

3. **Zadeh L., Dezoer Ch.** *Teorija linejnyh sistem (Metod prostranstva sostojanij)* (Theory of Linear Systems (State Space Method)), Moscow, Nauka, 1970, 703 p. (in Russian).
4. **Andreev Ju. N.** *Upravlenie konechnomernymi linejnymi ob'ektami* (Control of finite-dimensional linear objects), Moscow, Nauka, 1976, 424 p. (in Russian).
5. **Grigor'ev V. V., Drozdov V. N., Lavrent'ev V. V., Ushakov A. V.** *Sintez diskretnyh reguljatorov pri pomoshhi JeVM* (Synthesis of discrete regulators by computer), Leningrad, Mashinostroenie. Leningr. otd-nie, 1983, 245 p. (in Russian).
6. **Dzhuri Je.** *Impul'snye sistemy avtomaticheskogo regulirovanija* (Pulse control systems), Moscow, Fizmatgiz, 1963, 456 p. (in Russian).
7. **Julius T.** *Modern control theory*, New York, McGraw-Hill Inc., 1964, 427 p.
8. **Shannon C. E.** A Mathematical theory of communication, *Bell System Technical Journal*, 1948, vol. 27, pp. 379–423.
9. **Solodovnikov V. V.** *Osnovy avtomaticheskogo regulirovanija* (Fundamentals of automatic control. Theory), Moscow, Fizmatgiz, 1954, 1117 p. (in Russian).
10. **Besekerskij V. A., Popov E. P.** *Teorija sistem avtomaticheskogo regulirovanija* (Theory of automatic control systems), Moscow, Nauka, 1966, 992 p. (in Russian).
11. **Krasovskij A. A., Pospelov G. S.** *Osnovy avtomatiki i tehnicheskoy kibernetiki* (Fundamentals of Automation and Technical Cybernetics), Moscow — Leningrad, Gosjenepgoizdat, 1962, 600 p. (in Russian).
12. **Kim D. P., Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie**, 2011, no. 5, pp. 15–21 (in Russian).
13. **Dudarenko N. A., Slita O. V., Ushakov A. V.** *Matematicheskie osnovy sovremennoj teorii upravlenija: apparat metoda prostranstva sostojanij: uchebnoe posobie. / Pod red. Ushakova A. V.* (Mathematical foundations of modern management theory: the apparatus of the state space method: a textbook. Ed. Ushakov A. V.), SPb, SPbGU ITMO, 2008, 325 p. (in Russian).
14. **Gajduk A. R.** *Teorija i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravlenija (polinomial'nyj podhod)* (Theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach)), Moscow, Fizmatgiz, 2012, 360 p. (in Russian).
15. **Bystrov S. V., Vunder N. A., Ushakov A. V., Nauchno-tehnicheskij vestnik informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki**, 2016, vol. 16, no. 3, pp. 451–459. (in Russian).
16. **Brasch F. M., Jr. and J. B. Pearson.** Pole placement using dynamic compensators, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1970, vol. 15, no. 1, pp. 34–43.

УДК 681.5.015.75

DOI: 10.17587/mau.18.604-611

В. Н. Якимов, д-р техн. наук, проф., yvnr@hotmail.com,
В. И. Батищев, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой, vib@list.ru,
А. В. Машков, ст. преподаватель, mavstu@list.ru,
 Самарский государственный технический университет

Статистическая идентификация линейных динамических систем с использованием знакового аналого-стохастического квантования входного и выходного сигналов¹

Задача статистической идентификации импульсной переходной функции линейной динамической системы решается с использованием знакового аналого-стохастического квантования входного и выходного сигналов. Данный вид квантования позволил перейти от обработки многозарядных отсчетов входного и выходного сигналов к обработке целочисленных отсчетов времени, определяемых сменой знака результата квантования. Получены соотношения для последовательного вычисления отсчетов импульсной переходной функции, которые не требуют предварительной оценки корреляционных функций.

Ключевые слова: статистическая идентификация, динамическая система, стохастическое квантование, знаковый сигнал, отсчет времени

Введение

Импульсная переходная функция является одной из наиболее распространенных форм математического описания во временной области оператора преобразования линейных динамических систем. Классический подход к идентификации импульсной переходной функции предполагает использование предварительной информации о структуре системы и наблюдаемых сигналах на ее входе и выходе. В соответствии с данным подходом достаточно полно разработаны теоретические основы и алгоритмическое обеспечение для количественной оценки импульсной переходной функции [1–5].

Однако быстрое развитие науки, техники и инженерных технологий ведет к необходимости совершенствования существующих методов идентификации систем [6, 7]. В частности, это касается дальнейшего развития методов идентификации, основанных на бинарном представлении (бинарном квантовании) сигналов исследуемой системы. В последнее время наблюдается определенный интерес к подобному роду методов. Использование таких методов на практике в основном мотивировано тем, что они обеспечивают снижение вычислительных затрат и приводят к техническому упрощению построения аппаратуры приема и преобразования сигналов. Общий подход к идентификации систем на основе обработки данных наблюдений, представляющих собой бинарные временные последо-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-08-00269).

вательности, представлен в работе [8]. В работе [9] рассматривается возможность формирования оптимальных входных воздействий, которые могут быть использованы для построения эффективных процедур, обеспечивающих идентификацию параметров модели конечной импульсной характеристики произвольного порядка. В работе [10] решается задача построения рекурсивного алгоритма идентификации для оценивания неизвестных параметров конечной импульсной характеристики. Проблеме идентификации линейных систем по бинарным значениям наблюдений с различной структурной неопределенностью особое внимание уделено в работе [11]. В статье [12] приведена методика идентификации систем, основанная на использовании комбинации коротких и независимых циклов бинарных измерений, что обеспечивает преимущество по отношению к методам, эффективность которых может быть снижена из-за ограничений, накладываемых на длительности сигналов возбуждения.

