определять возможные полупериоды колебаний M и соответствующие им задержки τ . Аналогично представленному методу можно предложить подход к определению всех возможных периодических движений во временной области.

Фазовый годограф дискретной релейной системы во временной области

Как и ранее, предположим, что в дискретной РСУ имеется простой симметричный периодический режим с периодом $N = 2M$. Состояние дискретной системы, при котором происходит переключение реле с минуса на плюс, обозначим как $\mathbf{x}^*[0]$. Поскольку периодический режим симметричный, то

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^*[0 + M] = \\ & = -\mathbf{x}^*[0] = \Phi^M \mathbf{x}^*[0] - (\Phi - \mathbf{I})^{-1}(\Phi^M - \mathbf{I})\Psi U_{\text{рел}}; \\ & \mathbf{x}^*[0] = (\Phi^M + \mathbf{I})^{-1}(\Phi^M - \mathbf{I})(\Phi - \mathbf{I})^{-1}\Psi U_{\text{рел}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Движение системы на полупериоде определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[M - 1] &= \Phi^M \mathbf{x}^*[k] - \sum_{j=0}^{M-1} \Phi^j \Psi U_{\text{рел}} = \\ &= \Phi^M \mathbf{x}[k] - (\Phi - \mathbf{I})^{-1}(\Phi^M - \mathbf{I})\Psi U_{\text{рел}}, \quad (12) \\ &k = 0 \dots M. \end{aligned}$$

Отличительной особенностью исследования предельного цикла в дискретных релейных системах является то, что состояние системы в момент переключения реле может не принадлежать поверхности переключения, а находиться в некоторой окрестности. Таким образом, все возможные предельные циклы, возникающие в таких системах, определяются системой условий

$$\begin{cases} \mathbf{C}\mathbf{x}^*[M] \geq -b; \\ \mathbf{C}\mathbf{x}^*[M - 1] < -b. \end{cases} \quad (13)$$

Алгоритм поиска всех возможных периодических движений можно представить следующей последовательностью действий. Задается вектор полупериода $M = (1, n)$. Для каждого значения M вычисляется $\mathbf{x}^*[0]$, с использованием выражения (11). С помощью равенства (12) определяется состояние системы через M тактов. Если условие (13) выполняется, то в системе возможны свободные симметричные периодические движения с периодом $N = 2MT_s$. Если в непрерывных РСУ автоколебания определялись единственной точкой $\mathbf{C}\mathbf{x}^*(T_0)$, то в дискретном случае предельный цикл определяется двумя точками $\mathbf{C}\mathbf{x}^*[M]$ и $\mathbf{C}\mathbf{x}^*[M - 1]$. Таким образом, при определении возможных свободных колебаний в дискретной релейной системе по непрерывной модели необходимо учитывать фазовое запаздывание, вызванное дискретизацией:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t - \varepsilon T_s)} \mathbf{x}[kT_s], \\ k &= (0, 1, 2, \dots, 0 < \varepsilon < 1), \quad t = kT_s + \varepsilon T. \end{aligned}$$

При $\varepsilon = 0$ $\mathbf{C}\mathbf{x}^*[kT_s] = \mathbf{C}\mathbf{x}^*(T_0)$; если $\varepsilon = 1$ $\mathbf{C}\mathbf{x}^*[kT_s] = \mathbf{C}[(\mathbf{e}^{\mathbf{A}T_s})^{-1} \mathbf{x}^*(T_0)]$. Учитывая, что $\mathbf{e}^{\mathbf{A}T_s} = \Phi$, можно записать равенство

$$\mathbf{C}\mathbf{x}^*(T_0, \varepsilon) = \mathbf{C}\mathbf{x}^*(T_0)\varepsilon + \mathbf{C}(1 - \varepsilon)\Phi^{-1}\mathbf{x}^*(T_0) = -b. \quad (14)$$

Для определения всех возможных периодических движений в дискретной РСУ необходимо построить семейство фазовых годографов в зависимости от $0 < \varepsilon < 1$ и определить все точки пересечения с прямой $\mathbf{C}\mathbf{x}^*(T_0, \varepsilon) = -b$. Точки, принадлежащие сетке дискретизации, будут соответствовать возможным периодам автоколебаний в дискретной РСУ.

