УДК 681.5.073:681.513.5 DOI: 10.17587/mau.19.499-507



**Н. Н. Макаров,** д-р техн. наук, проф., nnm@sau.tsu.tula.ru,
Тульский государственный университет, г. Тула,
**В. Е. Семашкин,** канд. техн. наук, sveil@mail.ru,
АО "Конструкторское бюро приборостроения им. академика А. Г. Шипунова", г. Тула


## Задача минимаксной $l_\infty$-оптимальной во временной области линейной фильтрации


*Статья посвящена одному подходу к оптимальной фильтрации. Рассматривается схема фильтрации Винера. Предлагаемая постановка имеет два отличия от классической. Первое отличие состоит в том, что у входных воздействий (полезного сигнала и помехи) ограничены максимальные абсолютные значения, а не дисперсии. Второе отличие состоит в том, что критерием качества также является максимальное абсолютное значение, а не дисперсия ошибки.*

*Таким образом, квадратичный критерий в постановке Винера заменен на критерий в форме $l_\infty$-нормы (нормы Чебышева). Поэтому предложенную задачу предлагается называть задачей $l_\infty$-оптимальной фильтрации.*

*Предложен оригинальный способ выбора формирующих фильтров входных воздействий для данной задачи. Способ позволяет создавать множества воздействий со сложными ограничениями абсолютных величин воздействий и их производных.*

*Вычисление критерия качества сводится к задаче Булгакова о накоплении возмущений. Для системы с дискретным временем критерий качества записывается в форме суммы бесконечного ряда. Получены условия сходимости ряда. При выполнении условий сходимости бесконечный ряд с любой требуемой точностью можно заменить на его частичную сумму. При этом получается критерий качества в виде $l_1$-нормы импульсной характеристики фильтра. Предлагается численно искать импульсную характеристику оптимального фильтра методом субградиентного спуска.*

*Рассмотрен пример поиска $l_\infty$-оптимального фильтра. Результат сравнивается с классическими полосовыми фильтрами. Показана возможность снижения фазового запаздывания фильтра в полосе пропускания.*



***Ключевые слова:*** *оптимальная фильтрация, минимаксная фильтрация, следящие системы, фильтры с конечной импульсной характеристикой*


### Введение

Известно много классических подходов к решению задачи фильтрации: частотные фильтры (эллиптические, к примеру), фильтры с постоянной групповой задержкой, фильтр Винера, фильтр (наблюдатель) Калмана и т. д. [1, 2]. Они широко применяются в технике, но их использование в ряде задач затруднено по двум причинам. Во-первых, они подразумевают вполне определенное единообразное описание множеств полезных сигналов и помех, например, полосы частот или дисперсии. Во-вторых, предлагаемые в них критерии качества часто не имеют явной связи с критериями качества прикладных задач. Важным примером такой задачи является проектирование следящих систем, в которых полезные (задающие) сигналы могут быть детерминированными, помехи — случайными при некоторых наложенных ограничениях (амплитуда, мощность и т. п.), а качество оценивается по максимально возможному значению ошибки слежения ($l_\infty$-норма или норма Чебышева). Для прямого решения такой и подобных задач необходимы минимаксные методы, позволяющие минимизировать $l_\infty$-норму сигнала ошибки при наихудшем сочетании внешних воздействий.

В настоящей работе рассматривается задача оптимальной фильтрации, доставляющей минимум $l_\infty$-норме сигнала ошибки между отфильтрованным сигналом и желаемым преобразованием полезного сигнала при наихудшем сочетании полезного сигнала и помехи в пределах заданных множеств возможных полезных сигналов и помех. Подход отличается от известных минимаксных методов робастного управления [3] тем, что рассматривается неопределенность в воздействиях, а не в динамике звеньев. В отличие от минимаксных стохастических методов [4] оптимизируется не дисперсия ошибки как случайного процесса, а норма Чебышева при наихудшей реализации сигналов, которые могут быть и детерминированными. Отметим, что данный подход не следует путать с минимизацией нормы Чебышева разности частотных характеристик (ЧХ), широко применяемой, например, при синтезе фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ) по заданной желаемой ЧХ [5]. Задачи с оптимизацией $l_\infty$-нормы процессов во временной области часто относят к сложным задачам современной теории управления [6, 7].

## Постановка задачи

Возьмем за основу схему винеровской фильтрации [1] (рис. 1). Имеется полезный скалярный сигнал $q$ из некоторого множества возможных сигналов $Q$. Пусть в системе на него воздействует аддитивная скалярная помеха $f$ из некоторого множества возможных помех $F$. Конструктивные способы описания множеств $Q$ и $F$ будут предложены ниже. Пусть сумма полезного сигнала и помехи проходит через дискретный по времени линейный фильтр с $z$-передаточной функцией $W$, результирующий сигнал обозначим $y$. Положим, что задана устойчивая $z$-передаточная функция желаемого (идеального) линейного преобразования полезного сигнала $W_{\text{ид}}$, результат которого обозначим $y_{\text{ид}}$. Тогда разность $y$ и $y_{\text{ид}}$ будет определять ошибку фильтрации $\varepsilon$. В задачах проектирования следящих систем практический интерес представляет ошибка в установившемся режиме. Поэтому положим начальные условия нулевыми, а длительность работы системы — бесконечной. Тогда

$$\varepsilon(k) = \sum_{i=0}^{k} (w_{\text{ид}}(i) - w(i))q(k-i) - \sum_{i=0}^{k} w(i)f(k-i), \tag{1}$$

где $k$ — номер такта квантования (дискретное время), $w$ и $w_{\text{ид}}$ — дискретные весовые функции (импульсные переходные характеристики) фильтра $W$ и идеального преобразования $W_{\text{ид}}$ соответственно.

