УДК 62.50:681.51 DOI: 10.17587/mau.18.597-604

С. В. Быстров, канд. техн. наук, доц., **А. С. Васильев,** аспирант,
Н. А. Вундер, аспирант, **А. В. Ушаков,** д-р техн. наук, проф., ushakov-AVG@yandex.ru,
Университет ИТМО, Санкт-Петербург

Аналитическое конструирование последовательного компенсатора для систем управления техническим объектом с модуляцией[1]

Предлагается алгоритм аналитического конструирования последовательного компенсатора в задаче управления техническим объектом с амплитудной модуляцией, порождаемой использованием в качестве исполнительного устройства асинхронного двигателя, на основе типовых полиномиальных моделей, параметризованных характеристической частотой.

Ключевые слова: *типовые полиномиальные модели, характеристическая частота, амплитудная модуляция, теорема Шеннона—Котельникова, частота сигнала-носителя, показатели качества, алгоритм конструирования последовательного компенсатора*

Введение

Системы с амплитудной модуляцией [1, 2] имеют широкое практическое применение, но обойдены вниманием современной теории управления, опирающейся на метод пространства состояний [3—5]. Данный тип систем является "квазидискретным" [5—7], так как передача информации средствами гармонического сигнала-носителя (ГСН) осуществляется его полуволнами, т. е. дискретно с интервалом дискретности, равным полупериоду сигнала-носителя. Это обстоятельство позволяет для оценки пропускной способности систем с амплитудной модуляцией использовать теорему Шеннона—Котельникова [8].

Современные аналитические методы синтеза систем подобно тому, как это делается в частотном подходе, использующем банк типовых логарифмических амплитудных частотных характеристик (ЛАЧХ) [9, 10] проектируемых систем, опираются на использование банка типовых полиномиальных моделей [12, 13] передаточной функции (ТПМ ПФ) размерности, равной размерности технического объекта, аналитическое описание которых задается в виде следующей передаточной функции системы, параметризованной [5, 13, 15] характеристической частотой ω_0:

$$\Phi(s, \omega_0) = \frac{v_n\omega_0^n}{s^n + \sum\limits_{i=1}^{n} v_i\omega_0^i s^{n-i}} = \frac{v_n\omega_0^n}{D(s, \omega_0)}. \qquad (1)$$

В соотношении (1) коэффициенты v_i ($i = \overline{1, n}$) определяют характер размещения корней полинома знаменателя $D(s, \omega_0)$ передаточной функции на комплексной плоскости, ω_0 определяет размер области локализации размещения корней. Основным преимуществом представления ТПМ ПФ $\Phi(s, \omega_0)$ в форме (1) является то, что ее использование при фиксированных v_i сводит задачу синтеза к однопараметрической задаче поиска значения характеристической частоты ω_0, от которой зависят степень устойчивости, длительность переходного процесса, добротность по скорости, частота среза, полосы пропускания на уровне заданных значений амплитудных частотных характеристик по выходу и ошибке. При фиксированных v_i ТПМ ПФ (1) от ω_0 не зависят запас устойчивости, перерегулирование и показатель колебательности [10].

Сопряжение полос пропускания, определяемых в соответствии с теоремой Шеннона—Котельникова [8] как функции частоты ГСН, и амплитудной частотной характеристики на уровне малого значения модуля ТПМ ПФ (1), определяемой характеристической частотой ω_0, позволяет оценить предельно достижимое значение последней как функции частоты ГСН. Данная информация может быть положена в основу создания алгоритмической базы синтеза систем с амплитудной модуляцией с заданными показателями качества с учетом частоты сигнала-носителя.

Решаемая проблема особенно актуальна потому, что на практике применяемые в современной электромеханической технике сервоприводы широко используют в качестве исполнительных устройств двигатели переменного тока в силу их высокой надежности и хороших эксплуатационных показателей. Основными частотами питания этих двигателей являются 50 Гц и 400 (500) Гц. Поэтому приводимые ниже результаты сориентированы на эти значения частот сигнала-носителя.