Несмотря на преимущества, обеспечиваемые бинарным квантованием, основной проблемой его использования в процессе идентификации систем является то, что оно ведет к снижению объема информации об исследуемых сигналах. Кроме того, как правило, предполагается квантование только выходного сигнала, а входной сигнал считается известным или задается как специально сформированный тестирующий сигнал с известными характеристиками. Однако на практике процедура идентификации с применением специальных тестирующих сигналов может быть затруднена и даже может привести к нарушению технологического процесса нормального функционирования системы. Поэтому целесообразно, сохранив преимущества бинарного представления результатов экспериментальных наблюдений, обеспечить идентификацию импульсной переходной функции в условиях естественного наблюдения за входными и выходными сигналами системы. С этой точки зрения особый интерес представляет нахождение импульсной переходной функции на основе метода статистической идентификации.

Постановка задачи

Если сигналы на входе $X(t)$ и выходе $Y(t)$ системы являются случайными функциями, то задача статистической идентификации в классическом варианте сводится к решению интегрального уравнения Винера—Хопфа [1, 3, 5, 13]:

$$R_{XY}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{XX}(v)h(\tau - v)dv,$$

где $R_{XX}(\tau)$ — корреляционная функция (КФ) сигнала $X(t)$; $R_{XY}(\tau)$ — взаимная корреляционная функ-

ция (ВКФ) сигналов $X(t)$ и $Y(t)$; $h(t)$ — импульсная переходная функция системы.

В процессе решения уравнения Винера—Хопфа исходят из необходимости учета условия физической реализуемости динамической системы. Согласно этому условию при $t < 0$ импульсная переходная функция $h(t) = 0$. Также принимают во внимание, что для устойчивых систем будет справедливо свойство $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$. Поэтому на практике про-

цедуру идентификации импульсной переходной функции $h(t)$ осуществляют для интервала времени $0 \leq t \leq t_{\max}$, где t_{\max} — момент времени, начиная с которого ее значения не выходят за пределы предельно установленного коридора [1]. Кроме того, от теоретических КФ $R_{XX}(\tau)$ и ВКФ $R_{XY}(\tau)$ пе-

реходят к их оценкам $\hat{R}_{XX}(\tau)$ и $\hat{R}_{XY}(\tau)$, которые вычисляются экспериментально на конечном интервале времени $0 \leq t \leq T$ по текущим реализациям входного $X(t)$ и выходного $Y(t)$ сигналов. При этом $T \geq \tau_x$ и $T \geq \tau_{xy}$, где τ_x и τ_{xy} — соответственно интервал корреляции сигнала $X(t)$ и интервал взаимной корреляции сигналов $X(t)$ и $Y(t)$. Как следует из уравнения Винера—Хопфа, одновременно должно выполняться условие $T \geq t_{\max}$. В соответствии с этим уравнение для статистической идентификации импульсной переходной функции принимает вид [13]

$$\hat{R}_{XY}(\tau) = \int_0^{\tau} \hat{R}_{XX}(v)h(\tau - v)dv, \quad 0 \leq \tau \leq t_{\max}.$$

Дискретный аналог этого уравнения определяется соотношением [1, 3, 13]

$$\hat{R}_{XY}(k\Delta\tau) = \Delta\tau \sum_{n=0}^k \hat{R}_{XX}(n\Delta\tau)h(\Delta\tau(k - n)),$$

где $\Delta\tau$ — интервал дискретизации во времени КФ и ВКФ.

Тогда при выполнении условия $\hat{R}_{XX}(0) \neq 0$ дискретные отсчеты импульсной переходной функции могут быть вычислены следующим образом:

$$h(0) = \frac{\hat{R}_{XY}(0)}{\Delta\tau \hat{R}_{XX}(0)}, \quad (1)$$

$$h(k\Delta\tau) = \frac{1}{\Delta\tau \hat{R}_{XX}(0)} \left(\hat{R}_{XY}(k\Delta\tau) - \Delta\tau \sum_{n=0}^k \hat{R}_{XX}(n\Delta\tau)h(\Delta\tau(k - n)) \right) \text{ для } k \geq 1. \quad (2)$$

Непосредственное использование этих соотношений для идентификации импульсной переходной функции в вычислительном отношении приводит

к необходимости выполнения двух самостоятельных этапов [3]. Первоначально вычисляются два множества значений оценок $\hat{R}_{XX}(n\Delta\tau)$ и $\hat{R}_{XY}(k\Delta\tau)$. Затем на втором этапе по этим оценкам вычисляются непосредственно дискретные отсчеты $h(k\Delta t)$ импульсной переходной функции. Такой подход требует выбора способа предварительного вычисления оценок $\hat{R}_{XX}(n\Delta\tau)$ и $\hat{R}_{XY}(k\Delta\tau)$. При этом оценки $\hat{R}_{XX}(n\Delta\tau)$ и $\hat{R}_{XY}(k\Delta\tau)$ являются статистическими характеристиками, и в случае классического подхода к их определению в цифровом виде они требуют большого объема вычислений. Прежде всего, это связано с необходимостью выполнения многоразрядных операций цифрового умножения.

Таким образом, актуальное значение приобретает задача разработки такого подхода к практической реализации процесса статистической идентификации, который, во-первых, сохранял бы преимущества бинарного представления результатов экспериментальных наблюдений входного и выходного сигналов системы, а во-вторых, позволял бы реализовать цифровой алгоритм оценивания импульсной переходной функции без предварительного вычисления оценок КФ и ВКФ. Все это должно обеспечить снижение трудоемкости и упрощение процедуры вычисления отсчетов импульсной переходной функции в цифровом виде.

Решение задачи статистической идентификации с использованием знакового аналого-стохастического квантования

Достаточно эффективно решить поставленную выше задачу можно, если в качестве первичного преобразования входного $X(t)$ и выходного $Y(t)$ сигналов использовать знаковое аналого-стохастическое квантование [15].