Будем оценивать качество фильтрации при конкретных реализациях воздействий $q(\cdot)$ и $f(\cdot)$ $l_\infty$-нормой ошибки $\varepsilon$, т. е. максимальным значением $|\varepsilon|$ в течение процесса. Чем меньше эта величина, тем лучше. Здесь и далее запись вида $x(\cdot)$ означает всю траекторию (историю изменения) функции $x$ и показывает, что речь идет о функциональной зависимости, а не о мгновенном значении на $k$-м шаге $x(k)$. Качество фильтрации $I$ в целом будем оценивать наихудшей (максимальной) нормой $\varepsilon$, достигаемой при допустимых воздействиях $q(\cdot)$ и $f(\cdot)$, при условии, что данный максимум существует:

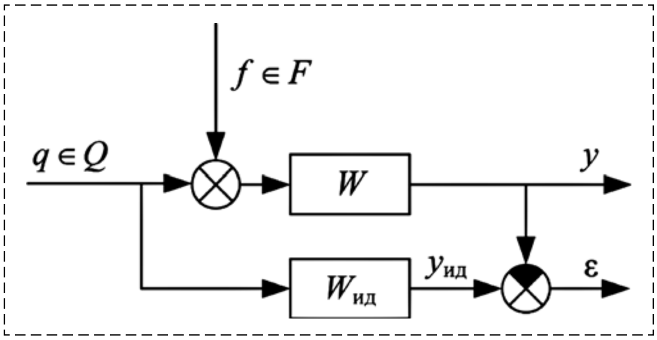


**Рис. 1. Исходная схема фильтрации**

$$I(Q, F, w_{\text{ид}}(\cdot), w(\cdot)) = \max_{\substack{q(\cdot)\in Q \\ f(\cdot)\in F}} \max_{0\le k<\infty} \left| \sum_{i=0}^{k} (w_{\text{ид}}(i) - w(i))q(k-i) - \sum_{i=0}^{k} w(i)f(k-i) \right|. \tag{2}$$

Заметим, что вопрос существования максимума определяется свойствами множеств $Q$ и $F$. Сформулируем следующую задачу, которую назовем задачей $l_\infty$-оптимальной линейной фильтрации: для заданных множеств воздействий $Q$ и $F$, при которых существует максимум выражение (2), и желаемого преобразования полезного сигнала $W_{\text{ид}}$ найти фильтр, весовая функция которого $w_{\text{опт}}$ минимизирует функционал качества (2), если такой минимум существует:

$$w_{\text{опт}}(Q, F, w_{\text{ид}}(\cdot)) = \arg\min_{w(\cdot)} I(Q, F, w_{\text{ид}}(\cdot), w(\cdot)). \tag{3}$$

## Задающие устройства

Вычисление функционала качества (2) является дискретным аналогом задачи Б. В. Булгакова о накоплении возмущений [8] для системы с двумя входами. Классическое решение предполагает ограниченные по модулю внешние сигналы, однако у реальных сигналов всегда ограничена мощность, и, как следствие, значение производных. Вместе с тем, на практике обычно нет строгого формального описания множеств сигналов $Q$ и $F$, заданы лишь некоторые характеристики этих множеств — к примеру, граничные значения амплитуды, скорости, частоты и т. п. Похожая проблема возникает и со стохастическими подходами, где ряд теоретических результатов получен для белого шума. Чтобы решать прикладные задачи, в модель вводят формирующие фильтры [9], преобразующие белый шум в необходимый цветной шум. Поступим аналогично. Положим, что воздействия $q$ и $f$ поступают в модель с выходов дополнительных линейных звеньев $W_g$ и $W_v$, все собственные числа $z_s$ которых либо лежат в единичной окружности $|z_s| < 1$ (звено устойчиво), либо $z_s = 1$ (звено содержит дискретную по времени реализацию интегрирования). Звенья $W_g$ и $W_v$ обладают собственными входами $g$ и $v$ соответственно (рис. 2), ограниченными по модулю. Не теряя общности, положим это ограничение единичным.

Входные сигналы $g$ и $v$ могут быть любыми в пределах данного ограничения — случайными, гармоническими, кусочно-линейными и т. д. Поэтому множества $Q$ и $F$ получаются гораздо богаче, чем при использовании белого шума. При этом из ограниченности $g$ и $v$ по модулю и характера ограничений на собственные числа следует ограниченность по модулю исходных входных сигналов $q$ и $f$ либо нескольких их производных. К примеру, если $W_g$ — интегратор, то множество $Q$ будет состоять из сигналов с ограниченной по модулю скоростью. Возможность точного ограничения по модулю характеристик сигналов качественно отличает предлагаемый подход от стохастических. Поэтому, во избежание путаницы с формирующими фильтрами для случайного шума, предлагается самостоятельное название звеньев $W_g$ и $W_v$ — задающие устройства (ЗУ) [10].