Аналитические представления показателей качества типовых полиномиальных моделей, параметризованных характеристической частотой

Для построения алгоритма аналитического конструирования последовательного компенсатора [15, 16] в составе систем управления техническим объектом с модуляцией необходимо иметь аналитические представления основных показателей качества систем, описываемых ТПМ ПФ (1). Сформи-

[1] Работа написана при поддержке правительства Российской Федерации (Грант 074-U01), Министерства образования и науки Российской Федерации (Проект 14. Z50.31.0031), гранта президента Российской Федерации № 14.Y31.16.9281-НШ.

руем эти представления с помощью следующих утверждений.

Утверждение 1 (У1). Тип размещения корней полинома знаменателя ТПМ ПФ (1) совпадает с типом размещения корней полинома знаменателя следующей передаточной функции:

$$\Phi(s) = \frac{v_n}{s^n + \sum\limits_{i=1}^{n} v_i s^{n-i}} = \frac{v_n}{D(s)} \qquad (2)$$

с точностью до размера ω_0 области локализации этого размещения. □

Доказательство. Разделим числитель и знаменатель передаточной функции (1) на ω_0^n, тогда получим

$$\Phi(\bar{s}) = \frac{v_n}{\bar{s}^n + \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \bar{s}^{n-i}}, \qquad (3)$$

где $\bar{s} = s/\omega_0$. ■

Примечание 1 (П1). Доказанное утверждение делает справедливым положение о том, что корни s_i $(i = \overline{1, n})$ полинома $D(s)$ и корни $s_i(\omega_0)(i = \overline{1, n})$ полинома $D(s, \omega_0)$ связаны соотношением $s_i(\omega_0) = \omega_0 s_i$ $(i = \overline{1, n})$. Как следствие, у систем (1) и (2) будут одинаковые запасы устойчивости, перерегулирование и показатель колебательности.

Утверждение 2 (У2). Оценка $\hat{\omega}_c$ частоты среза ω_c ТПМ ПФ (1) определяется выражением

$$\hat{\omega}_c = \frac{v_n}{v_{n-1}}\omega_0. \qquad □(4)$$

Доказательство. Частота среза ω_c удовлетворяет соотношению

$$\omega_c = \arg(|W(s, \omega_0)|\|_{s = j\omega = j\omega_c} = 1), \qquad (5)$$

где передаточная функция $W(s, \omega_0)$ прямой ветви ТПМ ПФ (1) определяется выражением

$$W(s, \omega_0) = \frac{\Phi(s, \omega_0)}{1 - \Phi(s, \omega_0)} = \frac{v_n \omega_0^n}{s^n + v_1\omega_0 s^{n-1} + \ldots + v_{n-1}\omega_0^{n-1} s}. \qquad (6)$$

В силу определения частоты среза (5) оказывается справедливой цепочка равенств, доказывающая справедливость соотношения (4):

$$|W(j\omega, \omega_0)| = \left|\left.\frac{v_n \omega_0^n}{(s^{n-1} + v_1\omega_0 s^{n-2} + \ldots + v_{n-1}\omega_0^{n-1})s}\right|_{s = j\omega}\right|_{\omega = \omega_c} \cong$$

$$\cong \frac{v_n \omega_0}{v_{n-1}\hat{\omega}_c} = 1. \qquad ■(7)$$

Утверждение 3 (У3). Запас $\Delta\varphi$ устойчивости по фазе ТПМ ПФ (1) в силу положений утверждения 1 не зависит от характеристической частоты ω_0, а потому определяется в силу (2) цепочкой соотношений

$$\Delta\varphi = \pi + \arg\{W(s)|_{s = j\omega_c}\} = \frac{\pi}{2} + \arg\left\{\left.\frac{v_n}{s^{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} v_i s^{n-1-i}}\right|_{s = j\frac{v_n}{v_{n-1}}}\right\}, \qquad (8)$$

где в силу (2)

$$W(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - \Phi(s)} = \frac{v_n}{\left(s^{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} v_i s^{n-1-i}\right)s}. \qquad □$$

Доказательство утверждения 3 строится на представлении (4) оценки частоты среза при $\omega_0 = 1$. ■

Примечание 2 (П2). Формула (8) позволяет сформировать аналитические представления запаса устойчивости по фазе передаточной функции вида (2) как функции коэффициентов v_i $(i = \overline{1, n})$ для ТПМ ПФ вида (1) и (2) с первого по пятый порядок (табл. 1).

