

**В. В. Чекушкин**, д-р техн. наук, проф., chekvv@gmail.com, **С. Н. Жиганов**, канд. техн. наук, доц.,  
**А. А. Быков**, канд. техн. наук, доц.,  
Муромский институт (филиал) ФГБОУ ВО "Владимирский государственный университет  
имени А. Г. и Н. Г. Столетовых",  
**К. В. Михеев**, инженер-конструктор 2 кат., kiri-mikheev@yandex.ru,  
АО "Муромский завод радиоизмерительных приборов"

## Воспроизведение траекторий движения объектов в системах контроля воздушного пространства

*Для режима реального времени разработан метод наглядного формирования траекторий воздушных объектов из плавно сопрягаемых сегментов в системе координат зоны обзора радиолокационной станции. Геометрические формы сегментов общей траектории выстраиваются на основе итерационного изменения расположения координат опорных ломаных линий кривых Безье с плавным изменением радиусов кривизны, исключены перегрузки на всех участках.*

**Ключевые слова:** траектория, кривая Безье, перегрузки, радиус кривизны, кинематика движения

### Введение

Для обучения и тренировки операторов систем управления воздушным движением и контроля воздушного пространства необходимо использовать учебно-тренировочные средства, которые обеспечивают моделирование сложной воздушной обстановки в зоне ответственности радиолокационных станций (РЛС). Применение тренажеров позволяет повысить уровень подготовки специалистов за счет реализации оптимальной практической учебной нагрузки без применения дополнительных технических средств. В этом случае вместо реальной воздушной обстановки, получаемой, например, с выхода передаточного канала РЛС, с тренажера через коммутатор вводятся сигналы, имитирующие отражения от воздушных объектов, и (или) выполняется их наложение на реальный первичный эхосигнал [1, 2]. Таким образом, основная задача тренажера состоит в имитации движения воздушных объектов в синхронизированном, едином с работой систем РЛС временном и координатном пространстве. Аппаратуру и программное обеспечение, которые применяются для решения этой задачи, целесообразно также использовать для генерации тестовых воздействий при моделировании и функционально-диагностическом контроле систем РЛС.

Формирование траекторий движения воздушных объектов состоит в ручном вводе координат опорных точек, образующих очерчивающую траекторию движения ломаную линию, с указанием скоростей полета в этих точках при последовательном (по мере ввода) накоплении массива информации об опорных точках, автоматическом расчете уравнений движения по трем координатам  $x(t_p)$ ,  $y(t_p)$ ,  $z(t_p)$  в реальном времени  $t_p$ , скорости

$V(t)$  вдоль прямолинейных курсов и переходных кривых с плавным изменением радиуса кривизны  $R_k$ , образованных чередующимися круговыми и параболическими сегментами, в режиме задания траектории. В режиме расчета текущего положения объекта (воспроизведения траектории) вычисленные параметры законов движения извлекаются из памяти и используются в качестве операндов при определении его положения на траектории путем подстановки в рассчитанные уравнения движения текущего значения времени  $t_p$ , периодически поступающего с таймера в качестве внешнего сигнала на запрос координат объекта [1, 2]. Этому способу присущи недостатки. Процесс формирования траектории не обладает наглядным, интуитивным представлением задания сложных вариантов ее воспроизведения с гибкой, постепенной деформацией формы и кривизны. Траектория движения объекта образуется только набором чередующихся круговых, параболических и прямолинейных сегментов. Траектория более адаптирована для имитации плоских маневров воздушного объекта. Движение вдоль каждого сегмента тривиально: в общем случае оно является равноускоренным, как вариант — равномерным. Оператор лишен возможности решающим образом определять скоростной режим движения объекта вдоль траектории: способ допускает задание только мгновенной скорости в каждой узловой точке опорной ломаной линии, которая интерпретируется методом как скорость в точке выхода объекта на переходную кривую, сглаживающую траекторию вблизи соответствующей точки, каждая переходная кривая имеет ось симметрии. Обеспечено точное аналитическое воспроизведение траектории в параметрической функции времени только для сегментов в виде отрезков прямых и дуг окружностей [3–6].

Известен способ описания кривой Безье, задаваемой с наглядным, интуитивным представлением отдельных сегментов ее воспроизведения, с гибкой, постепенной деформацией формы и кривизны [7]. Обеспечено параметрическое задание уравнений кривой по прямоугольным координатам в функции безразмерного параметра  $t \in [0; 1]$ . Но задается лишь геометрическая форма сегмента кривой и не обеспечивается воспроизведение траектории движения воздушного объекта с учетом его кинематики — скоростей, ускорений, непосредственно привязанных к каждой точке всей траектории в заданные моменты времени. Безразмерный параметр  $t \in [0; 1]$  не привязан к реальному времени  $t_p$  движения по траектории. Не обеспечен контроль и корректировка динамических параметров движения в виде перегрузок, превышающих заданные предельные значения, например, для летчика больше восьмикратного ускорения свободного падения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ . Не приведено комплексирование сложной траектории из сегментов, состоящей из разнообразных сопрягаемых участков, например, в виде отрезков прямых, у которых радиус кривизны равен бесконечности, и кривых с конечными значениями радиуса кривизны.