Знаковое аналого-стохастическое квантование, так же как и бинарное квантование, по форме представления результата реализует простейшую процедуру двухуровневого преобразования непрерывного сигнала. Однако в процессе такого квантования используется равномерно распределенный вспомогательный случайный сигнал, выполняющий функцию стохастического порога квантования. В работе [14] показано, что добавление равномерно распределенного независимого вспомогательного сигнала и дискретизация — две статистически эквивалентные операции. Важным свойством такого квантования является то, что оно позволяет выполнять предельно грубое двухуровневое квантование без систематической погрешности независимо от статистических характеристик преобразуемых

сигналов [14—16]. Следовательно, оно предоставляет возможность осуществлять идентификацию импульсной переходной функции, когда закон распределения вероятностей входного и выходного сигналов системы произволен и заранее не известен.

Пусть в результате выполнения трех независимых процедур знакового аналого-стохастического квантования в пределах интервала времени T сформирован знаковый сигнал $z_1(t)$, и в пределах интервала времени $2T$ сформированы знаковые сигналы $z_2(t)$ и $z_3(t)$:

$$z_1(t) = \text{sgn}\{\dot{x}(t) + \xi_1(t)\}, z_2(t) = \text{sgn}\{\dot{x}(t) + \xi_2(t)\}$$

$$\text{и } z_3(t) = \text{sgn}\{\dot{y}(t) + \xi_3(t)\},$$

где $\text{sgn}\{\dots\}$ — оператор знакового преобразования; $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ — центрированные (с нулевым математическим ожиданием) наблюдаемые реализации сигналов $X(t)$ и $Y(t)$; $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$ — вспомогательные случайные сигналы.

Вспомогательные сигналы $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$ являются однородными. Они независимы относительно друг друга и по отношению к сигналам $X(t)$ и $Y(t)$. Мгновенные значения сигналов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$ распределены равномерно внутри интервала от $-\xi_{\max}$ до $+\xi_{\max}$. При этом должны выполняться условия $|\dot{x}(t)|_{\max} \leq \xi_{\max}$ и $|\dot{y}(t)|_{\max} \leq \xi_{\max}$, где $|\dot{x}(t)|_{\max}$ и $|\dot{y}(t)|_{\max}$ — абсолютные максимально возможные значения, которые могут принимать реализации $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$.

Знаковые сигналы $z_1(t)$, $z_2(t)$ и $z_3(t)$ по своему определению являются непрерывными во времени и ограниченными по уровню двумя возможными значениями -1 и $+1$, которые последовательно во времени сменяют друг друга. Поэтому динамику изменения этих сигналов в пределах интервалов времени их формирования можно однозначно описать с помощью значений в начальный момент времени идентификации t_0 и множеств отсчетов времени, в которые каждый из них пересекает нулевой уровень (т. е. меняет свое текущее значение на противоположное). В соответствии с этим для сигналов $z_1(t)$, $z_2(t)$ и $z_3(t)$ будем иметь начальные значения $z_1(t_0)$, $z_2(t_0)$ и $z_3(t_0)$ и три множества отсчетов времени $\{t_i^{z_1} : 1 \leq i \leq I - 1\}$, $\{t_j^{z_2} : 1 \leq j \leq J - 1\}$ и $\{t_q^{z_3} : 1 \leq q \leq Q - 1\}$. При этом $t_0^{z_1} = t_0^{z_2} = t_0^{z_3} = t_0$, $t_I^{z_1} = T$, $t_J^{z_2} = 2T$ и $t_Q^{z_3} = 2T$.

В качестве $\hat{R}_{XX}(n\Delta\tau)$ и $\hat{R}_{XY}(k\Delta\tau)$ возьмем оценки следующего вида [17–19]:

$$\hat{R}_{XX}(n\Delta\tau) = \xi_{\max}^2 T^{-1} \int_0^T z_1(t)z_2(t + n\Delta\tau)dt; \quad (3)$$

$$\hat{R}_{XY}(k\Delta\tau) = \xi_{\max}^2 T^{-1} \int_0^T z_1(t)z_3(t + k\Delta\tau)dt. \quad (4)$$

Оценки (3) и (4) являются несмещенными, т. е.

$$M[\hat{R}_{XX}(n\Delta\tau)] = \xi_{\max}^2 T^{-1} \int_0^T M[z_1(t)z_2(t + n\Delta\tau)]dt = R_{XX}(n\Delta\tau);$$

$$M[\hat{R}_{XY}(k\Delta\tau)] = \xi_{\max}^2 T^{-1} \int_0^T M[z_1(t)z_3(t + k\Delta\tau)]dt = R_{XY}(k\Delta\tau),$$

где $M[\dots]$ — оператор математического ожидания.

Несмещенность оценок $\hat{R}_{XX}(n\Delta\tau)$ и $\hat{R}_{XY}(k\Delta\tau)$ означает, что они не приводят к появлению дополнительных систематических погрешностей [16].

Так как знаковые сигналы $z_2(t)$ и $z_3(t)$ формируются на интервале $0 \leq t \leq 2T$, то оценки $\hat{R}_{XX}(n\Delta\tau)$ и $\hat{R}_{XY}(k\Delta\tau)$ могут быть вычислены для $0 \leq n\Delta\tau \leq T$ и $0 \leq k\Delta\tau \leq T$. Подставим эти оценки в выражение (2) для вычисления $h(k\Delta\tau)$. Тогда получаем

$$h(k\Delta\tau) = \frac{\xi_{\max}^2}{\Delta\tau T \hat{R}_{XX}(0)} H(k\Delta\tau), \quad (5)$$

где

$$H(k\Delta\tau) = \int_0^T z_1(t) \left[z_3(t + k\Delta\tau) - \Delta\tau \sum_{n=1}^k z_2(t + n\Delta\tau)h(\Delta\tau(k - n)) \right] dt. \quad (6)$$

Далее рассмотрим задачу вычисления дискретных отсчетов $H(k\Delta\tau)$. При этом отметим, что существенное значение имеет практическая реализация операции интегрирования. Выполнение этой операции в цифровом виде во многом будет определять вычислительную эффективность процедуры статистической идентификации.