Утверждение 4 (У4). Оценка $\hat{\Delta}\omega$ полосы пропускания $\Delta\omega = \arg\left(|\Phi(s, \omega_0)\|_{s = j\omega}\Big|_{\omega \geqslant \Delta_y\omega} \leqslant \delta \ll 1\right)$ ТПМ ПФ (1) определяется выражением

$$\hat{\Delta}\omega = (v_n)^{1/n}\omega_0/(\delta)1/^n. \qquad □(9)$$

Таблица 1

Аналитические представления запасов устойчивости по фазе вида (1) и (2)

Порядок ТПМ n	Аналитическое представление запаса устойчивости по фазе $\Delta\varphi = \Delta\varphi(v_i;\ i = \overline{1, n})$
$n = 1$	$\Delta\varphi = \pi/2 - \mathrm{arctg}(0/v_1) = \pi/2$
$n = 2$	$\Delta\varphi = \pi/2 - \mathrm{arctg}(v_2/v_1^2)$
$n = 3$	$\Delta\varphi = \pi/2 - \mathrm{arctg}(v_1(v_3/v_2)/(v_2 - (v_3/v_2)^2))$
$n = 4$	$\Delta\varphi = \pi/2 - \mathrm{arctg}((v_4/v_3)(v_2 - (v_4/v_3)^2)/(v_3 - v_1(v_4/v_3)^2))$
$n = 5$	$\Delta\varphi = \pi/2 - \mathrm{arctg}((v_5/v_4)(v_3 - v_1(v_5/v_4)^2)/(v_4 - v_2(v_5/v_4)^2 + (v_5/v_4)^4))$

Доказательство. Рассмотрим определение полосы пропускания $\Delta\omega$, задаваемое соотношением

$$\Delta\omega =$$

$$= \arg\left(\left|\Phi(s, \omega_0) = \frac{v_n\omega_0^n}{s^n + \sum\limits_{i=1}^{n} v_i\omega_0^i s^{n-i}}\right|_{s = j\omega;\ \omega\to\infty} \cong\right.$$

$$\left.\cong \frac{v_n\omega_0^n}{\omega^n} \leqslant \delta\right) = (v_n)^{1/n}\omega_0/(\delta)^{1/n}. \qquad \blacksquare(10)$$

Утверждение 5 (У5). Оценка $\hat{\Delta}_\varepsilon\,\omega$ полосы пропускания $\Delta_\varepsilon\omega = \arg\left(\left|\Phi_\varepsilon(s, \omega_0)\right\|_{s = j\omega}\Big|_{\omega \leqslant \Delta_\varepsilon\omega} \leqslant \delta_\varepsilon \ll 1\right)$ ТПМ ПФ (1) на уровне δ_ε относительной частотной ошибки определяется выражением

$$\hat{\Delta}_\varepsilon\,\omega = \delta_\varepsilon\frac{v_n\omega_0}{v_{n-1}}. \qquad \square(11)$$

Доказательство. В силу определения полосы пропускания $\Delta_\varepsilon\omega$ ТПМ ПФ (1) по ошибке $\varepsilon(t)$ можно записать соотношения

$$\Delta_\varepsilon\omega = \arg\left(\left|\Phi_\varepsilon(s, \omega_0) = 1 - \Phi(s, \omega_0)\right|_{s = j\omega;\ \omega\to\infty} =\right.$$

$$= \left|\frac{s^n + v_1\omega_0 s^{n-1} + \ldots + v_{n-1}\omega_0^{n-1}s}{s^n + v_1\omega_0 s^{n-1} + \ldots + v_{n-1}\omega_0^{n-1}s + v_n\omega_0^n}\right|_{s = j\omega;\ \omega\to 0} =$$

$$\left.= \frac{v_{n-1}\omega}{v_n\omega_0} \leqslant \delta_\varepsilon\right) = \delta_\varepsilon\frac{v_n\omega_0}{v_{n-1}}\Bigg\}. \qquad \blacksquare(12)$$