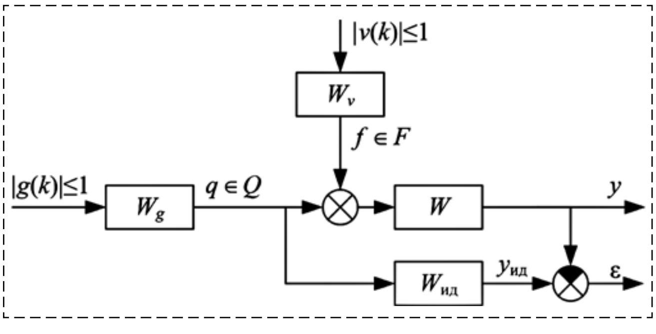


**Рис. 2. Схема фильтрации после введения дополнительных звеньев**

Как и в случае с формирующими фильтрами, в каждой практической задаче модели ЗУ $W_g$ и $W_v$ необходимо выбрать исходя из требуемых свойств $Q$ и $F$. Рассмотрим два метода выбора ЗУ на примере $W_g$. Первый метод предназначен для задач, в которых можно определить максимальные по модулю значения сигналов и их производных. К примеру, если $q$ — это дискретное по времени представление координаты какого-то подвижного звена, то из условия ограниченности скорости, силы и мощности перемещения можно получить неравенства вида $|\dot{q}| \leqslant \dot{q}_{\max}$, $|\ddot{q}| \leqslant \ddot{q}_{\max}$, $|\dot{q} \cdot \ddot{q}| \leqslant (\dot{q}\ddot{q})_{\max}$, где $\dot{q}$ и $\ddot{q}$ — дискретные по времени представления скорости и ускорения данного звена, $\dot{q}_{\max}$, $\ddot{q}_{\max}$ и $(\dot{q}\ddot{q})_{\max}$ — наложенные ограничения. Другой пример, распространенный в инженерной практике — заданный конечный набор типовых или тестовых реализаций сигнала $q_1$, $q_2$ и т. д. По ним можно явно вычислить максимальное по модулю значение самого сигнала $q_{\max}$, его производных или любых их функционалов. Потребуем, чтобы область достижимости [11] ЗУ $W_g$ полностью покрывала область достижимости возможных реализаций сигнала $q$. Данный метод детально проработан для случая ограничений самого сигнала и его скорости, либо ограничений любых двух последовательных производных сигнала (к примеру, скорости и ускорения). Расчетные формулы и алгоритм выбора структуры и параметров ЗУ приведены в работе [12].

Второй метод предназначен для задач, где ограничены частотные свойства сигнала $q$, к примеру, заданы полосы пропускания по некоторому уровню амплитуды самого сигнала или некоторой его производной. Будем рассматривать только периодические входные сигналы ЗУ $g$ и первые гармоники выходного сигнала $q$. Из условия $|g| \leqslant 1$ следует, что максимальная амплитуда первой гармоники $q$ достигается, если $g$ — симметричный единичный меандр. Поэтому в качестве $W_g$ необходимо подобрать линейный фильтр, который при подаче на вход единичных меандров обеспечивает заданные уровни их ослабления или усиления. Это классическая задача, разобранная, к примеру, в работе [1]. Оба рассмотренных метода выбора ЗУ (по области достижимости и по полосам пропускания) можно применять и для ЗУ $W_v$.

После введения ЗУ сигнал ошибки (1) можно выразить через $g$ и $v$:

$$\varepsilon(k)=\sum_{i=0}^{k}\left[\sum_{j=0}^{i}(w_{\text{ид}}(j)-w(j))w_g(i-j)\right]g(k-i)-$$
$$-\sum_{i=0}^{k}\left[\sum_{j=0}^{i}w(j)w_v(i-j)\right]v(k-i), \tag{4}$$

где $w_g$ и $w_v$ — весовые функции $W_g$ и $W_v$ соответственно. Выражения, стоящие в (4) в квадратных скобках, являются весовыми функциями последовательного соединения звеньев, через которые проходят сигналы $g$ и $v$ на рис. 2. Функционал качества (2) примет вид:

$$I(w_g(\cdot),w_v(\cdot),w_{\text{ид}}(\cdot),w(\cdot))=$$
$$=\max_{\substack{|g(\cdot)|\leqslant 1\\ |v(\cdot)|\leqslant 1}}\max_{0\leqslant k<\infty}\left|\sum_{i=0}^{k}\left[\sum_{j=0}^{i}(w_{\text{ид}}(j)-w(j))w_g(i-j)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\, g(k-i)-\sum_{i=0}^{k}\left[\sum_{j=0}^{i}w(j)w_v(i-j)\right]v(k-i)\right|.$$

Используя результаты Б. В. Булгакова [8], имеем, что данный максимум существует, и получаем явное выражение для него:

$$I(w_g(\cdot),w_v(\cdot),w_{\text{ид}}(\cdot),w(\cdot))=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\left|\sum_{j=0}^{i}(w_{\text{ид}}(j)-w(j))w_g(i-j)\right|+ \tag{5}$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\left|\sum_{j=0}^{i}w(j)w_v(i-j)\right|.$$

Отметим, что если числовые ряды в соотношении (5) сходятся к некоторым конечным величинам, то (5) является выпуклым ограниченным снизу функционалом относительно каждой из входящих в него весовых функций, что снимает вопросы о существовании минимума в исходном выражении (3). Саму же исходную задачу $l_\infty$-оптимальной линейной фильтрации после выбора ЗУ можно сформулировать следующим образом: для выбранных ЗУ $W_g$ и $W_v$ и желаемого преобразования полезного сигнала $W_{\text{ид}}$ найти фильтр, весовая функция которого $w_{\text{опт}}$ минимизирует следующий функционал качества:

$$w_{\text{опт}}(w_g(\cdot),w_v(\cdot),w_{\text{ид}}(\cdot))=$$
$$=\arg\min_{w(\cdot)}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\sum_{j=0}^{i}(w_{\text{ид}}(j)-w(j))w_g(i-j)\right|+$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\left|\sum_{j=0}^{i}w(j)w_v(i-j)\right|.$$