Принимая во внимание, что знаковый сигнал $z_1(t)$ остается постоянным в пределах интервалов

времени $t_i^{z_1} \leq t \leq t_{i+1}^{z_1}$ и при этом может принимать только одно из двух возможных значений -1 или $+1$, интеграл по переменной t в выражении (6) можно представить в виде суммы интегралов. Тогда выражение (6) примет следующий вид:

$$H(k\Delta\tau) = z_1(t_0) \sum_{i=0}^{I-1} (-1)^i \left[\int_{t_i^{z_1}}^{t_{i+1}^{z_1}} z_3(t + k\Delta\tau)dt - \Delta\tau \sum_{n=1}^k h(\Delta\tau(k - n)) \int_{t_i^{z_1}}^{t_{i+1}^{z_1}} z_2(t + n\Delta\tau)dt \right].$$

Введем обозначения:

$$a_i(k\Delta\tau) = \int_{t_i^{z_1}}^{t_{i+1}^{z_1}} z_3(t + k\Delta\tau)dt = \int_{t_i^{z_1} + k\Delta\tau}^{t_{i+1}^{z_1} + k\Delta\tau} z_3(t)dt; \quad (7)$$

$$b_i(n\Delta\tau) = \int_{t_i^{z_1}}^{t_{i+1}^{z_1}} z_2(t + n\Delta\tau)dt = \int_{t_i^{z_1} + n\Delta\tau}^{t_{i+1}^{z_1} + n\Delta\tau} z_2(t)dt. \quad (8)$$

В соответствии с этими обозначениями получаем

$$H(k\Delta\tau) = z_1(t_0) \sum_{i=0}^{I-1} (-1)^i \left[a_i(k\Delta\tau) - \Delta\tau \sum_{n=1}^k b_i(n\Delta\tau)h(\Delta\tau(k - n)) \right]. \quad (9)$$

Из соотношения (9) следует, что задача практически свелась к нахождению коэффициентов $a_i(k\Delta\tau)$ и $b_i(n\Delta\tau)$, определяемых соотношениями (7) и (8).

Пусть для знакового сигнала $z_3(t)$ границам интервала $t_i^{z_1} + k\Delta\tau \leq t \leq t_{i+1}^{z_1} + k\Delta\tau$, в пределах которого вычисляется значение коэффициента $a_i(k\Delta\tau)$, соответствуют моменты времени $t_{m(i, z_3)}^{z_3} = t_i^{z_1} + k\Delta\tau$ и $t_{m(i, z_3) + r(i, z_3) + 1}^{z_3} = t_{i+1}^{z_1} + k\Delta\tau$, где индексы $m(i, z_3)$ и $r(i, z_3)$ являются целыми числами и обозначены так, чтобы показать их зависимость от номера интервала. В соответствии с этими обозначениями будем иметь отсчеты времени $\{t_{m(i, z_3) + 1}^{z_3}, t_{m(i, z_3) + 2}^{z_3}, \dots, t_{m(i, z_3) + r(i, z_3)}^{z_3}\}$, которые принадлежат множеству $\{t_q^{z_3} : 1 \leq q \leq Q - 1\}$ и определяют те моменты времени, в которые знаковый сигнал $z_3(t)$ последовательно пересекает нуле-

вой уровень в пределах интервала времени $t_i^{z_1} + k\Delta\tau < t < t_{i+1}^{z_1} + k\Delta\tau$.

С учетом множества моментов времени $\{t_{m(i, z_3)+1}^{z_3}, t_{m(i, z_3)+2}^{z_3}, \dots, t_{m(i, z_3)+r(i, z_3)}^{z_3}\}$, а также вследствие того, что сигнал $z_3(t)$ может принимать значения, равные только -1 или $+1$, интеграл в выражении (7) может быть вычислен аналитически, так что будем иметь:

$$a_i(k\Delta\tau) = z_3(t_i^{z_1} + k\Delta\tau) \sum_{q=m(i, z_3)}^{m(i, z_3)+r(i, z_3)+1} (-1)^{q-m(i, z_3)+1} \lambda_q t_q^{z_3}, \quad (10)$$

$$\lambda_q = \begin{cases} 1, & q = m(i, z_3) \text{ и } q = m(i, z_3) + r(i, z_3) + 1; \\ 2, & m(i, z_3) + 1 \leq q \leq m(i, z_3) + r(i, z_3). \end{cases}$$

Аналогично для коэффициентов $b_i(n\Delta\tau)$, определяемых соотношением (8), получаем

$$b_i(n\Delta\tau) = z_2(t_i^{z_1} + n\Delta\tau) \sum_{q=m(i, z_2)}^{m(i, z_2)+r(i, z_2)+1} (-1)^{j-m(i, z_2)+1} \gamma_j t_j^{z_2}; \quad (11)$$

$$\gamma_j = \begin{cases} 1, & j = m(i, z_2) \text{ и } j = m(i, z_2) + r(i, z_2) + 1; \\ 2, & m(i, z_2) + 1 \leq j \leq m(i, z_2) + r(i, z_2). \end{cases}$$

В данном случае было учтено, что для сигнала $z_2(t)$ границам интервала времени $t_i^{z_1} + n\Delta\tau \leq t \leq t_{i+1}^{z_1} + n\Delta\tau$,

в пределах которого вычисляется значение коэффициента $b_i(n\Delta\tau)$, соответствуют моменты времени

$$t_{m(i, z_2)}^{z_2} = t_i^{z_1} + n\Delta\tau \text{ и } t_{m(i, z_2)+r(i, z_2)+1}^{z_2} = t_{i+1}^{z_1} + n\Delta\tau.$$

При этом будем иметь множество отсчетов времени $\{t_{m(i, z_2)+1}^{z_2}, t_{m(i, z_2)+2}^{z_2}, \dots, t_{m(i, z_2)+r(i, z_2)}^{z_2}\}$, которые

принадлежат множеству $\{t_j^{z_2} : 1 \leq j \leq J-1\}$ и определяют те моменты времени, когда сигнал $z_2(t)$ последовательно пересекает нулевой уровень в пределах интервала времени $t_i^{z_1} + n\Delta\tau < t < t_{i+1}^{z_1} + n\Delta\tau$.