Для того чтобы такие колебания наблюдались в РСУ, необходимо, чтобы они были устойчивыми.

Устойчивость автоколебаний в дискретной релейной системе

Анализ, представленный в предыдущем разделе, позволяет определить только возможные предельные циклы дискретных РСУ. Эти периодические движения могут быть устойчивыми либо неустойчивыми, причем оценка устойчивости в дискретном случае имеет существенные особенности.

В непрерывном случае асимптотическая орбитальная устойчивость автоколебаний сводится к исследованию устойчивости тривиального решения линейного разностного уравнения

$$\Delta \mathbf{x}[k + 1] = \mathbf{G}\Delta \mathbf{x}[k]. \quad (15)$$

Устойчивость разностного уравнения определяется по собственным числам λ_i матрицы \mathbf{G} , и если выполняется условие

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, m, \quad (16)$$

то соответствующее периодическое решение $\mathbf{x}(t)$ является асимптотически орбитально устойчивым [2].

В случае цифровых РСУ релейный элемент переключается только в моменты времени, кратные целому значению T_s , а возмущение в начальных условиях $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \Delta$ может не приводить к изменению момента переключения РЭ. Такая ситуация показана на рис. 4.

На рис. 4 t_1, t_1^* — моменты переключения невозмущенной траектории $y(t)$ и возмущенной траектории $\tilde{y}(t)$ соответственно. Выходной сигнал с РЭ $U[k]$ переключается в момент времени MT_s , так же как и в случае невозмущенной траектории.

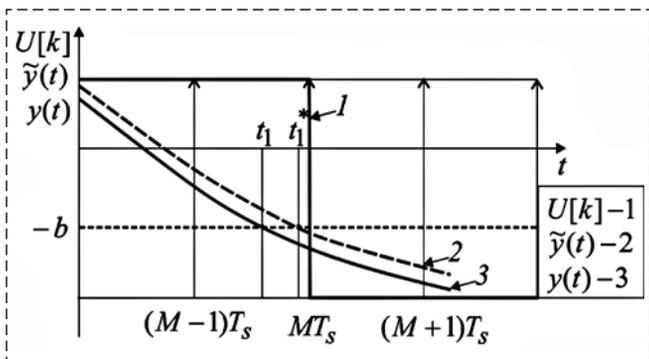


Рис. 4. Периодическая траектория возмущенной и невозмущенной систем

Исходное периодическое решение $y(t) = C^T x(t)$ пересекает поверхность переключения $x(t) = -b$ в момент времени $t = t_1$. Дадим малое возмущение Δ периодической траектории $y(t)$. Предположим, что возмущенная периодическая траектория $\tilde{y}(t) = C^T(x(t) + \Delta)$ пересечет поверхность переключения в момент времени $t = t_1^*$. Если оба решения пересекают поверхность переключения в пределах одного и того же интервала выборки

$$t_1 \wedge t_1^* \in ([M-1], M)T_s, \quad (17)$$

реле переключится в один и тот же момент времени MT_s как в случае невозмущенной траектории, так и в случае малого возмущения Δ (рис. 4). Если условия (17) будут выполняться для последующих переключений, то траектория системы будет асимптотически сходиться к предельному циклу.

Если в дискретной системе существует устойчивый предельный цикл, то для него существует некоторая область возмущений Δ , в которой управляющий сигнал $U[k]$ не изменится. Для анализа устойчивости периодической траектории в РСУ необходимо оценить множество значений Δ , при котором будет выполняться условие (17).