## Сходимость рядов в функционале качества

Исследуем сходимость рядов в выражении (5). Она однозначно связана с устойчивостью системы на рис. 2, так как весовая характеристика абсолютно суммируема тогда и только тогда, когда система устойчива. Если оба ЗУ $W_g$ и $W_v$ устойчивы, то при любом устойчивом $W$ система на рис. 2 будет устойчива, и выражение (5) сходится. Рассмотрим теперь случай, когда одно или оба ЗУ $W_g$ и $W_v$ имеют одно или несколько собственных чисел, равных 1 (т. е. звено лежит на границе устойчивости из-за наличия в нем дискретной по времени реализации интегрирования). Отсюда следует, что сигнал на выходе ЗУ или несколько его первых производных неограничены. При составлении математической модели неограниченные сигналы могут возникнуть, к примеру, во вращающихся следящих системах, которые могут начинать работу с произвольного по величине начального угла и затем совершать любое число оборотов. Классические стохастические методы обычно не решают таких задач, так как введение интегратора в формирующий фильтр приводит к бесконечно большой дисперсии процесса на выходе.

Обозначим $N_g$ и $N_v$ — кратность собственных чисел $z = 1$ в передаточных функциях $W_g$ и $W_v$ соответственно, $N_g \geqslant 0$, $N_v \geqslant 0$. Первое слагаемое в выражении (5) сходится тогда и только тогда, когда разность $W - W_{\text{ид}}$ содержит ноль $z = 1$ порядка не меньше $N_g$:

$$W^{(p)}(1)-W_{\text{ид}}^{(p)}(1)=0,\quad p=0,\ldots,N_g-1, \tag{6}$$

где $W^{(p)}$ и $W_{\text{ид}}^{(p)}$ — производные по $z$ порядка $p$ соответствующих передаточных функций. Второе слагаемое в выражении (5) сходится тогда и только тогда, когда $W$ содержит ноль $z = 1$ порядка не меньше $N_v$, т. е.

$$W^{(r)}(1) = 0,\ r = 0, \ldots, N_v - 1. \tag{7}$$

Решим систему уравнений (6), (7). Если $N_v \geqslant N_g$, то она равносильна системе

$$\begin{aligned}&W_{\text{ид}}^{(p)}(1)=0,\quad p=0,\ldots,N_g-1;\\&W^{(r)}(1)=0,\quad r=0,\ldots,N_v-1;\\&N_v\geqslant N_g.\end{aligned} \tag{8}$$

Если $N_v < N_g$, то система (6), (7) равносильна системе

$$\begin{aligned}
&W_{\text{ид}}^{(p)}(1) = 0, \quad p = 0, \ldots, N_v - 1;\\
&W^{(r)}(1) = \begin{cases} 0, & r < N_v;\\ W_{\text{ид}}^{(r)}(1), & N_v \leqslant r < N_g, \end{cases}\\
&r = 0, \ldots, N_g - 1;\\
&N_v < N_g.
\end{aligned} \tag{9}$$

Введем обозначение $N_{\max} = \max(N_v, N_g)$, $N_{\min} = \min(N_v, N_g)$. Объединяя системы (8) и (9), получаем следующие условия сходимости рядов в выражении (5):

$$W_{\text{ид}}^{(p)}(1) = 0,\ p = 0, \ldots, N_{\min} - 1 \text{ при } N_{\min} > 0; \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&W^{(r)}(1) = \begin{cases} 0, \ r < N_v;\\ W_{\text{ид}}^{(r)}(1),\ N_v \leqslant r < N_g, \end{cases}\\
&r = 0, \ldots, N_{\max} - 1.
\end{aligned} \tag{11}$$

Условие (10) накладывает ограничения только на параметры $W_{\text{ид}}$, $W_g$ и $W_v$, которые заданы. Поэтому при $N_{\min} > 0$ (10) является необходимым условием существования решения поставленной задачи $l_\infty$-оптимальной линейной фильтрации (3). Условие (11) накладывает ограничения на искомую величину $W$. Его нужно выполнить в процессе решения задачи.

## Фильтры с конечной импульсной характеристикой

Положим, что $W_v$, $W_g$ и $W_{\text{ид}}$ удовлетворяют необходимому условию существования решения (10). Ограничим задачу $l_\infty$-оптимальной линейной фильтрации (3) только множеством фильтров с конечной импульсной характеристикой [2, 5] (КИХ-фильтры) порядка не более $n$. Это означает, что

$$w(j) = 0 \ \forall \ j > n. \tag{12}$$

Будем рассматривать только случай, когда

$$n > N_{\max}. \tag{13}$$

Задача (3) превращается в задачу конечномерной оптимизации с $n + 1$ неизвестной величиной $w(j)$, $j = 0 \ldots n$. Передаточная функция фильтра имеет вид

$$W(z) = \sum_{j=0}^{n} w(j) z^{-j}.$$

Ее производные

$$W^{(r)}(z) = r! \sum_{j=0}^{n} w(j) \binom{-j}{r} z^{-(j+r)}, \tag{14}$$

где $\binom{-j}{r} = (-1)^r \binom{j+r-1}{r}$ — обобщенный на отрицательные числа биномиальный коэффициент [13].