Для вычисления $h(k\Delta\tau)$ необходимо иметь оценку КФ $\hat{R}_{XX}(0)$. В свою очередь, для вычисления $h(0)$ необходимо иметь еще и оценку ВКФ $\hat{R}_{XY}(0)$. В целях получения этих оценок обратимся к соотношениям (3) и (4). Сигнал $z_1(t)$ меняет свое значение только в моменты времени $\{t_i^{z_1} : 1 \leq i \leq I-1\}$. В пределах интервалов времени $t_i^{z_1} < t < t_{i+1}^{z_1}$ он остается постоянным и принимает значение -1 или $+1$. С учетом этого, а также приняв за основу использован-

ный выше подход при выводе соотношений для вычисления коэффициентов $a_i(k\Delta\tau)$ и $b_i(n\Delta\tau)$, будем иметь:

$$\hat{R}_{XX}(0) = z_1(t_0) \xi_{\max}^2 T^{-1} \sum_{i=0}^{I-1} (-1)^i b_i(0); \quad (12)$$

$$\hat{R}_{XY}(0) = z_1(t_0) \xi_{\max}^2 T^{-1} \sum_{i=0}^{I-1} (-1)^i a_i(0). \quad (13)$$

Подставив соотношения (12) и (13), а также (9) в выражения (1) и (2) для вычисления отсчетов $h(0)$ и $h(k\Delta\tau)$, получаем

$$h(0) = \frac{A_0}{B_0}, \quad h(k\Delta\tau) = \frac{H_{\Sigma}(k\Delta\tau)}{B_0}, \quad (14)$$

где

$$A_0 = \sum_{i=0}^{I-1} (-1)^i a_i(0), \quad B_0 = \Delta\tau \sum_{i=0}^{I-1} (-1)^i b_i(0); \quad (15)$$

$$H_{\Sigma}(k\Delta\tau) = \sum_{i=0}^{I-1} (-1)^i [a_i(k\Delta\tau) - \Delta\tau C_i(k\Delta\tau)]; \quad (16)$$

$$C_i(k\Delta\tau) = \sum_{n=1}^k b_i(n\Delta\tau) h(\Delta\tau(k-n)). \quad (17)$$

Соотношения (14) в совокупности с (15)–(17) определяют алгоритм последовательного вычисления отсчетов импульсной переходной функции в дискретные моменты времени $0 \leq k\Delta\tau \leq T$ с интервалом дискретизации $\Delta\tau$. При этом общее число подлежащих вычислению отсчетов импульсной переходной функции будет равно

$$K_{\max} = \text{int}[T/\Delta\tau].$$

Из выражений (15)–(17) следует, что в соответствии с разработанным подходом основу процедур численной оценки отсчетов $h(0)$ и $h(k\Delta\tau)$ в процессе статистической идентификации импульсной переходной функции составляет вычисление коэффициентов $a_i(k\Delta\tau)$ и $b_i(n\Delta\tau)$ согласно соотношениям (8) и (9). Для того чтобы иметь возможность практического использования этих соотношений, перейдем к числовому представлению дискретных отсчетов времени $\{t_i^{z_1} : 1 \leq i \leq I-1\}$, $\{t_j^{z_2} : 1 \leq j \leq J-1\}$ и $\{t_q^{z_3} : 1 \leq q \leq Q-1\}$. Это можно сделать, используя классический подход к цифровому представлению интервалов времени с заданной точностью. Согласно этому подходу

$$\eta_i^{z_1} = \text{int} \left[\frac{t_i^{z_1}}{\Delta t} \right], \quad \eta_j^{z_2} = \text{int} \left[\frac{t_j^{z_2}}{\Delta t} \right] \text{ и } \eta_q^{z_3} = \text{int} \left[\frac{t_q^{z_3}}{\Delta t} \right],$$

где $\text{int}[\dots]$ — оператор определения целой части числа в квадратных скобках; Δt — период счетных импульсов, который должен удовлетворять требованию

$$\Delta t = \delta \cdot \min\{\Delta t_i^{z_1}; \Delta t_j^{z_2}; \Delta t_q^{z_3}\},$$

где $\Delta t_i^{z_1} = t_{i+1}^{z_1} - t_i^{z_1}$ и $0 \leq i < I$, $\Delta t_j^{z_2} = t_{j+1}^{z_2} - t_j^{z_2}$

и $0 \leq j < J$, $\Delta t_q^{z_3} = t_{q+1}^{z_3} - t_q^{z_3}$ и $0 \leq q < Q$.

Здесь δ определяет задание в относительных единицах необходимой точности числового представления отсчетов времени $t_i^{z_1}$, $t_j^{z_2}$ и $t_q^{z_3}$ в зависимости от длительности минимально возможного интервала времени $\Delta t_i^{z_1}$, $\Delta t_j^{z_2}$ или $\Delta t_q^{z_3}$. Значение δ выбирается исходя из априорных сведений о динамических и частотных характеристиках сигналов $X(t)$ и $Y(t)$. В частности, должно выполняться условие $\Delta t < kf_{\max}^{-1}$, где $k \geq 2$ и f_{\max} — верхняя граничная частота в спектре сигналов $X(t)$ и $Y(t)$. Также должно выполняться условие $\Delta t \leq \Delta t$.