Целью работы является решение задачи наглядного формирования в реальном масштабе времени адекватной трассы полета в трехмерном пространстве без скачков скоростей и ускорений.

### Математическая модель формирования геометрической формы траектории движения

В качестве траектории движения объекта используем кусочно-заданную пространственную кривую, состоящую из плавно совмещаемых сегментов в виде кривых Безье преимущественно первого и третьего порядков [8]. Параметрическое представление кривой по каждой из координат имеет вид

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t), \quad (1)$$

где  $n$  — степень кривой;  $i$  — порядковый номер опорной вершины;  $P_i$  — вектор координат  $i$ -й опорной точки по каждой из координат;

$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$  — полином Бернштейна степени  $n$ ;  $t$  — безразмерный параметр, расположенный в интервале  $t \in [0; 1]$ .

Геометрическая форма каждого сегмента общей траектории движения задается на основе расположения  $n$  опорных точек ( $\{P_i\} = \{x_i, y_i, z_i\}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ ), т.е. опорной ломаной линии с  $n$  узлами. Совокупность такого набора сегментов позволяет представить прямолинейные участки траектории, участки с ненулевой кривизной

и описать различные виды маневра воздушного объекта. Использование кривой Безье более высокого порядка, чем третий, существенно не развивает ее свойства, но усложняет аналитические выражения для расчета мгновенных координат движущегося объекта. Положение и геометрическое представление траектории движения объекта в пространстве плавно комплексировано из последовательно сопрягаемых сегментов с итерационными, наглядными, графическими интуитивными изменениями их формы и кривизны. В соответствии с выражением (1) проводится расчет параметрических уравнений движения в каждом сегменте по трем координатам  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  зоны обзора РЛС в функции безразмерного параметра  $t \in [0; 1]$  и определяются минимальные значения радиусов кривизны траекторий.

Конкретное расположение смежных точек стыка на отдельных сопрягаемых сегментах необходимо выбирать таким образом, чтобы получить в целом гладкую и гибкую пространственную траекторию, управляемую точками  $P_i$ , положение объекта на каждом сегменте которой определяется как в виде безразмерного нормированного параметра  $t \in [0; 1]$ , так и в последующем в реальном текущем масштабе времени. В качестве примера приведена траектория на плоскости, состоящая из двух сегментов в виде кривых Безье 3-й и 1-й степеней (рис. 1), формируемых в соответствии с выражением (1):

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$

и  $B(t) = (1-t) P_0 + t P_1$ .

Для координат точек  $P_0(0;0)$ ,  $P_1(3;5,25)$ ,  $P_2(6;3)$ ,  $P_3(10;0)$  и  $C_0(10;0)$  и  $C_1(12;-1,5)$  получены параметрические уравнения:

$$x(t) = 9t + t^3;$$

$$y(t) = 15,75t - 22,5t^2 + 6,75t^3$$

и  $x(t) = 10 + 2t;$   
 $y(t) = -1,5t.$

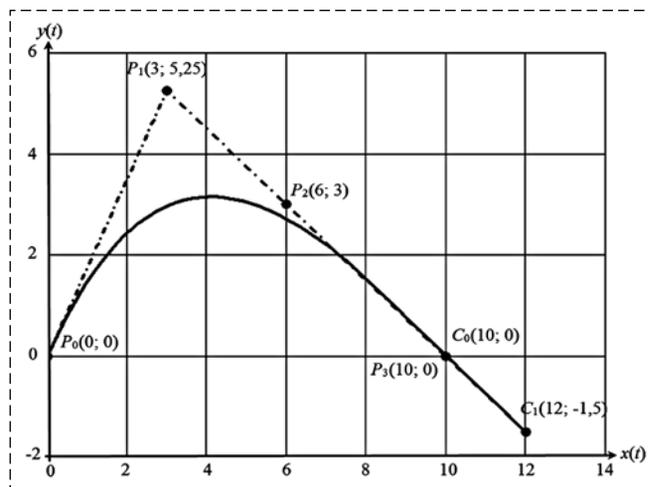


Рис. 1. Сопряжение кривой Безье 3-й степени с отрезком прямой

Такой широко распространенный переход объекта с прямолинейной на криволинейную траекторию и обратно не должен сопровождаться скачком центростремительной силы:  $F_{ц} = mV^2/R_k = ma = mgn_{ц}$ , где  $R_k$  — радиус кривизны;  $V$  — линейная скорость по кривой;  $gn_{ц}$  — перегрузка ( $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения,  $n_{ц}$  — числовой коэффициент). Если известны допустимая перегрузка и линейная скорость объекта при его движении по криволинейной траектории, то можно рассчитать минимальный радиус кривизны дуги:  $R_{k \min} = V^2/(gn_{ц \max})$ . Так, при скорости самолета  $V = 1000 \text{ м/с}$  и максимальной переносимой пилотом перегрузке  $gn_{ц \max} = 8g$  минимальный радиус кривизны составит:  $R_{k \min} = 12,74 \text{ км}$ . Т.е. на предельных для самолета скоростях радиус кривизны на переходной кривой не может быть меньше 13 км. Если радиус кривизны будет иметь меньшее значение, то необходимо менять опорные точки сопрягаемых сегментов траектории в выражении (1) таким образом, чтобы обеспечить более плавный переход, или вводить кривые 4-й степени, или вместо одной кривой Безье использовать несколько кривых. Таким образом, при задании геометрической формы кривой необходимо одновременно определять и минимальный радиус ее кривизны. Следует также предусмотреть и запас на допустимое линейное ускорение, которое векторно суммируется с тангенциальным. При переходе с одной кривой Безье на другую плавное изменение радиуса кривизны обеспечивается при непрерывности первой и второй производных сопрягаемых кривых. Для обеспечения непрерывности первой производной в соответствии с выражением (1) достаточно, чтобы три смежные опорные точки двух кривых ( $P_2, P_3, C_0, C_1$ ) лежали на одной прямой, тогда при построении траектории две сопрягаемые кривые будут иметь общую касательную в точке стыка  $C_0(10;0)$ , т.е. равные первые производные. Для обеспечения непрерывности второй производной необходимо, чтобы пять смежных вершин двух кривых лежали на одной прямой или составляли выпуклый многоугольник. В данном случае достаточно четырех точек  $P_1, P_2, P_3 = C_0, C_1$ , поскольку точки  $P_3, C_0$  — общие для двух сегментов (рис. 1). Для этого примера будет обеспечен плавный переход от отрезка прямой с радиусом кривизны  $R = \infty$  до некоторого фиксированного минимального радиуса кривой Безье. Максимальная перегрузка для кубической кривой определяется минимальным радиусом в соответствии с выражением

$$R(t) = \frac{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)} = \frac{((9 + 3t^2)^2 + (15,75 - 45t + 20,25t^2)^2)^{3/2}}{(40,5t - 45)(9 + 3t^2) - (15,75 - 45t + 20,25t^2)(6t)}$$

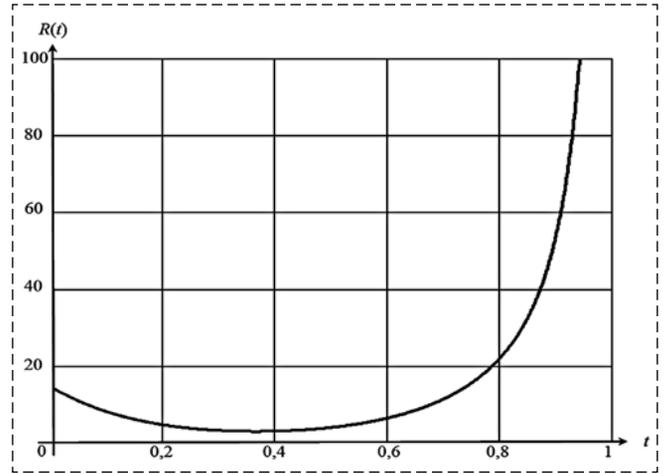


Рис. 2. График для определения минимального радиуса кривизны

Для проверки перегрузок строится график зависимости  $R(t)$ , по которой можно определить минимальный радиус кривизны (рис. 2), соответствующий заданному значению перегрузки. Заданные требования расположения точек  $P$  ограничивают множество кривых, поэтому на практике для соблюдения непрерывности вторых производных при сопряжении можно использовать полиномиальные кривые и более высокого порядка или несколько кубических кривых.

### Воспроизведение траекторий в режиме реального времени

Имитация траектории движения должна проводиться в реальном масштабе времени, начиная с некоторого значения  $T_{нач} = 0$ . Текущее значение времени можно представить в виде линейно-нарастающей непрерывной или решетчатой функции времени  $t_p = kT_T$  с дискретом  $T_T$ . В то же время в соответствии с выражением (1) кривая Безье для любого сегмента является функцией безразмерного параметра  $t \in [0; 1]$ , который определим как функцию нормированного времени  $t \in [0; 1]$ . Это время связано с реальным временем сложной функциональной зависимостью. Для фрагментов траектории с разной длиной пути  $S_{\max}$  при постоянной скорости движения нормированное время прохождения сегмента остается постоянным. Для сегментов траектории с разной длиной пути и постоянной линейной скоростью движения на этих участках перенормируем параметр  $t \in [0; 1]$  к реальному времени  $t_p$  прохождения каждого заданного сегмента исходя из условия, что каждому максимальному нормированному  $t = 1$  будет соответствовать реальное время прохождения сегмента  $t_{\max} = S_{\max}/V$ .