Утверждение 6 (У6). Добротность D_1 по скорости ТПМ ПФ (1) определяется выражением

$$D_1 = (v_n\omega_0)/v_{n-1}. \qquad \square(13)$$

Доказательство. Добротность по скорости является характеристикой системы с ТПМ ПФ в установившемся кинетическом режиме при входном воздействии $g(t) = \dot{g}_0\,t$, изменяющемся с постоянной скоростью $\dot{g}_0$. Содержательно добротность по скорости задается выражением

$$D_1 = \dot{g}_0/\varepsilon_y, \qquad (14)$$

где ε_y — значение установившейся ошибки, для которой в соответствии с теоремой о конечном значении оригинала можно записать следующую цепочку соотношений:

$$\varepsilon_y = \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s\varepsilon(s) = \lim_{s\to 0} s\Phi_\varepsilon(s, \omega_0)g(s), \qquad (15)$$

где $\varepsilon(s)$, $g(s)$ — лапласовы образы соответственно ошибки $\varepsilon(t)$ и входного воздействия $g(t)$; $\Phi_\varepsilon(s, \omega_0)$ — передаточная функция системы с ТПМ ПФ по ошибке, вычисляемая с помощью соотношений

$$\Phi_\varepsilon(s, \omega_0) = \frac{\varepsilon(s)}{g(s)} = 1 - \Phi(s, \omega_0) =$$

$$= \frac{s^n + v_1\omega_0 s^{n-1} + \ldots + v_{n-1}\omega_0^{n-1}s}{s^n + v_1\omega_0 s^{n-1} + \ldots + v_{n-1}\omega_0^{n-1}s + v_n\omega_0^n}. \qquad (16)$$

Для входного воздействия $g(t) = \dot{g}_0\,t$ его лапласов образ $g(s)$ задается выражением

$$g(s) = \dot{g}_0/s^2. \qquad (17)$$

Если в выражение (15) подставить соотношения (16) и (17) и совершить предельный переход $s \to 0$, то получим $\varepsilon_y = \dot{g}_0\,\dfrac{v_{n-1}}{v_n\omega_0}$, что с использованием соотношения (14) приводит к выражению (13). ■

Утверждение 7 (У7). Длительность переходного процесса $t_п = t_п(\omega_0)$ ТПМ ПФ (1) удовлетворяет соотношению

$$t_п = t_п(\omega_0) = t_п(\omega_0 = 1)/\omega_0,$$

где $t_п(\omega_0 = 1)$ — время переходного процесса системы с ТПМ ПФ (2). □

Доказательство. Справедливость утверждения следует из примечания 1. ■

Примечание 3 (П3). Длительность переходного процесса $t_п(\omega_0 = 1)$ определяется путем моделирования, а для случая ньютоновского размещения корней полинома знаменателя $D(s)$ передаточной функции (2) может быть определена [18] аналитически в силу уравнения

$$t_п = \arg\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}t_п^i = 0{,}05\mathbf{e}^{t_п}\right).$$

В табл. 2 приведены общесистемные показатели ТПМ ПФ (1), полученные в силу приведенных выше утверждений. В табл. 2 $M(\omega) = |\Phi(j\omega, \omega_0)|$ — модуль частотной характеристики "вход-выход", $\delta(\omega) = |\Phi_\varepsilon(j\omega, \omega_0)|$ — модуль частотной характеристики по ошибке. Показатели со знаком (*) являются показателями ТПМ ПФ вида (2), которые определяются моделированием, показатель со знаком (**) вычисляется с помощью выражений, приведенных в табл. 1.