Подставив выражение (14) в условие (11), получаем систему из $N_{\max}$ линейных уравнений с $n + 1$ неизвестной $w(j)$. Обозначим $w = (w(j))$ — вектор-столбец неизвестных величин и перейдем к векторно-матричной форме записи системы:

$$Cw = d, \tag{15}$$

где $C$ — матрица биномиальных коэффициентов

$$\begin{aligned}
&C = (c_{r+1,\, j+1}),\ r = 0, \ldots, N_{\max} - 1,\\
&j = 0, \ldots, n;\ c_{r+1,\, j+1} = \binom{-j}{r};
\end{aligned} \tag{16}$$

$d$ — вектор-столбец длины $N_{\max}$ с элементами вида

$$\begin{aligned}
&d = (d_{r+1}),\ r = 0, \ldots, N_{\max},\\
&d_{r+1} = \begin{cases} 0, & r < N_v,\\ \dfrac{W_{\text{ид}}^{(r)}(1)}{r!}, & N_v \leqslant r < N_g. \end{cases}
\end{aligned} \tag{17}$$

Из свойств матрицы биномиальных коэффициентов [14] следует, что любой минор $C$ порядка $N_{\max}$ не равен 0 и $\operatorname{rank}(C) = \operatorname{rank}(C|d) = N_{\max}$, т. е. система (15) — (17) совместна. Поэтому при выполнении ограничений на условие задачи (10) и ограничения на порядок фильтра (13) всегда существует КИХ-фильтр, при котором функционал качества (5) сходится. Импульсные характеристики всех фильтров, при которых (5) сходится, удовлетворяют системе (15).

### Численный поиск оптимального фильтра

Заменим полную сумму ряда (5) на частичную сумму первых $K + 1$ элементов, $K > n$:

$$I(w_g(\cdot), w_v(\cdot), w_{\text{ид}}(\cdot), w(\cdot)) = \\ = \sum_{i=0}^{K} \left| \sum_{j=0}^{i} (w_{\text{ид}}(j) - w(j)) w_g(i-j) \right| + \\ + \sum_{i=0}^{K} \left| \sum_{j=0}^{i} w(j) w_v(i-j) \right|. \tag{18}$$

Величину $K$, достаточную для вычисления (5) с необходимой точностью, в каждом случае необходимо выбирать индивидуально исходя из скорости сходимости весовых характеристик $w_g$, $w_v$ и $w_{\text{ид}}$. Подставляя (12) в выражение (18), получаем

$$I(w_g(\cdot), w_v(\cdot), w_{\text{ид}}(\cdot), w(\cdot)) = \\ = \sum_{i=0}^{n} \left| \sum_{j=0}^{i} w(j) w_g(i-j) - \sum_{j=0}^{i} w_{\text{ид}}(j) w_g(i-j) \right| + \\ + \sum_{i=n+1}^{K} \left| \sum_{j=0}^{n} w(j) w_g(i-j) - \sum_{j=0}^{i} w_{\text{ид}}(j) w_g(i-j) \right| + \\ + \sum_{i=0}^{n} \left| \sum_{j=0}^{i} w(j) w_v(i-j) \right| + \sum_{i=n+1}^{K} \left| \sum_{j=0}^{n} w(j) w_v(i-j) \right|. \tag{19}$$

Обозначим

$$a'_{i+1,j+1} = \begin{cases} w_g(i-j), & i \geqslant j, \\ 0, & i < j; \end{cases}$$
$$a''_{i+1,j+1} = \begin{cases} w_v(i-j), & i \geqslant j, \\ 0, & i < j; \end{cases}$$
$$b'_{i+1} = -\sum_{j=0}^{i} w_{\text{ид}}(j) w_g(i-j); \tag{20}$$
$$b''_{i+1} = 0;$$
$$i = 0, \ldots, K, \quad j = 0, \ldots, n.$$

Подставляя (20) в выражение (19), получаем

$$I(w_g(\cdot), w_v(\cdot), w_{\text{ид}}(\cdot), w(\cdot)) = \\ = \sum_{i=0}^{K} \left| \sum_{j=0}^{i} w(j) a'_{i+1,\, j+1} + b'_{i+1} \right| + \\ + \sum_{i=0}^{K} \left| \sum_{j=0}^{i} w(j) a''_{i+1,\, j+1} + b''_{i+1} \right|. \tag{21}$$

Введем матрицы

$$A' = (a'_{i+1,j+1}), \quad A'' = (a''_{i+1,j+1}), \quad A = \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}, \tag{22}$$
$$i = 0, \ldots, K, \quad j = 0, \ldots, n,$$

и вектор-столбцы

$$b' = (b'_{i+1}),\ b'' = (b''_{i+1}),\ b = \begin{pmatrix} b' \\ b'' \end{pmatrix},\ i = 0, \ldots, K. \tag{23}$$

Тогда выражение (21) можно записать в форме

$$I(w_g(\cdot), w_v(\cdot), w_{\text{ид}}(\cdot), w(\cdot)) = \|Aw + b\|_1. \tag{24}$$

Исходная задача (3) принимает вид

$$w_{\text{опт}}(Q, F, w_{\text{ид}}(\cdot)) = \arg\min_{w} \|Aw + b\|_1. \tag{25}$$

В итоге, исходная задача сведена к известным задачам $l_1$-оптимизации [15] и полиэдральной оптимизации [16]. Ее решение можно найти численно, используя как специальные методы полиэдральной оптимизации [16], так и общие методы негладкой выпуклой оптимизации [17].

Отметим, что в векторно-матричной форме записи легко обеспечить выполнение условия сходимости (15). Общее решение (15) имеет вид

$$w = Mw^* + h, \tag{26}$$

где $w^*$ — новый вектор-столбец независимых переменных длины $n + 1 - N_{\max}$; $M$ — матрица размера $(n + 1) \times (n + 1 - N_{\max})$; $h$ — вектор-столбец длины $n + 1 - N_{\max}$. Значения $M$ и $h$ можно вычислить исходя из $C$ и $d$ методами линейной алгебры. Подставив (26) в выражение (24), получаем

$$I(w_g(\cdot), w_v(\cdot), w_{\text{ид}}(\cdot), w(\cdot)) = \|AMw^* + Ah + b\|_1,$$

а задача оптимизации (25) принимает вид

$$w_{\text{опт}}(Q, F, w_{\text{ид}}(\cdot)) = \\ = M\left(\arg\min_{w^*} \|AMw^* + Ah + b\|_1\right) + h. \tag{27}$$

Таким образом, задача вновь сведена к $l_1$-оптимизации.