Для получения кинематики движения объекта по траектории в функции реального времени при

изменении скорости необходимо получить функциональную зависимость значения времени  $t$  от аргумента  $t_p$  действительного текущего значения времени и наоборот. Нормированное и реальное время связывает пройденный путь  $S$ . Поэтому путь  $S$  используем как связующий параметр для определения текущих значений  $t$ , подставляемых в параметрические уравнения (1) для воспроизведения текущих значений координат траектории:

$$\begin{aligned}x(t) &= 9t + t^3; \\y(t) &= 15,75t - 22,5t^2 + 6,75t^3.\end{aligned}$$

Предварительно определим функциональные зависимости:  $S(t)$ ,  $S_{\max}$ , обратные функции  $t(S)$ , а также их аппроксимации полиномами наилучшего приближения. Путь, пройденный по параметрически заданной кривой на плоскости (см. рис. 1) в функции нормированного времени, определяется формулой

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (2)$$

Поскольку для интеграла (2) табличное представление отсутствует, то определим его в программе MathCAD путем численного интегрирования. При этом получим как длину пути  $S_{\max}$  на заданном сегменте, так и точные отдельные промежуточные значения и графики функций  $S(t)$  и  $t(S)$ . Например, путь вдоль линейной кривой Безье из т.  $P_3(10; 0)$  в т.  $C_1(12; -1,5)$  в соответствии с параметрическими уравнениями  $x(t) = 10 + 2t$ ,  $y(t) = -1,5t$  будет равен

$$S(t) = \int_0^1 \sqrt{((10 + 2t)')^2 + ((-1,5t)')^2} dt = 2,5.$$

Путь по кубической кривой на плоскости между точкой  $P_0(0; 0)$  и точкой  $C_1(12; -1,5)$   $S(t) = 12,23$  (см. рис. 1).

Для каждого из типов сегментов траектории предварительно по выражению (2) определяется максимальное значение пути  $S_{\max}$  на каждом сегменте.  $S_{\max}$  в последующем используется для определения уравнения скорости в функции реального времени  $V = v(t_p)$ . Из набора текущих, точных значений при численном интегрировании выражения (2) для воспроизведения сразу "эталонного" полинома Ньютона для обратной функции  $t = g_{\text{эТ}}(S(t))$  с равномерным расположением узлов интерполяции (причем аргумент и функция меняются местами) выбирается примерно 5...8 дискретных значений функции  $t_i$  и соответствующие им значения аргумента  $S_i$  (узлов интерполяции полинома). С помощью полинома Ньютона 5...8-й степени воспроизводится "эталонная" монотонно нарастающая обратная функция  $t = g_{\text{эТ}}(S)$  с приведенной относитель-

ной погрешностью порядка долей процента с последующей аппроксимацией ее фактически полиномом наилучшего приближения Чебышева  $g(S) \cong g_{\text{эТ}}(S)$  более низкой степени. В этом полиноме для исключения скачков значения пути для границ интервалов (сегментов траектории) задаются значения:  $(t_0 = 0, S_0 = 0)$ ;  $(t_{\max} = 1, S = S_{\max})$ . Вычисляются и оцениваются максимальные разности  $g_{\text{эТ}}(S) - g(S)$  и приведенные значения погрешностей. Для последней значения не должны превышать 1...2 %.

Монотонно изменяющиеся прямые и обратные функциональные зависимости  $S(t)$ ,  $t(S)$  можно и аппроксимировать с высокой степенью точности полиномами наилучшего приближения 2-й или 3-й степени в соответствии с их графиками (рис. 3–5). Для уравнений

$$\begin{aligned}x(t) &= 9t + t^3; \\y(t) &= 15,75t - 22,5t^2 + 6,75t^3\end{aligned}$$

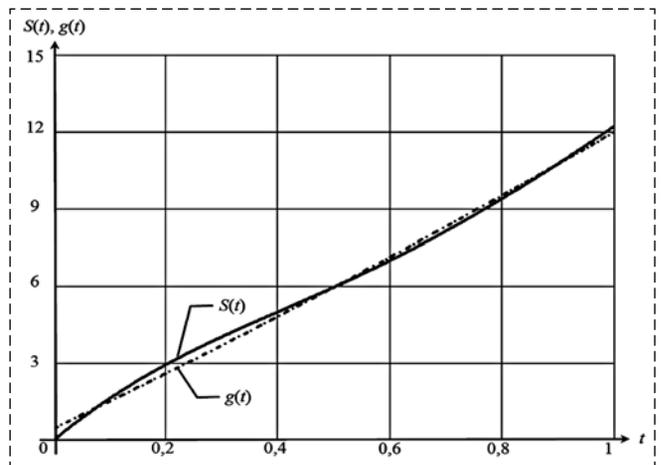


Рис. 3. Аппроксимация полиномом 2-й степени пути  $S(t)$

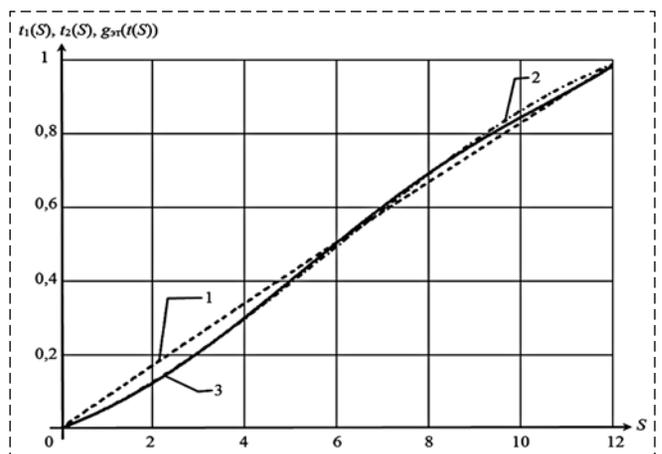


Рис. 4. Аппроксимация полиномами 2-й, 3-й степени обратной функции  $t(S)$ :

$$\begin{aligned}1 - t_1(S) &= 0,086S - 0,0003088S^2; \quad 2 - t_2(S) = 0,047S + 0,008807S^2 - \\ &- 0,0004889S^3; \quad 3 - g_{\text{эТ}}(t(S)) = 0,048S + 0,005599S^2 + 0,0009126S^3 - \\ &- 0,0001888S^4 + 0,000007793S^5\end{aligned}$$