В случае использования табл. 1 и 2 при синтезе систем на основе ТПМ ПФ (1) с ньютоновским размещением корней полинома ее знаменателя $D(s, \omega_0)$ надо помнить, что его коэффициенты [14] определяются соотношениями

$$v_i = C_n^i\,\omega_0^i\,(i = \overline{1, n}), \qquad (19)$$

а при синтезе систем на основе ТПМ с передаточной функцией (1) с круговым размещением Баттерворта корней полинома ее знаменателя $D(s, \omega_0)$

Таблица 2

Общесистемные показатели ТПМ с ПФ (1)

1	Аналитическое представление полинома знаменателя $D(s, \omega_0)$		$D(s, \omega_0) = s^n + \sum_{i=1}^{n} v_i \omega_0^i s^{n-i}$
2	Перерегулирование σ		$\sigma = \sigma^*$
3	Частота среза ω_c		$\omega_c = \dfrac{v_n \omega_0}{v_{n-1}}$
4	Запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi$		$\Delta\varphi = \Delta^{**}\varphi(v_i)$
5	Полоса пропускания $\Delta\omega/\omega_0$	$M(\omega) \geqslant \delta$	$\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = \left(\dfrac{v_n}{\delta}\right)^{1/n}$
6		$\delta(\omega) \leqslant \delta_\varepsilon$	$\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = \dfrac{\delta_\varepsilon v_n}{v_{n-1}}$
7	Добротность по скорости $D_1(\omega_0)$		$D_1(\omega_0) = \dfrac{v_n \omega_0}{v_{n-1}}$
8	Время переходного процесса $t_п(\omega_0)$		$t_п(\omega_0) = \dfrac{t_п^*}{\omega_0}$

его коэффициенты определяются [14] соотношениями

$$v_1 = \frac{1}{\sin(\pi/2n)}\omega_0,\ v_i = \frac{v_{i-1}\cos((i-1)\pi/2n)}{\sin(i\pi/2n)}\omega_0^i,$$
$$(i = \overline{1, n-1}),\ v_n = \omega_0^n. \qquad (20)$$

Оценка предельно достижимых динамических показателей типовых полиномиальных моделей непрерывных систем с амплитудной модуляцией как функции частоты сигнала-носителя

Поскольку представление ТПМ ПФ в форме (1) сводится при выбранном размещении корней полинома ее знаменателя к однопараметрической задаче выбора значения характеристической частоты ω_0, то проблема оценки предельно достижимых динамических показателей ТПМ непрерывных систем с амплитудной модуляцией как функции частоты сигнала-носителя сводится к оценке предельно допустимых значений частоты ω_0. Процедура оценки значения ω_0 опирается на сопряжение полос частот, определяемых, с одной стороны, теоремой Шеннона—Котельникова как функции частоты ГСН, а с другой — соотношением для $\Delta\omega$ (10) амплитудной частотной характеристики по выходу выбранной ТПМ, определяемой искомой характеристической частотой ω_0. В результате этого сопряжения получаем соотношение

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{\Delta t}\bigg|_{\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f}} = 2\pi f = \omega_{ГСН} = \Delta\omega =$$
$$= ((v_n/\delta)^{1/n})\omega_0, \qquad (21)$$

где Δt, T, f, $\omega_{ГСН}$, δ — соответственно, интервал дискретности "квазидискретного" ГСН амплитудно-модулированного сигнала длительности в половину периода ГСН, период ГСН, его циклическая частота, его круговая частота и уровень, на котором фиксируется полоса пропускания ТПМ по значению амплитудной частотной характеристики выходного сигнала, обычно $\delta = 0{,}05$. Соотношение (21) позволяет записать для предельно допустимого значения характеристической частоты ω_0 ТПМ представление

$$\omega_0 = 2\pi f/(v_n/\delta)^{1/n}\big|_{\delta = 0{,}05} = 2\pi f/(20v_n)^{1/n}. \qquad (22)$$

Используя соотношение (22) на основании табл. 2, дополнив ее значениями предельно допустимых значений ω_0 для каждого порядка n используемой ТПМ, при выбранном размещении корней полинома знаменателя ТПМ ПФ (1) и для наиболее используемых частот f = 50 Гц и f = 400 Гц можно построить таблицы показателей ТПМ при использовании их в составе систем с модуляцией. Показатели ТПМ для случая ньютоновского размещения корней полинома знаменателя ТПМ ПФ (1) сведены в табл. 3, показатели ТПМ для случая баттервортовского размещения полинома знаменателя ТПМ ПФ (1) представлены в табл. 4.