В результате получаем три множества целых чисел $\{\eta_i^{z_1} : 1 \leq i \leq I - 1\}$, $\{\eta_j^{z_2} : 1 \leq j \leq J - 1\}$ и $\{\eta_q^{z_3} : 1 \leq q \leq Q - 1\}$. Отметим, что $\eta_0^{z_1} = \eta_0^{z_2} = \eta_0^{z_3} = \eta_0 = 0$. Кроме того, будем иметь $N = \text{int}[T/\Delta t]$.

Отсюда следует, что $\eta_I^{z_1} = N$, $\eta_J^{z_2} = 2N$ и $\eta_Q^{z_3} = 2N$.

Тогда выражения (10) и (11) примут вид

$$a_i(k\Delta t) = z_3(\eta_i^{z_1}, k)\Delta t \sum_{q=m(i, z_3)}^{m(i, z_3)+r(i, z_3)+1} (-1)^{q-m(i, z_3)+1} \lambda_q \eta_q^{z_3}; \quad (18)$$

$$b_i(n\Delta t) = z_2(\eta_i^{z_1}, n)\Delta t \sum_{j=m(i, z_2)}^{m(i, z_2)+r(i, z_2)+1} (-1)^{j-m(i, z_2)+1} \gamma_j \eta_j^{z_2}; \quad (19)$$

$$z_3(\eta_i^{z_1}, k) = z_3(\eta_i^{z_1} \Delta t + k\Delta t);$$

$$z_2(\eta_i^{z_1}, n) = z_2(\eta_i^{z_1} \Delta t + n\Delta t).$$

Окончательно имеем, что отсчеты $h(0)$ и $h(k\Delta t)$ импульсной переходной функции вычисляются согласно выражению (14), где A_0 , B_0 и $H_\Sigma(k\Delta t)$ вычисляются в соответствии с (15)—(17). При этом для вычисления коэффициентов $a_i(k\Delta t)$ и $b_i(n\Delta t)$ разработаны соотношения (18) и (19). Таким образом, выражение (14) с учетом (15)—(17), а также соотношения (18) и (19) образуют цифровой алгоритм последовательного вычисления K_{\max} отсчетов

импульсной переходной функции. Ниже представлена краткая запись основных этапов практической реализации этого алгоритма.

1. В результате знакового аналого-стохастического квантования центрированных реализаций $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ входного $X(t)$ и выходного $Y(t)$ сигналов системы формируются знаковые сигналы $z_1(t)$, $z_2(t)$ и $z_3(t)$

2. Определяются дискретные отсчеты времени

$$\{\eta_i^{z_1} : 1 \leq i \leq I - 1\}, \{\eta_j^{z_2} : 1 \leq j \leq J - 1\} \text{ и}$$

$$\{\eta_q^{z_3} : 1 \leq q \leq Q - 1\}.$$

3. Для $i = 1, 2, 3, \dots, I - 1$ вычисляются $a_i(0)$ и $b_i(0)$ в соответствии с соотношениями (18) и (19).

4. Вычисляются A_0 и B_0 согласно выражению (15).

5. Вычисляется $h(0) = A_0/B_0$.

6. Для $k = 1, 2, \dots, K_{\max}$ последовательно выполняются следующие действия:

6.1. Для $i = 1, 2, \dots, I - 1$ вычисляются:

6.1.1. $a_i(k\Delta t)$ согласно (18).

6.1.2. $b_i(n\Delta t)$ для $n = 1, 2, \dots, k$ согласно (19).

6.1.3. $C_i(k\Delta t)$ согласно (17).

6.2. Вычисляется $H_\Sigma(k\Delta t)$ согласно (16).

6.3. Вычисляется $h(k\Delta t) = H_\Sigma(k\Delta t)/B_0$.

7. Вывод результатов $h(k\Delta t)$ для $k = 0, 1, 2, \dots, K_{\max}$.

На основе полученного алгоритма был разработан специализированный программный модуль. Экспериментальная оценка работы этого модуля осуществлялась с использованием имитационного моделирования. В частности, был использован пример, рассмотренный в работе [3], в котором исследовалось колебательное звено, описываемое дифференциальным уравнением

$$T_0 y''(t) + 2T_0 \zeta y'(t) + y(t) = x(t),$$

где $T_0 = 0,06$ и $\zeta = 0,3$.

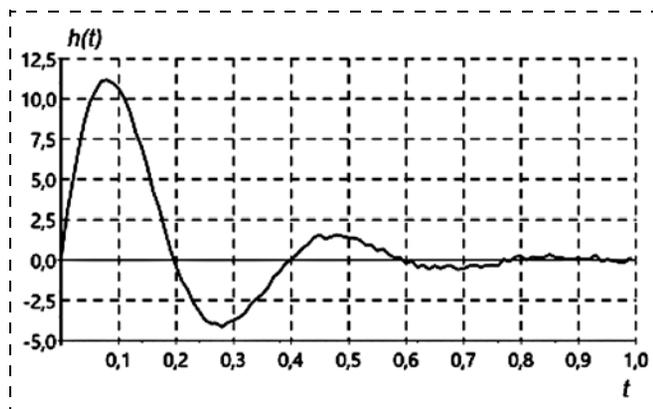
Импульсная переходная функция такого звена определяется следующим аналитическим выражением:

$$h(t) = \frac{1}{0,06 \sqrt{0,91}} \exp(-5t) \sin\left(\frac{\sqrt{0,91}}{0,06} t\right).$$

В качестве одного из возможных входных сигналов использовался синусоидальный сигнал с единичной амплитудой и частотой $\omega_0 = 2\pi f = 1/T_0$, которому соответствует выходной синусоидальный отклик

$$y(t) = \frac{1}{2\zeta} \sin(\omega_0 t - \pi/2) = \frac{1}{0,6} \sin\left(\frac{t}{0,6} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Для имитации процедуры знакового аналого-стохастического квантования был дополнительно разработан программный модуль. Идентификация импульсной переходной функции осуществлялась в пределах временного интервала $0 \leq t \leq 1$. На рисунке представлен график идентифицированной



Идентифицированная импульсная переходная функция

импульсной переходной функции, полученный для 100 ее отсчетов.