в соответствии с графиком функций  $S(t)$  получен полином наилучшего приближения 2-й степени. На рис. 3 кривая  $S(t)$  построена в соответствии с выражением (2), а кривая  $g(t) = 0,462 + 10,495t + 1,05t^2$  — полином наилучшего приближения 2-й степени.

Коэффициенты полинома вычислены исходя из матричных уравнений

$$A = \begin{pmatrix} 0,075^0 & 0,075^1 & 0,075^2 \\ 0,5^0 & 0,5^1 & 0,5^2 \\ 0,895^0 & 0,895^1 & 0,895^2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1,255 \\ 5,972 \\ 10,696 \end{pmatrix}$$

при оптимальных узлах аппроксимации полинома (значения безразмерного параметра  $t$ ) 0,075, 0,5 и 0,895.

Построены графики погрешности аппроксимирующих полиномов 2-й и 3-й степени для обратной функции (рис. 4)  $t_2(S) = 0,086S - 0,0003088S^2$  и  $t_3(S) = 0,047S + 0,008807S^2 - 0,0004889S^3$  по отношению к "эталонному" полиному 5-й степени обратной функции.

На рис. 5 приведены графики погрешности аппроксимирующих полиномов 2-й и 3-й степени для обратной функции  $t(S)$ .

Относительная приведенная погрешность аппроксимации текущего значения пути не превышает для полиномов 2-й и 3-й степеней соответственно  $0,05/12,22 \approx 0,004$  и  $0,02/12,22 \approx 0,002$ . Определенные параметры уравнения аппроксимации функциональных зависимостей являются исходными для определения кинематических параметров движения объекта, текущих значений координат траектории в функции реального времени.

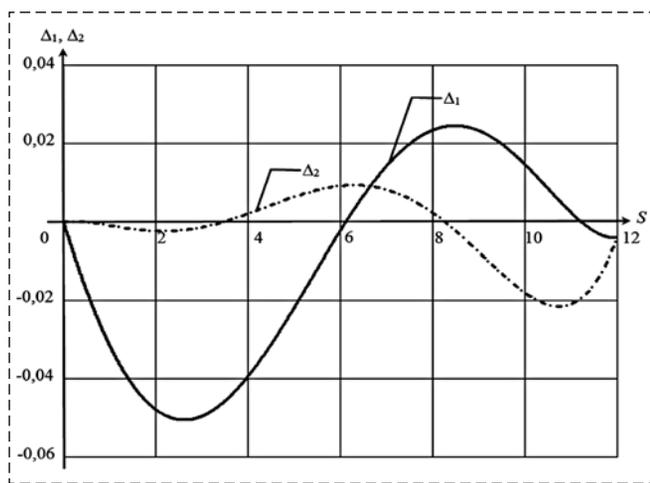


Рис. 5. График погрешности полиномов Ньютона 2-й и 3-й степеней по отношению к "эталонному" полиному 5-й степени:  $\Delta_1 = g_{2T}(t(S)) - t_1(S)$ ;  $\Delta_2 = g_{3T}(t(S)) - t_2(S)$

Движение с постоянной скоростью является наиболее простым и в то же время наиболее распространенным способом движения. Для первого сегмента траектории с такими условиями можно принять начальное значение времени  $T_{нач} = 0$ . При воспроизведении сегмента траектории в виде отрезка прямой с равномерным движением зависимость пути как от нормированного, так и от реального времени будет линейной. И при подстановке в параметрические уравнения воспроизведения траектории текущих нормированных значений времени (безразмерных значений параметра) при равномерном движении по отрезку прямой необходимо использовать выражение  $t = t_p/t_{max}$ , где реальное время прохождения сегмента  $t_{max} = S_{max}/V$ . При равномерном движении по кубической кривой для текущих значений  $t_p$  на заданном сегменте определяются линейно нарастающие значения пути  $S = Vt_p$ . По текущим значениям  $S$  определяются в соответствии с аппроксимирующим полиномом обратная функция  $t(S)$  и нормированные значения времени  $t$ , после чего по параметрическим уравнениям вычисляются текущие значения прямоугольных координат.

При равнозамедленном, равноускоренном или других видах движения для исключения скачков значений скорости и ускорения линейная скорость и ускорение в начале следующего сегмента движения должны быть равны скорости и ускорению в конце предшествующего сегмента. Текущее значение пути при равноускоренном движении по заданному отрезку прямой или кривой можно определить в соответствии с формулой  $S = Vt_p + at_p^2/2$ .