Область допустимых возмущений, при которых не происходит смещение моментов переключения РЭ, можно представить в следующем виде. Предположим, что в релейной системе существует симметричный предельный цикл с периодом NT_s , причем матрица ОУ A — матрица Гурвица. Тогда все решения с начальными условиями $\tilde{x}_N^* = x_N^* + \Delta$, где $\Delta \in D$, будут асимптотически сходиться к устойчивому предельному циклу. Множество допустимых значений $\Delta \in D = D_U \cap D_L \cap D_I$ определяется следующей системой неравенств:

$$D_U = \{\Delta \in \mathbb{R}^n : \inf_i ((-1)^{i+1} C^T e^{AMT_s} \Phi^i \Delta + C^T x_N^* - b) \geq 0\}; \quad (18)$$

$$D_L = \{\Delta \in \mathbb{R}^n : \sup_i ((-1)^{i+1} C^T e^{A(M+1)T_s} \Phi^i \Delta + C^T x_{N+1}^* - b) < 0\}; \quad (19)$$

$$D_I = \begin{cases} \{\Delta \in \mathbb{R}^n : C^T(x_N^* + \Delta) \geq b\}, & \text{если } U = A; \\ \{\Delta \in \mathbb{R}^n : C^T(x_N^* + \Delta) > -b\}, & \text{если } U = -A. \end{cases} \quad (20)$$

Таким образом, задача определения допустимого множества возмущений эквивалентна задаче определения множества достижимости дискретной системы. Метод нахождения этого множества представлен в работах [9, 10].

Пример: Анализ периодических колебаний в пневматическом приводе с цифровым управлением

В качестве примера рассмотрим упрощенную математическую модель пневматического привода, структурная схема которого приведена на рис. 5. В математической модели не учитываются жесткие механические ограничители по перемещениям управляющего электромагнита и исполнительного двигателя. Делается допущение о том, что эти устройства работают в линейной зоне.

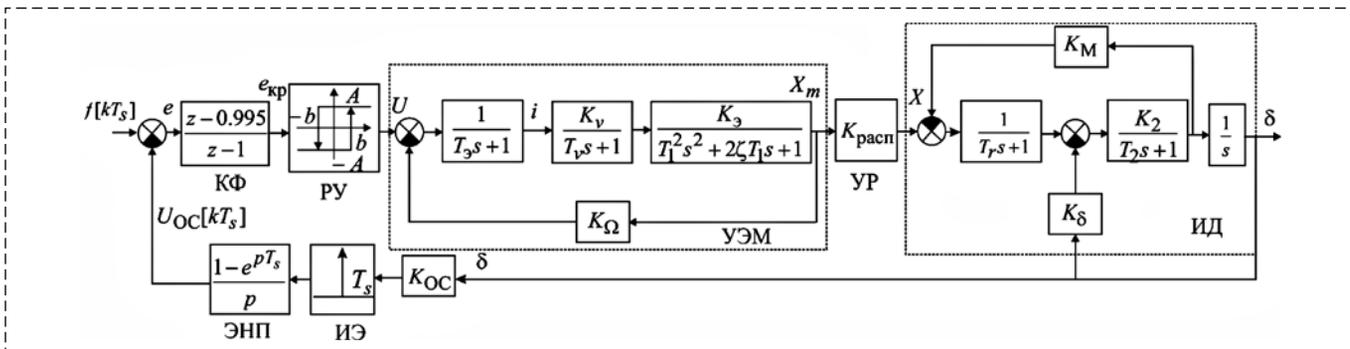


Рис. 5. Структурная схема рулевого привода

На схеме КФ — дискретное корректирующее устройство; РУ — релейный усилитель; УЭМ — управляющий электромагнит; УР — распределительное устройство; ИД — исполнительный двигатель, e — сигнал ошибки; K_{OC} — коэффициент обратной связи; U — сигнал с выхода релейного усилителя; X_m — сигнал с выхода управляющего электромагнита; X — ход распределительного устройства; δ — угол поворота рулей. Таким образом, в соответствии с рис. 1 в приводе можно выделить непрерывный линейный объект управления, включающий УЭМ, УР и ИД, а также цифровой регулятор, состоящий из КФ, РУ, K_{OC} , ИЭ, ЭНП.