Таблица 3

Показатели типовых полиномиальных моделей с размещением Ньютона корней полиномов знаменателей их передаточных функций

Порядок ТПМ	Аналитическое представление полиномов $D(s, \omega_0)$ Ньютона знаменателя ПФ ТПМ	Предельно допустимые значения ω_0		σ, %	ω_c/ω_0	$\Delta\varphi°$	Полосы пропускания $\Delta\omega/\omega_0$ на уровне		D_1/ω_0	$t_п\omega_0$
		f = 50 Гц	f = 400 Гц				$M(\omega) \geqslant 0{,}05$	$\delta(\omega) \leqslant 0{,}05$		
1	$\{s + \omega_0\}$	15,7	125,6	0	1	90	20	0,05	1	3
2	$\{s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2\}$	62,3	498,4	0	0,5	76,3	4,47	0,025	0,5	4,75
3	$\{s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3\}$	112,9	903,2	0	0,33	71,25	2,714	0,0167	0,33	6,3
4	$\{s^4 + 4\omega_0 s^3 + 6\omega_0^2 s^2 + 4\omega_0^3 s + \omega_0^4\}$	157	1256	0	0,25	68,58	2,115	0,0125	0,25	7,8
5	$\{s^5 + 5\omega_0 s^4 + 10\omega_0^2 s^3 + 10\omega_0^3 s^2 + 5\omega_0^4 s + \omega_0^5\}$	203,9	1631,2	0	0,2	66,94	1,82	0,01	0,2	9,15

Таблица 4

Показатели типовых полиномиальных моделей с размещением Баттерворта корней полиномов знаменателей их передаточных функций

Порядок ТПМ	Аналитическое представление полиномов $D(s, \omega_0)$ Ньютона знаменателя ПФ ТПМ	Предельно допустимые значения ω_0		σ, %	ω_c/ω_0	Δφ°	Полосы пропускания $\Delta\omega/\omega_0$ на уровне		D_1/ω_0	$t_п\omega_0$
		f = 50 Гц	f = 400 Гц				$M(\omega)\geqslant 0{,}05$	$\delta(\omega)\leqslant 0{,}05$		
1	$\{s + \omega_0\}$	15,7	125,6	0	1	90	20	0,05	1	3
2	$\{s^2 + 1{,}414\omega_0 s + \omega_0^2\}$	76	608	5	0,7	65,5	4,13	0,035	0,71	4,5
3	$\{s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3\}$	120,5	964	9	0,5	60,5	2,6	0,026	0,5	6,0
4	$\{s^4 + 2{,}6\omega_0 s^3 + 3{,}4\omega_0^2 s^2 + 2{,}6\omega_0^3 s + \omega_0^4\}$	148,8	1190,4	11	0,385	59,8	2,11	0,02	0,385	6,87
5	$\{s^5 + 3{,}24\omega_0 s^4 + 5{,}24\omega_0^2 s^3 + 5{,}24\omega_0^3 s^2 + 3{,}24\omega_0^4 s + \omega_0^5\}$	176,2	1409,6	13	0,31	60,1	1,78	0,017	0,31	7,65

Табл. 3, 4 содержат стандартный набор показателей качества процессов в системах, описываемых ТПМ, параметризованных характеристической частотой ω_0 на заданных уровнях значений

$$M(\omega) = \mathrm{mod}\left\{ \Phi(s, \omega_0) = \left.\frac{v_n\omega_0^n}{s^n + \sum\limits_{i=1}^{n} v_i\omega_0^i s^{n-i}}\right|_{s=j\omega} \right\},$$

$$\delta(\omega) = \mathrm{mod}\{\Phi_\varepsilon(s, \omega_0) = 1 - \Phi(s)|_{s=j\omega}\}.$$