### Алгоритм синтеза оптимального фильтра

Изложенные результаты позволяют синтезировать $l_\infty$-оптимальные КИХ-фильтры для широкого круга прикладных задач. Исходными данными являются: требуемый такт квантования и порядок фильтра $n$, описание класса полезных сигналов $Q$ и класса помех $F$, $z$-передаточная функция желаемого идеального преобразования полезного сигнала $W_{\text{ид}}(z)$, которое должен реализовать фильтр. Сформулируем алгоритм.

1. Подбираем ЗУ $W_g$ и $W_v$, порождающие классы сигналов $Q$ и $F$ соответственно (см. раздел 2), составляем их $z$-передаточные функции для заданного такта квантования.

2. Определяем кратность $N_g$ и $N_v$ собственных чисел $z = 1$ в передаточных функциях $W_g$ и $W_v$ соответственно, вычисляем $N_{\min}$ и $N_{\max}$. В случае $N_{\min} > 0$ проверяем условие (10). Если оно не выполняется, то задача не имеет решения.

3. Вычисляем весовые характеристики $w_{\text{ид}}$, $w_g$ и $w_v$. Выбираем число тактов $K$, после которого можно с требуемой точностью считать переходные процессы в $w_{\text{ид}}$, $w_g$ и $w_v$ закончившимися.

4. Вычисляем матрицу $A$ и столбец $b$ по формулам (20), (22), (23).

5. Если $N_{\max} = 0$, то решаем задачу оптимизации (25) численно.

6. Если $N_{\max} > 0$, то по формулам (16), (17) вычисляем матрицу $C$ и столбец $d$, затем ищем общее решение системы (15) в виде (26). Численно решаем задачу оптимизации (27).

В результате пп. 5 или 6 получаем решение — вектор весовых коэффициентов оптимального КИХ-фильтра заданного порядка $n$.

### Пример $l_\infty$-оптимального фильтра и его сравнение с классическими фильтрами

Рассмотрим следующую задачу. Дана цифровая система с частотой квантования 100 Гц (частота Найквиста 50 Гц или 314 рад/с). В системе есть полезный сигнал в полосе частот до 1 рад/с, его амплитуда не ограничена, а скорость не может превышать 1 с$^{-1}$. На сигнал наложена помеха с полосой частот от 50 рад/с и выше при максимальной амплитуде 0,01. Необходимо синтезировать цифровой фильтр 20-го порядка для выделения исходного сигнала ($W_{\text{ид}} = 1$). Цель примера — сравнить качество фильтрации, достижимое разными методами при одинаковых условиях (одинаковый порядок фильтра и такт квантования). Погрешность, вносимую различными фильтрами в полезный сигнал, будем оценивать как по $l_\infty$-критерию (18), так и по традиционным частотным критериям — максимальному фазовому запаздыванию и максимальному значению АЧХ передаточной функции ошибки фильтрации $W_{\text{ошибки}} = W - W_{\text{ид}}$ в полосе полезного сигнала.

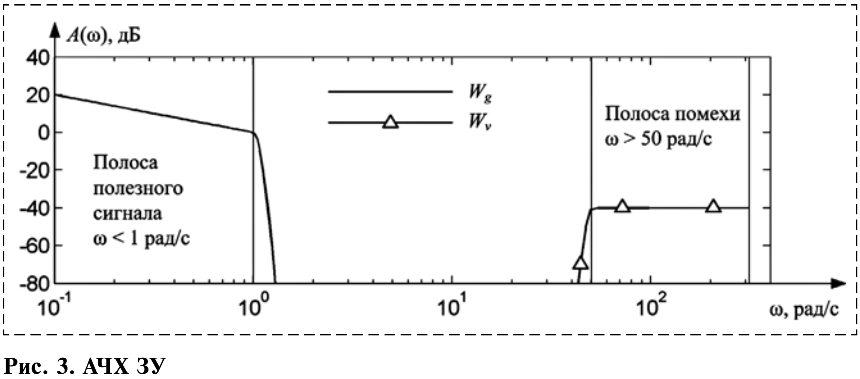


**Рис. 3. АЧХ ЗУ**

В качестве ЗУ для полезного сигнала $W_g$ выберем последовательное соединение дискретного по времени интегратора (переход от сигналов, ограниченных по модулю, к сигналам, ограниченным по скорости) и фильтра нижних частот с полосой пропускания до 1 рад/с. В качестве ЗУ для помехи $W_v$ выберем фильтр верхних частот с полосой пропускания после 50 рад/с и коэффициентом 0,01. Воспользуемся фильтрами Чебышева 2-го рода. Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) $A(\omega)$ ЗУ представлены ниже на рис. 3.