Математическое описание объекта управления можно представить в пространстве состояний (1), где

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_v}{T_v} & -\frac{1}{T_v} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_1}{T_1^2} & -\frac{1}{T_1^2} & -\frac{2\xi}{T_1} & -\frac{1}{T_r} & -\frac{K_M}{T_r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{расп}}{T_r} & 0 & \frac{K_2}{T_2} & -\frac{1}{T_2} & \frac{K_\delta K_2}{T_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_2}{T_2} & -\frac{1}{T_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; C = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1).$$

Здесь $T_3 = 0,0015$ (с); $K_\Omega = 5,1$; $T_v = 2,4 \cdot 10^{-4}$ (с); $K_1 = 0,05$; $T_1 = 6,782 \cdot 10^{-4}$ (с); $\xi = 0,0369$; $T_r = 0,0015$ (с); $K_M = 0,4207$; $K_{расп} = 396,67$; $K_2 = 1$; $K_\delta = [20; -20]$; $T_2 = 0,0346$ (с).

Рассматриваются два режима работы пневматического

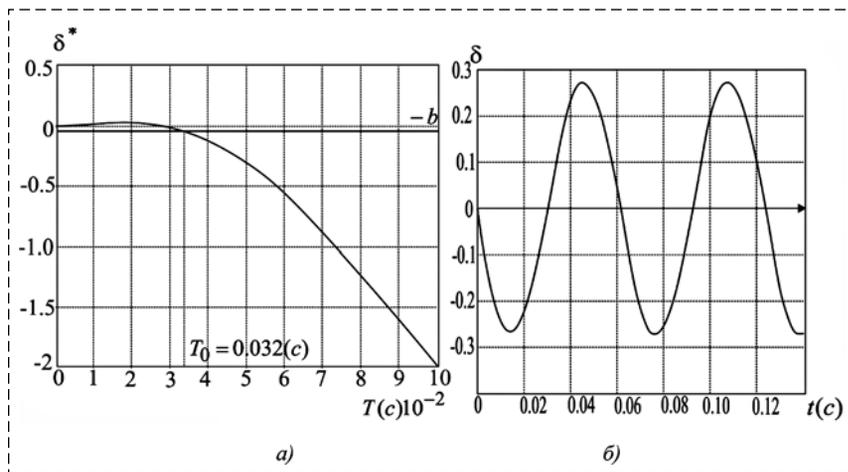


Рис. 6. Определение автоколебания в непрерывной системе (а), периодический сигнал на выходе системы $y(t)$ (период T_0) (б)

привода с цифровым управлением: случай с положительным шарнирным моментом $K_\delta = 20$ и отрицательным $K_\delta = -20$. В первом случае ОУ устойчив, во втором случае в разомкнутом состоянии ОУ теряет устойчивость.

В случае непрерывной замкнутой системы управления в автономной системе существует один устойчивый предельный цикл с частотой автоколебаний 16,08 Гц. В системе с отрицательным шарнирным моментом $K_\delta = -20$ наблюдается устойчивый предельный цикл с частотой 14,7 Гц. На рис. 6 представлено графическое определение периодического режима в непрерывной релейной системе и периодический выходной сигнал $\delta(t)$.

Определим все возможные периодические движения в системе с дискретизацией по времени. Период дискретизации $T_s = 0,002$ с (500 Гц). Используя зависимость (14), построим семейство фазовых годографов и определим периоды колебаний $2MT_s$, принадлежащих данной области. На рис. 7 показано определение всех возможных периодических движений в дискретной РСУ.