Заключение

Подводя общий итог, отметим, что ключевым моментом разработки цифровой процедуры статистической идентификации импульсной переходной функции стало использование знакового аналого-стохастического квантования в качестве первичного преобразования в цифровую форму входного $X(t)$ и выходного $Y(t)$ сигналов системы. Переход к знаковым сигналам в интегральных оценках КФ $\hat{R}_{XX}(n\Delta\tau)$ и ВКФ $\hat{R}_{XY}(k\Delta\tau)$ позволил операции интегрирования выполнить аналитически. Данное обстоятельство избавило от необходимости выбора процедуры численного интегрирования, для которой наиболее существенной проблемой является выбор шага интегрирования, что исключает методическую погрешность, вызванную выполнением этой операции. При этом исходное уравнение для вычисления отсчетов импульсной переходной функции преобразовано таким образом, что исключена необходимость предварительного вычисления оценок $\hat{R}_{XX}(n\Delta\tau)$ и $\hat{R}_{XY}(k\Delta\tau)$. В результате весь процесс статистической идентификации практически свелся к процессу вычисления коэффициентов $a_i(k\Delta\tau)$ и $b_i(n\Delta\tau)$, который не требует осуществлять обработку многоуровневых цифровых отсчетов входного $X(t)$ и выходного $Y(t)$ сигналов системы. Согласно полученным соотношениям вычисление значений коэффициентов $a_i(k\Delta\tau)$ и $b_i(n\Delta\tau)$ предполагает выполнение цифровых процедур, которые в своей основе сводятся к реализации логических операций и арифметических операций суммирования и вычитания, связанных с обработкой целочисленных значений отсчетов времени $\{\eta_i^{z_1} : 1 \leq i \leq I - 1\}$, $\{\eta_j^{z_2} : 1 \leq j \leq J - 1\}$ и

$\{\eta_q^{z_3} : 1 \leq q \leq Q - 1\}$, сформированных в процессе выполнения знакового аналого-стохастического квантования. Последнее обстоятельство способствует повышению оперативности цифрового вычисления отсчетов импульсной переходной функции.

Список литературы

1. Алексеев А. А., Кораблев Ю. А., Шестопалов М. Ю. Идентификация и диагностика систем. М.: Издательский центр "Академия", 2009. 352 с.
2. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 656 с.
3. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 2: Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 640 с.
4. Ljung L. System Identification: Theory for the User (2nd Edition). Prentice Hall PTR, 1999. 609 p.
5. Isermann R., Münchhof M. Identification of Dynamic Systems. An Introduction with Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. 705.
6. Wang L. Y., Zhao W. X. System identification: New paradigms, challenges, and opportunities // Acta Automatica Sinica. 2013. V. 39, N 7. P. 933–942.
7. He Q., Wang L. Y., Yin G. G. System identification using regular and quantized observations: Applications of large deviations principles. Springer New York, 2013. 95 p.
8. Wang L. Y., Zhang J. F., Yin G. G. System identification using binary sensors // IEEE Transactions on automatic control. 2003. Vol. 48, N. 11. P. 1892–1907.
9. Casini M., Garulli A., Vicino A. Input design in worst-case system identification using binary sensors // IEEE Transactions on automatic control. 2011. Vol. 56, N. 5. P. 1186–1191.
10. Guoa J., Zhao Y. Recursive projection algorithm on FIR system identification with binary-valued observations // Automatica. 2013. Vol. 49, N. 11. P. 3396–3401.
11. Kan S., Yin G. G., Wang L. Y. Parameter estimation in systems with binary-valued observations and structural uncertainties // International journal of control. 2014. Vol. 87, N. 5. P. 1061–1075.
12. Depraetere B., Stoev J., Pinte G., Swevers J. Identification of linear systems with binary output measurements using short independent experiments // Mechanical systems and signal processing. 2015. Vol. 50–51, N. 1. P. 296–306.
13. Keesman K. J. System Identification: An Introduction. Springer-Verlag London, 2011. 323 p.
14. Max J. Methodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques. Iss 1. Principes generaux et methodes classiques. Masson, 1981. 302 p.
15. Якимов В. Н. Обобщенная математическая модель двухуровневого знакового преобразования // Техника машиностроения. 2000. № 4. С. 72–74.
16. Мирский Г. Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. М.: Энергоиздат, 1982. 320 с.
17. Якимов В. Н. Цифровой корреляционный анализ на основе интервального представления результата знакового преобразования случайных процессов // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2001. № 11. С. 61–66.
18. Якимов В. Н. Структурное проектирование цифровых коррелометров для оперативного корреляционного анализа на основе знакового аналого-стохастического квантования // Измерительная техника. 2007. № 4. С. 6–11.
19. Yakimov V. N. The structural design of digital correlometers for operational correlation analysis based on sign-function analog-stochastic quantization // Measurement Techniques. Publisher: Springer New York. 2007. Vol. 50, N. 4. P. 356–363.