Кратность собственных чисел $z = 1$ в ЗУ $N_g = 1$, $N_v = 0$, $N_{\min} = 0$, $N_{\max} = 1$. Возьмем $K = 45\,000$, за такое число тактов импульсные переходные характеристики ЗУ успевают затухнуть до уровня $10^{-10}$. Матрица $A$ и столбец $b$ имеют 90 002 строки и вычисляются по формулам (20), (22), (23). Так как $N_{\max} > 0$, то находим матрицы $C$ и $d$ по формулам (16), (17):

$$C = (1\ 1\ \dots\ 1),\ d = (1).$$

Система (15) имеет вид

$$\sum_{j=0}^{n} w(j) = 1. \tag{28}$$

Выберем в качестве новых независимых переменных вектор $w^* = (w(0), w(1), \dots, w(n-1))^{\mathrm{T}}$ и выразим $w$ через $w^*$ согласно (26):

$$w = Mw^* + h,\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя $A$, $b$, $M$, $h$ в выражение (27), получаем задачу $l_1$-оптимизации, которую реша-

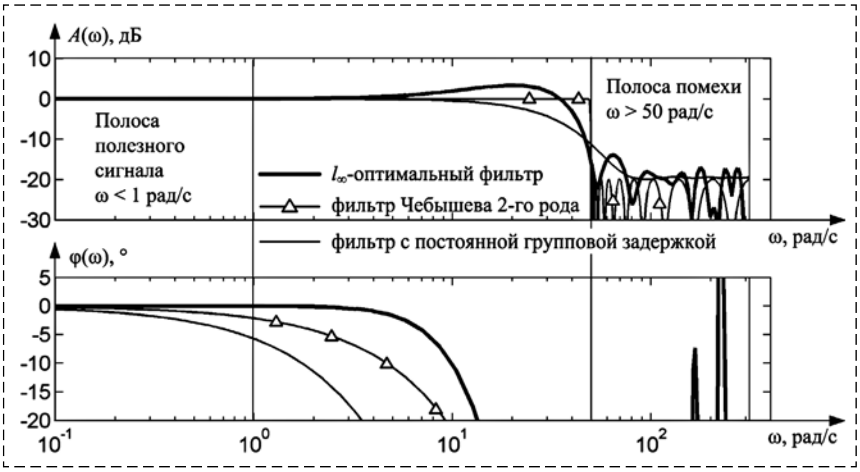


**Рис. 4. АЧХ и ФЧХ различных фильтров**

решена для случая КИХ-фильтров. Полученные фильтры можно использовать для широкого круга прикладных задач теории управления, в которых требуется высокая точность воспроизведения полезного сигнала. Важным случаем таких систем являются следящие системы. Рассмотренный пример показывает, что $l_\infty$-оптимальный фильтр может качественно превосходить традиционные фильтры не только по $l_\infty$-критерию, но и по частотным критериям точности воспроизведения полезного сигнала.

**Значения критериев качества полученных фильтров**

| Критерий | $l_\infty$-оптимальный фильтр | Фильтр Чебышева | Фильтр с линейной ФЧХ |
|---|---|---|---|
| $l_\infty$ | 0,0158 | 0,2 | 0,121 |
| Максимальное фазовое запаздывание | 0,01° | 2,1° | 5,7° |
| Максимальное значение АЧХ ошибки | −49 дБ | −29 дБ | −20 дБ |

ем методом наискорейшего субградиентного спуска [17]. АЧХ $A(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ полученного фильтра приведены на рис. 4. Как видно, фильтр обеспечивает ослабление в полосе помехи на уровне около −20 дБ с практически нулевым фазовым запаздыванием в полосе полезного сигнала.

Там же на рис. 4 приведены характеристики фильтра Чебышева 2-го рода и фильтра с линейной ФЧХ (постоянной групповой задержкой). Оба фильтра имеют тот же порядок (20-й) и сопоставимый уровень подавления помехи. Но, как видно по ФЧХ, классические фильтры вносят некоторое фазовое запаздывание в полезный сигнал. Численные значения различных критериев качества приведены в таблице. Чем меньше значения критериев — тем лучше. Как видно из таблицы, $l_\infty$-оптимальный фильтр в данном примере значительно превосходит классические фильтры и по $l_\infty$-критерию, и по частотным показателям качества.

## Заключение

В статье предложена постановка задачи $l_\infty$-оптимальной линейной фильтрации, которая

### Список литературы


1. **Изерман Р.** Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984.
2. **Рабинер Л., Гоулд Б.** Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
3. **Başar T., Bernhard P.** $H_\infty$-Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach. Springer, 2008.
4. **Куркин О. М., Коробочкин Ю. Б., Шаталов С. А.** Минимаксная обработка информации. М.: Энергоатомиздат, 1990.
5. **Каппелини В., Константинидис А. Дж., Эмилиани П.** Цифровые фильтры и их применение. М.: Энергоатомиздат, 1983.
6. **Филимонов Н. Б.** Проблема качества процессов управления: смена оптимизационной парадигмы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 12. С. 2—10.
7. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и Телемеханика. 2005. № 5. С. 7—46.
8. **Булгаков Б. В.** О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными коэффициентами // Доклады АН СССР. Т. 51, вып. 5, 1946. С. 339—342.
9. **Бендат Дж.** Основы теории случайных шумов и ее применения. М.: Наука, 1965.
10. **Макаров Н. Н.** Гарантированная точность в проектировании следящих систем // Известия вузов. Электромеханика. 1980. № 7. С. 744—747.
11. **Черноусько Ф. Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука. Физматлит, 1988.
12. **Макаров Н. Н., Семашкин В. Е.** Оценка и оптимизация предельных отклонений динамических систем управления при сложных возмущениях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012, № 3. С. 13—29.
13. **Sprugnoli R.** Negation of binomial coefficients // Discrete Mathematics, Vol. 308, 2008, pp. 5070—5077.
14. **Edelman A., Strang G.** Pascal Matrices // American Mathematical Monthly, Vol. 111, No. 3, 2004, pp. 189—197.
15. **Поляк Б. Т.** Методы $l_1$-оптимизации в управлении и фильтрации. Доклад на общем пленарном заседании // 3-я мультиконференция по проблемам управления. С.-Пб., 2010.
16. **Пупков К. А., Егупов Н. Д., Филимонов Н. Б.** и др. Методы классической и современной теории автоматического управления. Учебник в пяти томах. Т. 5. Методы современной теории автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
17. **Нестеров Ю. Е.** Введение в выпуклую оптимизацию. М.: Изд-во МЦНМО, 2010.