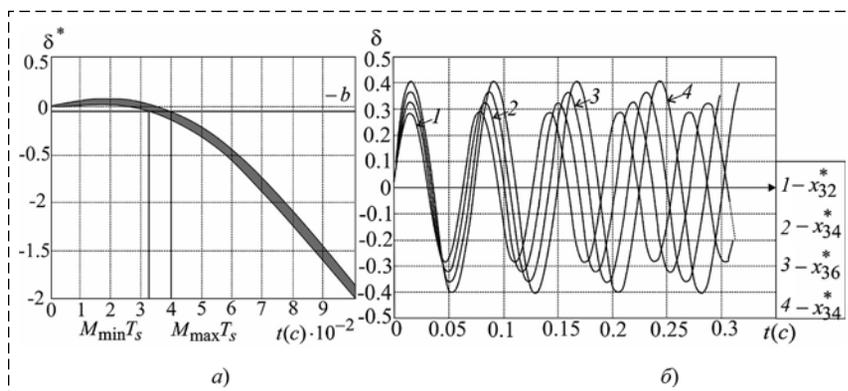


Рис. 7. Определение автоколебаний в дискретных РСУ. Семейство фазовых годографов в зависимости от задержки ε (а), периодический выходной сигнал (б)

Используя зависимость (11), можно определить начальные условия, принадлежащие каждому предельному циклу.

При цифровой реализации автоколебательной системы управления пневмоприводом в отличие от непрерывного случая в системе выявляются четыре предельных цикла с частотой от 15,6250 до 13,1579 Гц. В системе устанавливаются симметричные периодические колебания с периодом $2T_0 = NT_s$, $N = 32, 34, 36, 38$. Начальные условия, соответствующие каждому предельному циклу, следующие:

$$\begin{aligned} x_{32}^* &= (0,780 \ 3,978 \ 0,200 \ 49,682 \ 61,910 \ 30,275 \ 0,0191)^T; \\ x_{34}^* &= (0,780 \ 3,978 \ 0,200 \ -31,747 \ 69,409 \ 32,256 \ 0,037)^T; \\ x_{36}^* &= (0,780 \ 3,978 \ 0,189 \ 35,4273 \ 61,0104 \ 34,068 \ 0,0571)^T; \\ x_{38}^* &= (0,780 \ 3,978 \ 0,207 \ -24,087 \ 67,306 \ 35,823 \ 0,080)^T. \end{aligned}$$

Для каждого предельного цикла можно вычислить допустимую область возмущений, из которой будет обеспечиваться асимптотическая устойчивость полученного решения.

Такой разброс возможных колебаний необходимо учитывать при линеаризации привода по полезному сигналу. В случае, когда ОУ является устойчивым, РЭ может быть линеаризован эквивалентным коэффициентом усиления. Если в непрерывном случае РЭ можно заменить единственным коэффициентом передачи, то в дискретном случае он будет переменным. Кроме того, определение зоны возможных периодических колебаний важно при проектировании цифровой системы управления и обоснованном выборе производительности вычислителя.

Рассмотрим работу привода с отрицательным шарнирным моментом, когда $K_\delta = -20$.

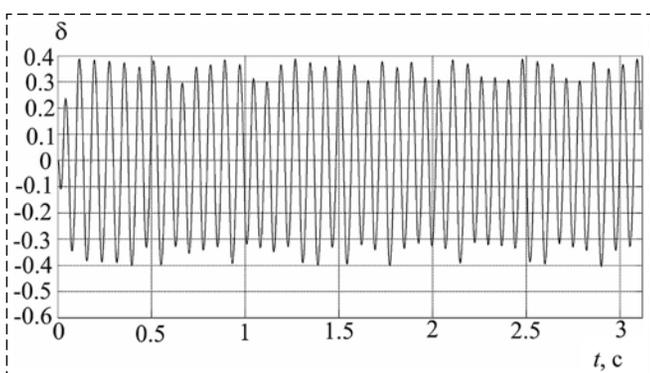


Рис. 8. Микрохаотические колебания в цифровой автоколебательной релейной системе управления

В таком случае матрица ОУ A не является матрицей Гурвица. В непрерывной системе управления устанавливается симметричный периодический процесс (см. рис. 5).