После этого по аргументу — текущему пути  $S$  — с помощью полинома, аппроксимирующего обратную функцию  $t(S)$ , определяется нормированное время  $t$ .

При более сложных заданиях функции скорости от времени значение пути на сегменте вычисляется с помощью интеграла  $S = \int_0^t V(t_p)dt$ .

Комплексование, стыковка отдельных сегментов траектории могут быть выполнены последовательно. Форму сегмента, его длину — максимальное значение пути  $S_{max}$  по сегменту — можно определять и варьировать при задании геометрической формы кривой. При назначенном значении начальной скорости значение ускорения, например, при равноускоренном движении можно изменять так, чтобы получить заданное время прохождения сегмента траектории в соответствии с квадратным уравнением, где  $V_{нач}$  — начальная скорость;  $a$  — ускорение. Например, при  $S = 1000$  м,  $V_{нач} = 10$  м/с,  $a = 2$  м/с<sup>2</sup> получим  $t_{1,2} = (-20 \pm \sqrt{400 + 8 \cdot 2000})/4$  м/с<sup>2</sup> = 27,156 с (отрицательное значение отбрасывается) и т.д.

Итак, в соответствии с параметрическими уравнениями каждого сегмента в функции безразмерного параметра  $t$  вычисляется путь, пройденный по параметрически заданной кубической кривой в функции  $S(t)$ , воспроизводится обратная функция  $t(S)$  с последующей аппроксимацией ее полиномом наилучшего приближения  $g(t)$ . По заданному закону воспроизведения скорости на заданном сегменте определяются текущее значение пройденного пути  $S(t_{p1})$  в функции текущего временного интервала  $t_{p1}$  от начала сегмента и времени движения по сегменту, время прохождения сегмента. По общему, связывающему параметру текущего пути  $S$  на сегменте осуществляется переход от времени  $t_{p1}$  к параметру  $t$  с последующей подстановкой его в параметрические уравнения вычисления прямоугольных координат.

После проведения предварительных расчетов имеем отдельные сегменты, для начала и концов которых заданы абсолютные начальные и конечные значения прямоугольных координат, привязанные к точке стояния системы контроля воздушного пространства. Выполнена привязка начала и конца формирования каждого сегмента траектории к реальному значению текущего временного интервала, формируемого таймером реального времени. Для каждого сегмента получены: время воспроизведения его начала и время завершения, уравнения зависимости длины пути в сегменте от начала сегмента в функции относительного реального времени от начала временного интервала формирования сегмента, аппроксимирующие полиномы для воспроизведения зависимостей нормированного времени  $t(S)$  в каждом сегменте, параметрические уравнения воспроизведения координат в функции нормированного времени в каждом сегменте.

Все рассчитанные функциональные зависимости, уравнения движения заносятся в память, например, рабочего места инструктора-оператора. После этого они в момент начала тренировки с воспроизведением траекторий движения на экране системы отображения информации передаются в блок расчета координат в соответствии с заданными геометрическими и кинематическими параметрами траектории.

## Действия оператора, направленные на проектирование модели движения

Предварительные действия оператора, направленные на проектирование модели движения, подготовительные расчеты позволяют в общем временном интервале формирования траектории движения определить моменты времени начала и окончания, а также продолжительность движения объекта по каждому сегменту, которые позволяют идентифицировать именно тот сегмент, по которому перемещается объект в момент времени  $t_p$  воспроизведения каждого сегмента с присвоением ему порядкового номера. К каждому порядковому номеру сегмента привязываются его тип и уравнения движения на заданном сегменте. При задании траектории движения конечной целью проводимого при этом математического моделирования является создание в некритичном масштабе времени наиболее простых вычислительных алгоритмов с достаточно высокими точностными характеристиками для последующей реализации их в критическом реальном масштабе времени воспроизведения траектории с минимальным числом вычислительных операций и обращений к памяти. Данные заносятся оператором в таблицу (табл. 1), и ее заполнение по описанной методике позволяет получить траекторию движения. Погрешности воспроизведения функции приведут к незначительным колебаниям скорости движения по траектории.

Для каждого из типов сегментов траектории предварительно по описанной выше методике задаются параметрические уравнения движения  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ . Максимальные приведенные значения погрешностей не должны превышать 1...2 %. Предварительно задается закон изменения линейной скорости в функции  $t_p$  внутри каждого сегмента, позволяющий определить ее в заданный момент времени или пути. При равномерном движении ускорение равно нулю. При равноускоренном или равнозамедленном движении в сегменте задаются начальные и конечные значения ускорения. Фиксированные, контрольные значения скоростей также задаются в начальной и конечной точках сегмента. Каждое из уравне-

Таблица 1

Коэффициенты уравнений, параметров движения объекта по сегментам траектории

№ сегмента	Тип сегмента	$T_n, c$	$T_k, c$	Параметрические уравнения воспроизведения траекторий	$S_{max}$	$t = g(S) \cong g_{этр}(S)$	$V_n$	$V_k$	$a_n$	$a_k$	$V = v(t_p)$	$S = s(t_p)$	$V_k S(t_p)$	$V = f(t_p)$	$h_0$
0				$x(t), y(t), z(t)$											
$N - 1$															