# Minimax $l_\infty$-Optimal at Time-Domain Linear Filtering

**N. N. Makarov,** nnm@sau.tsu.tula.ru, **V. E. Semashkin,** sveil@mail.ru,
Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation

*Corresponding author:* **Makarov Nikolay N.**, Ph. D., Professor,
Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation, e-mail: nnm@sau.tsu.tula.ru

*Accepted on April 27, 2018*

*The article is devoted to one approach to optimal filtration. We consider a Wiener filter scheme. The proposed statement has two differences from the classical one. The first difference is that the input influences (useful signal and interference) are limited to the maximum absolute values, and not variances. The second difference is that the quality criterion is also the maximum absolute value, and not the variance of the error. Thus, the quadratic criterion in Wiener's formulation is replaced by a criterion in the form of the $l_\infty$-norm (Chebyshev-norm). Therefore, the proposed problem is called the $l_\infty$-optimal filtering problem. An original way of selecting input filters for signals for this task is proposed. The method allows creating sets of signals with complex limitations of the absolute values of the signals and their derivatives. The calculation of the quality criterion reduces to Bulgakov's problem of the accumulation of perturbations. For a system with discrete time, the quality criterion is written in the form of a sum of an infinite series. Convergence conditions of the series are obtained. If the conditions of convergence are satisfied, an infinite series with any desired accuracy can be replaced by its partial sum. In this case, a quality criterion is obtained in the form of the $l_1$-norm of the impulse response of the filter. It is proposed to numerically search for the impulse response of an optimal filter by the method of subgradient descent. An example of searching for a $l_\infty$-optimal filter is considered. The result is compared with classic bandpass filters. The possibility of reducing the phase delay of the filter in the passband is shown.*

***Keywords:*** *optimal filtering, minimax filtering, servo-systems, finite impulse response filters*

*For citation*:

**Makarov N. N., Semashkin V. E.** Minimax $l_\infty$-optimal at Time-Domain Linear Filtering, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 8, pp. 499—507.

DOI: 10.17587/mau.19.499-507

## References

1. **Isermann R.** Digital control systems. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
2. **Rabiner L. R., Gold B.** Theory and application of digital signal processing. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1975.
3. **Başar T., Bernhard P.** $H_\infty$-Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach. Springer, 2008.
4. **Kurkin O. M., Korobochkin Ju. V., Shatalov S. A.** *Minimaxnaja obrabotka informacii.* (Minimax information processing), Moscow, Jenergoatomizdat, 1990 (in Russian).
5. **Cappellini V., Constantinides A. G., Emiliani P. E.** Digital filters and their applications, London, Academic Press, 1978.
6. **Filimonov N. B.** *Problema kachestva processov upravlenija: smena optimizacionnoj paradigmy* (The problem of quality of control processes: change of an optimizing paradigm), *Mehatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2010, no. 12, pp. 2—10 (in Russian).
7. **Polyak B. T., Shcherbakov P. S.** Hard problems in linear control systems theory: Possible approaches to solution, *Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, iss. 5, pp. 681—718.
8. **Bulgakov B. V.** *O nakoplenii vozmyshhenij v linejnyh kolebatelnyh sistemah s postojannymi koefficientami* (About disturbances accumulation in linear oscillation systems with constant coefficients), Doklady AN SSSR, 1946, vol. 51, iss. 5, pp. 339—342 (in Russian).
9. **Bendat J.** Principles and applications of random noise theory, Wiley, 1958.
10. **Makarov N. N.** *Garantirovannaja tochnost v proektirovanii sledjashhih system* (Guaranteed precision in tracing system design), *Izvestija Vuzov. Jelektromehanika*, 1980, vol. 7, pp. 744—747 (in Russian).
11. **Chernousko F. L.** State Estimation for Dynamic Systems, CRC Press, Boca Raton, 1994.
12. **Makarov N. N., Semashkin V. E.** Estimation and Optimization of Maximum Deviations in Dynamical Control System under Complexly Shaped Disturbances, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, no. 3, pp. 349—365.
13. **Sprugnoli R.** Negation of binomial coefficients, Discrete Mathematics, 2008, vol. 308, pp. 5070—5077.
14. **Edelman A., Strang G.** Pascal Matrices, *American Mathematical Monthly*, 2004, vol. 111, no. 3, pp. 189—197.
15. **Poljak B. T.** *Metody $l_1$-optimizacii v upravlenii i filtracii. Doklad na obshhem plenarnom zasedanii* ($l_1$-optimization methods in control and filtering), *3-ja multikonferencija po problemam upravlenija,* S.-Pb., 2010 (in Russian).
16. **Pupkov K. A., Egupov N. D., Filimonov N. B. and others.** *Metody klassicheskoj i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravlenija* (Methods of classic and modern control systems theory), vol. 5. *Metody sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravlenija* (Methods of modern control systems theory), Moscow, Publishing house of MGTU im. N. Je. Baumana, 2004 (in Russian).
17. **Nesterov Y.** Introductory lectures on convex optimization: a basic course, Kluwer, 2004.