В цифровой РСУ вследствие квантования по времени могут возникать так называемые микрохаотические колебания [10]. На рис. 8 представлена автономная работа привода, когда $K_\delta = -20$ и частота дискретизации $T_s = 0,002$ с (500 Гц). Наибольший показатель Ляпунова для данной временной выборки является положительным, что говорит о том, что имеется хаотическая динамика [11]. При увеличении частоты дискретизации область хаотических колебаний будет уменьшаться и в пределе стремиться к предельному циклу в непрерывной системе.

Заключение

В работе были рассмотрены вопросы определения периодических режимов в дискретных автоколебательных системах управления с цифровым управлением. Предложены два подхода к определению всех возможных автоколебаний в таких системах на основе метода фазового годографа. Показано, что по сравнению с непрерывным случаем в дискретных автоколебательных релейных системах предельные циклы дробятся и образуют некоторое множество. Предлагается подход к определению гарантированной области устойчивости на основе решения системы неравенств. Рассмотрены процессы, протекающие в системе с неустойчивым ОУ. Показано, что в таких системах возникают микрохаотические колебания. Открытой темой для исследования остается вопрос линеаризации по полезному сигналу цифровых автоколебательных систем управления.

Список литературы

1. Цыпкин Я. З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974. 576 с.
2. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. Т. 1: Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления // Под ред. Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. С. 748.
3. Цыпкин Я. З., Попков Ю. С. Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973. 416 с.
4. Bazanella A. S. Limit cycles in sampled-data relay feedback systems / A. S. Bazanella, A. Parraga // IEEE Transactions on Automatic Control, Springer. 2016.
5. Феофилов С. В. Периодические движения в релейных системах с цифровым управлением // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 5. С. 11–17.
6. Феофилов С. В., Козырь А. В. Периодические колебания в дискретных релейных системах управления //

Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 12. Ч. 3, г. Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. С. 61–71.

7. Koch S. Frequency domain analysis of sampled variable structure systems / S. Koch, M. Horn // IEEE 56th Annual Conference on Decision and control December 12–15. 2017. P. 6664–6670.

8. Galias Z., Yu X. Euler's discretization of single input sliding-mode control systems, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 52, no. 9, pp. 1726–1730, Sept 2007.

9. Galias Z., Yu X. Analysis of delayed sliding mode control systems under zero-order holder discretization, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 61, no. 9, pp. 2739–2744, Sept. 2016.

10. Gilbert E. G., Tan K. T. Linear systems with state and control constraints: the theory and application of maximal output admissible sets, IEEE Transactions on Automatic Control, Sept. 1991, vol. 36, no. 9, pp. 1008–1020.

11. Kowalczyk P. Micro-chaos in relay feedback systems with bang-bang control and digital sampling // P. Kowalczyk, A. Glendinning, In: IFAC. Italy 2011.

Analysis of Periodic Motions in Digital Self-Oscillating Control Systems

S. V. Feofilov, svfeofilov@mail.ru, A. V. Kozyr, Kozyr_A_V@mail.ru,
Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation

Corresponding author: Feofilov Sergei V., Ph. D., Associate Professor,
Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation, e-mail: svfeofilov@mail.ru