Здесь  $T_n$  и  $T_k$  — моменты времени начала и окончания движения объекта по сегменту, которые позволяют идентифицировать именно тот сегмент, по которому перемещается объект в момент времени  $t_p$

ний применимо только для своего номера и (или) типа сегмента. Должен быть проведен поверочный расчет по плавному изменению скоростей при переходе с сегмента на сегмент с плавными без скачков изменениями скорости и ускорений. Определение проходимого пути  $S = s(t_p)$  в каждом сегменте выполняется в соответствии с заданным законом изменения скорости  $V = v(t_p)$ . Проходимый путь в реальном масштабе времени при более сложном законе изменения скорости определяется выражением  $S = \int_0^t V(t_p) dt$  и должен быть равен пути  $S_{\max}$ , проходимому по всему сегменту кривой Безье. Возможен итерационный подбор уравнения скорости в сегменте  $V = v(t_p)$ , определяющего фактическое время окончания прохождения сегмента  $T_k$ , чтобы получить заданные временные интервалы совпадения прохождения начал и концов сегмента. После этого по общему, связывающему параметру текущего пути  $S$  на сегменте с помощью функций  $t = g(S) \cong g_{\Sigma}(S)$ ,  $V = v(t_p)$  и  $S = s(t_p)$  осуществляется переход от времени  $t_{p1}$  к параметру  $t$  с последующей подстановкой его в параметрические уравнения вычисления прямоугольных координат. Такая операция проводится для каждого сегмента. В результате формируется окончательная расчетная таблица (табл. 2), которая передается в память для последующего воспроизведения траектории каждого воздушного объекта.

Таблица 2

Расчетные данные для воспроизведения траектории

№ сегмента	Тип сегмента	$T_n, c$	$T_k, c$	Параметрические уравнения траекторий в заданном сегменте	$t = g(S)$	$S = s(t_p)$
0				$x(t), y(t), z(t)$		
$N - 1$						

С начала тренировки по линейно нарастающему временному интервалу с таймера блок вычисления координат определяет время начала работы на очередном сегменте, вычисляет текущие прямоугольные координаты в пределах сегмента, фиксирует время перехода к следующему сегменту. Применяя расчетные формулы движения по преодолеваемому в момент времени  $t_p$  сегменту траектории (для которого выполняется условие  $T_n \leq t < T_k$ ), с использованием уравнений табл. 2 можно получить текущие значения координат с

заданной скоростью движения воздушного объекта. Данные расчеты осуществляются в автоматическом режиме по периодическим запросам от таймера. Отсчет времени в общем случае идет от начала воздушного полета.

## Заключение

Разработан метод наглядного, интуитивного формирования траекторий воздушных объектов из плавно сопрягаемых сегментов в системе координат зоны обзора РЛС. Обеспечен контроль перегрузок. Рассмотрен алгоритм формирования траектории движения после задания оператором опорных точек траектории. Для упрощения расчетов предложено использовать аппроксимацию пройденного пути полиномом наилучшего приближения 2-й и 3-й степеней. Приведенный пример формирования траектории движения показал высокую эффективность разработанного метода и возможность его реализации в современных системах управления и контроля.

## Список литературы

1. Чекушкин В. В., Бобров М. С., Аверьянов А. М. Имитация траекторий движения воздушных объектов для радиолокационных систем управления и контроля воздушного пространства // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 9. С. 70–80.
2. Чекушкин В. В., Аверьянов А. М., Бобров М. С. Способ имитации траекторий движения воздушных объектов. Патент № 2419072 от 20.05.2011. — Бюл. № 14.
3. Бобров М. С., Аверьянов А. М., Пискунов Г. Г., Чекушкин В. В. Реализация трасс движения воздушных объектов в тренажерно-моделирующих системах // Вопросы радиоэлектроники. Серия ЭВТ. Вып. 4. 2009. С. 157–177.
4. Аверьянов А. М., Бобров М. С., Чекушкин В. В. Параметрическое задание кинематики движения воздушного объекта на участке маневрирования // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 5. С. 67–73.
5. Аверьянов А. М., Бобров М. С., Чекушкин В. В. Оценка ускорения при аппроксимации параболических сегментов траектории движения объекта радиолокационного обнаружения // Вопросы радиоэлектроники. Сер. Радиолокационная техника. Вып. 1. 2011. С. 184–192.
6. Курилов И. А., Аверьянов А. М., Павельев Д. В. Построение траектории движения воздушных объектов на основе непрерывных кусочно-линейных функций // Вопросы радиоэлектроники. Сер. Радиолокационная техника. Вып. 1. 2011. С. 210–217.
7. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 2001. 575 с.
8. Чекушкин В. В., Михеев К. В. Способ имитации траекторий движения объектов / Заявка на патент № 2015152966 от 09.12.2015 г.