Statistical Identification of the Linear Dynamic Systems with the Use of the Sign-Function Analog-Stochastic Quantization of the Input and Output Signals

V. N. Yakimov, yvnr@hotmail.com, V. I. Batyshev, vib@list.ru✉,
A. V. Mashkov, mavstu@list.ru,
Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Corresponding author: **Batyshev Vitaly I.**, D. Sc., Professor, Head of Department,
Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation,
e-mail: vib@list.ru

Received on February 01, 2017

Accepted on March 14, 2017

The article describes a new approach to solving of the problem of the statistical identification of the impulse response function with the auto- and cross-correlation functions of a linear dynamic system in a digital form. This approach is based on the use of the sign-function analog-stochastic quantization as a primary analog-to-digital conversion of the input and output of the considered system. The basis of the sign-function stochastic quantization is the use of the random auxiliary signals, which perform the function of a threshold stochastic quantization. Sign-function analog-stochastic quantization allows a coarse binary quantization without a bias and regardless of the statistical properties of the investigated random signals. The binary representation of the input and output signals of the system made possible an analytical calculation of the operators of integration in the development of the digital algorithms for estimation of the impulse response functions. The main result of the use of the sign-function analog-stochastic quantization is the transition from processing of multi-bit samples of the input and output signals to processing of the integer values of the time intervals defined by the change of the sign of the quantization result. This improves the data processing in the identification system. The final algorithms obtained for the calculation of the digital samples of the impulse response function does not require preliminary estimates of a direct calculation of the auto- and cross-correlation functions. They can be used for an online identification in real-time. A practical application of these algorithms improves the performance of the digital statistical processing of the input and output signals of the system. A brief account of the algorithmic diagram is presented. It shows the sequence of the basic instructions to be performed for calculation of the samples of the impulse response function.

Keywords: statistical identification, dynamic system, random process, sign signal, time readout, stochastic quantization

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 16-08-00269)

For citation:

Yakimov V. N., Batyshev V. I., Mashkov A. V. Statistical Identification of the Linear Dynamic Systems with the Use of the Sign-Function Analog-Stochastic Quantization of the Input and Output Signals, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 9, pp. 604–611.

DOI: 10.17587/mau.18.604-611

References

1. Alekseev A. A., Korablev Ju. A., Shestopalov M. Ju. *Identifikacija i diagnostika sistem* (Identification and diagnostics systems), Moscow, Izdatel'skij centr "Akademija", 2009, 352 p. (in Russian).
2. Pupkov K. A., Egupov N. D. ed. *Metody klassicheskoj i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravlenija* (Methods of classical and modern automatic control theory). Vol. 1. *Matematicheskie modeli, dinamicheskie harakteristiki i analiz sistem avtomaticheskogo upravlenija* (Mathematical models, dynamic characteristics and analysis of automatic control systems), Moscow, Publishing house of MG TU im. N. Je. Bauman, 2004, 656 p. (in Russian).
3. Pupkov K. A., Egupov N. D. ed. *Metody klassicheskoj i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravlenija* (Methods of classical and modern automatic control theory). Vol. 2. *Statisticheskaja dinamika i identifikacija sistem avtomaticheskogo upravlenija* (Statistical dynamics and identification of automatic control systems), Moscow, Publishing house of MG TU im. N. Je. Bauman, 2004, 640 p. (in Russian).
4. Ljung L. *System Identification: Theory for the User*, Prentice Hall PTR, 1999, 609 p.
5. Isermann R., Münchhof M. *Identification of Dynamic Systems. An Introduction with Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011, 705 p.
6. Wang L. Y., Zhao W. X. System identification: New paradigms, challenges, and opportunities, *Acta Automatica Sinica*, 2013, vol. 39, no. 7, pp. 933–942.
7. He Q., Wang L. Y., Yin G. G. *System identification using regular and quantized observations: Applications of large deviations principles*, Springer, New York, 2013, 95 p.
8. Wang L. Y., Zhang J. F., Yin G. G. System identification using binary sensors, *IEEE Transactions on automatic control*, 2003, vol. 48, no. 11, pp. 1892–1907.
9. Casini M., Garulli A., Vicino A. Input design in worst-case system identification using binary sensors, *IEEE Transactions on automatic control*, 2011, vol. 56, no. 5, pp. 1186–1191.
10. Guoa J., Zhao Y. Recursive projection algorithm on FIR system identification with binary-valued observations, *Automatica*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 3396–3401.
11. Kan S., Yin G. G., Wang L. Y. Parameter estimation in systems with binary-valued observations and structural uncertainties, *International Journal of Control*, 2014, vol. 87, no. 5, pp. 1061–1075.
12. Depraetere B., Stoev J., Pinte G., Swevers J. Identification of linear systems with binary output measurements using short independent experiments, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2015, vol. 50–51, no. 1, pp. 296–306.
13. Keesman K. J. *System Identification: An Introduction*, Springer-Verlag London, 2011, 323 p.
14. Max J. *Methodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques. Vol. 1. Principes generaux et methodes classiques*, Masson, 1981, 302 p.
15. Yakimov V. N. *Obobshchennaya matematicheskaya model dvukhurovnevoego znakovogo preobrazovaniya* (Generalized mathematical model of two-level symbolic conversion), *Tekhnika Mashinostroeniya*, 2000, no. 4, pp. 72–74 (in Russian).
16. Mirskij G. Ja. *Harakteristiki stohasticheskoy vzaimosvjazi i ih izmerenija* (Characteristics of stochastic relationships and their measurement), Moscow, Jenergoizdat, 1982, 320 p. (in Russian).
17. Yakimov V. N. *Tsifrovoy korrelyatsionnyy analiz na osnove intervalnogo predstavleniya rezultata znakovogo preobrazovaniya sluchaynykh protsessov* (Digital correlation analysis based on interval representation of the result of symbolic transformations of random processes), *Pribory i Sistemy. Upravlenie, Kontrol, Diagnostika*, 2001, no. 11, pp. 61–66 (in Russian).
18. Yakimov V. N. *Strukturnoe proektirovanie tsifrovyykh korrelometrov dlya operativnogo korrelyatsionnogo analiza na osnove znakovogo analogo-stokhasticheskogo kvantovaniya* (The structural design of digital correlators for operative correlation analysis based on the sign-analog stochastic quantization), *Izmeritel'naya Tekhnika*, 2007, no. 4, pp. 6–11 (in Russian).
19. Yakimov V. N. The structural design of digital correlometers for operational correlation analysis based on sign-function analog-stochastic quantization, *Measurement Techniques*, Springer, New York, 2007, vol. 50, no. 4, pp. 356–363.