Accepted on June 05, 2018

This paper is devoted to the investigation of relay systems with sample-data control. Self-oscillations in such systems are the operating mode. Time-sampling has a significant effect on the parameters of periodic oscillations. We propose an exact method for analyzing periodic regimes in digital self-oscillating control systems with a two-position relay element. The proposed approach extends the phase hodograph method to the class of systems operating in discrete time. A method for obtaining a phase locus for the case of self-oscillating systems with time-sampling and a linear control object is presented. The method for obtaining a phase locus for the case of self-oscillating systems with time-sampling and a linear control object is presented. The method for obtaining a phase locus for the case of self-oscillating systems with time sampling and a linear part is presented. The paper proposes an analytical procedure for constructing a family of phase locusers of a discrete relay system, both in the frequency domain and in the time domain. This approach makes it possible to isolate all possible symmetric periodic motions in the systems under consideration. The frequency approach is based on the allocation of a continuous linear object and a discrete control part. The output signal from the digital part in the batch mode can be decomposed into a discrete Fourier series. This allows obtaining analytical conditions for the output signal of the continuous part. The sampling of the control system causes a delay in the switching of the relay in a batch mode in comparison with the continuous case. The method allows to determine all symmetrical periodic oscillations in relay systems with time sampling. Similarly, we propose the approach of obtaining a family of phase travel curves for such systems in the time domain. The approach is based on the consideration of the control object in the state space. The approach is based on consideration in the state space of the control object. The phase locus is determined by solving the matrix equation. The stability and the attraction domain of limit cycles are discussed. The effect of sampling on periodic processes with an unstable control object is given. It is shown that in this case micro-chaotic oscillations arise in the system. An example is provided to demonstrate the application of the method.

Keywords: Self-oscillations, relay control, discrete systems, limit cycle, phase locus method, relay-pulse systems.

Acknowledgements: This article was prepared with the financial support of Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-08-01141).

For citation:

Feofilov S. V., Kozyr A. V. Analysis of Periodic Motions in Digital Self-Oscillating Control Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 8, pp. 587–594.

DOI: 10.17587/mau.19.587-594

References

1. Tsypkin Ya. Z. Relay automatic systems, Moscow, Science, 1974, 576 p. (in Russian).

2. **Metody** klassicheskoy i sovremennoy teorii avtomaticheskogo upravleniya: Uchebnik v 3-kh t. T. 1: Analiz i statisticheskaya dinamika sistem avtomati-cheskogo upravleniya, Pod red. N. D. Yegupova, Moscow, Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, 2000, pp. 748 (in Russian).

3. Tsypkin Ya. Z., Popkov Yu. S. Teoriya nelineynykh impul'snykh sistem. Moscow, Nauka, 1973. 416 p. (in Russian).

4. Bazanella A. S., Parraga A. Limit cycles in sampled-data relay feedback systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Springer, 2016 (in Russian).

5. Feofilov S. V. Periodicheskiye dvizheniya v releynykh sistemakh s tsifrovym upravleniyem, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye*, 2006, no. 5, pp. 11–17 (in Russian).

6. Feofilov S. V., Kozyr' A. V. Periodicheskiye kolebaniya v diskretnykh releynykh sistemakh upravleniya, *Izvestiya TulGU. Tekhnicheskiye nauki*, Vyp. 12, CH. 3, g. Tula, Izd-vo TulGU, 2017, pp. 61–71 (in Russian).

7. Koch S., Horn M. Frequency domain analysis of sampled variable structure systems, *IEEE 56th Annual Conference on Decision and control*, December, 12–15, 2017, pp. 6664–6670.

8. Galias Z., Yu X. Euler's discretization of single input sliding-mode control systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Sept. 2007, vol. 52, no. 9, pp. 1726–1730.

9. Galias Z., Yu X. Analysis of delayed sliding mode control systems under zero-order holder discretization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Sept. 2016, vol. 61, no. 9, pp. 2739–2744.

10. Gilbert E. G., Tan K. T. Linear systems with state and control constraints: the theory and application of maximal output admissible sets, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Sept. 1991, vol. 36, no. 9, pp. 1008–1020.

11. Kowalczyk P., Glendinning A. Micro-chaos in relay feedback systems with bang-bang control and digital sampling, In: IFAC, Italy 2011.