# The Reproduction of the Trajectories of Moving Objects in the Systems of Control of Air Space

**V. V. Chekushkin**, chekvv@gmail.com, **S. N. Zhiganov**, s\_zh\_72@mail.ru✉, **A. A. Bykov**, Murom Institute (branch) "Vladimir State University named after Alexander and Nickolay Stoletov", Murom, 602264, Russian Federation,  
**K. V. Miheev**, kiri-mikheev@yandex.ru,  
JSC Murom Plant of Radio Measuring Instruments, Murom, 602267, Russian Federation

Corresponding author: **Zhiganov Sergej N.**, Ph. D., Associate Professor of IMS Murom Institute (branch) "Vladimir State University named after Alexander and Nickolay Stoletov", Murom, 602264, Russian Federation  
e-mail: s\_zh\_72@mail.ru

Accepted on November 12, 2017

For real-time developed a method of visual formation of trajectories of air objects of smoothly conjugated segments in the coordinate system of the zone of vision radar. The geometric shape segments of General trajectories are based on iterative change of the location of the reference polyline bézier curves with variable radii of curvature. As the trajectory of the object was used and the piecewise-specified spatial curve consisting of smoothly combine segments as Bezier curves mainly the first and third orders. The geometric shape of each segment of the total trajectory was set based on the location of  $n$  control points, i.e. the reference polyline with  $n$  nodes. When you specify a geometric shape of the curve were simultaneously determined by the minimum radius of its curvature. In addition there was a reserve in the amount of allowable linear acceleration, which is summed with a vector tangential. In the transition from one curve to another Bezier smooth change of the radius of curvature is ensured by continuous first and second derivatives matched curves. It is shown that to ensure the continuity of the first derivative, it is sufficient that three adjacent reference points of the two curves are collinear, then when you build the trajectories of the two mating curves will have a common tangent at the point of intersection, i.e., equal to the first derivative. To obtain the kinematics of the motion of an object along a path in real-time functions when the speed was obtained functional dependence linking the current value of the time and normalized time. Standardized and real-time links traversed path. Monotonically changing forward and backward functional dependency a journey from time to time was approximated with a high degree of accuracy by polynomials of the best approximation of the 2nd or 3rd degrees. The paper presents recommendations for operators to conduct preparatory calculations provide in General a time interval of formation of a trajectory of movement of air objects.

**Keywords:** trajectory, Bezier curve, acceleration, radius of curvature, the kinematics of the movement

For citation:

**Chekushkin V. V., Zhiganov S. N., Bykov A. A., Miheev K. V.** The Reproduction of the Trajectories of Moving Objects in the Systems of Control of Air Space, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 2, pp. 126–133.

DOI: 10.17587/mau.19.126-133

## References

1. **Chekushkin V. V., Bobrov M. S., Aver'janov A. M.** *Imitacija traektorij dvizhenija vozdušnyh ob#ektov dlja radiolokacionnyh sistem upravlenija i kontrolja vozdušnogo prostranstva* (Simulation of trajectories of movement of air targets for radar control systems and airspace control), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2009, no. 9, pp. 70–80 (in Russian).  
2. **Chekushkin V. V., Aver'janov A. M., Bobrov M. S.** *Sposob imitacii traektorij dvizhenija vozdušnyh ob#ektov* (Method of simulating of trajectories of air objects), Patent № 2419072 ot 20.05.2011, Bjul. № 14 (in Russian).  
3. **Bobrov M. S., Aver'janov A. M., Piskunov G. G., Chekushkin V. V.** *Realizacija trass dvizhenija vozdušnyh ob#ektov v trenazhernomodelirujushhijh sistemah* (Implementation of traces of movement of air objects in the training and modeling systems), *Voprosy Radioelektroniki. Serija JeVT*, 2009, no. 4, pp. 157–177 (in Russian).

4. **Aver'janov A. M., Bobrov M. S., Chekushkin V. V.** *Parametricheskoe zadanie kinematiki dvizhenija vozdušnogo ob#ekta na uchastke manevrirovanija* (A parametric task of the kinematics of moving air object for section of the maneuvering), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2010, no. 5, pp. 67–73 (in Russian).

5. **Aver'janov A. M., Bobrov M. S., Chekushkin V. V.** *Ocenka uskorenija pri approksimacii parabolicheskijh segmentov traektorii dvizhenija ob#ekta radiolokacionnogo obnaruzhenija* (Assessment of acceleration in the approximation of parabolic segments of the trajectory of the object radar detection), *Voprosy Radioelektroniki. Serija Radiolokacionnaja Tehnika*, 2011, no. 1, pp. 184–192 (in Russian).

6. **Kurilov I. A., Aver'janov A. M., Pavel'ev D. V.** *Postroenie traektorii dvizhenija vozdušnyh ob#ektov na osnove nepreryvnyh kusochno-linejnyh funkcij* (Creation of a trajectory of movement of air objects on the basis of continuous piecewise linear functions), *Voprosy Radioelektroniki. Serija Radiolokacionnaja Tehnika*, 2011, no. 1, pp. 210–217 (in Russian).

7. **Kahaner D., Moular K., Njesh S.** *Chislennye metody i programmnoe obespechenie* (Numerical methods and software), Moscow, Mir, 2001, 575 p. (in Russian).

8. **Chekushkin V. V., Miheev K. V.** *Sposob imitacii traektorij dvizhenija ob#ektov* (Method of simulating trajectories of objects), *Zajavka na patent № 2015152966 ot 09.12.2015 g.* (in Russian).