Алгоритм аналитического конструирования последовательного компенсатора для систем управления техническим объектом с модуляцией

Совокупность аналитических соотношений, полученных выше, а также набор сведений о показателях ТПМ, представленных в табл. 2—4, позволяют сформировать следующий алгоритм аналитического конструирования последовательного компенсатора для систем управления техническим объектом с амплитудной модуляцией:

1. Получить информацию о размерности n технического объекта.

2. Задать требования к показателям качества проектируемой системы в переходном режиме в виде перерегулирования σ_R и длительности переходного процесса $t_{пR}$ и в установившемся режиме в виде добротности по скорости D_{1R} или относительной частотной ошибки $\delta_{\varepsilon R}$ в заданной полосе частот гармонического внешнего воздействия $(\Delta\omega)_R$.

3. По значению перерегулирования σ_R выбрать конкретный вариант ТПМ порядка n: так, в случае $\sigma_R = 0$ % следует выбирать ТПМ с ньютоновским размещением корней полинома знаменателя ее передаточной функции, в случае $\sigma_R \neq 0$ % можно выбирать ТПМ с баттервортовским размещением корней полинома знаменателя ее передаточной функции.

4. На основании выбранного варианта ТПМ и ее размерности n, пользуясь табл. 3 и 4, оценить максимально допустимые значения характеристической частоты ω_0: при частотах ГСН амплитудной модуляции f = 50 Гц $\omega_0 = \omega_0$ (f = 50), и при f = 400 Гц $\omega_0 = \omega_0$ (f = 400).

5. Пользуясь табл. 3 и 4, решить задачу

$$\omega_{0R} = \max\{\omega_0 = \arg(t_п(\omega_0) \leqslant t_{пR}),$$
$$\omega_0 = \arg(D_1(\omega_0) \geqslant D_{1R}),\ \omega_0 = \arg(\delta_\varepsilon(\omega_0) \leqslant \delta_{\varepsilon R})\}.$$

6. Проверить выполнение условий

6.1: $\omega_0 = \omega_0$ (f = 50) $\geqslant \omega_{0R}$;

6.2: $\omega_0 = \omega_0$ (f = 400) $\geqslant \omega_{0R}$.

7. На основании результатов выполнения п. 6 принять одно из решений:

7.1. В случае выполнения обоих условий 6.1 и 6.2 допускается выбрать аппаратные компоненты, составляющие технический объект, работающие на любой из приведенных частот питающего напряжения.

7.2. В случае выполнения одного из условий 6.1 и 6.2 допускается выбрать аппаратные компоненты, составляющие технический объект, работающие на частоте, для которой выполняется условия п. 6.

7.3. В случае невыполнения ни одного из условий 6.1 и 6.2 перейти к п. 2 алгоритма с тем, чтобы снизить требования к показателям качества проектируемой системы, в противном случае перейти на более высокую частоту ГСН, если это позволяют сделать технические возможности.

8. Аппаратно скомпоновать технический объект и составить его передаточную функцию $W_{ТО}(s)$.

9. Пользуясь значением характеристической частоты $\omega_0 = \omega_{0R}$, на основании представления (6) сформировать желаемую передаточную функцию прямой ветви проектируемой системы

$$W(s,\ \omega_0 = \omega_{0R}) = \frac{\Phi(s, \omega_0)}{1 - \Phi(s, \omega_0)} =$$

$$= \frac{v_n\omega_0^n}{(s^{n-1} + v_1\omega_0 s^{n-2} + \ldots + v_{n-1}\omega_0^{n-1})s}. \quad (23)$$

10. Представить желаемую передаточную функцию прямой ветви проектируемой системы в виде произведения передаточной функции $W_{ПК}(s, \omega_0)$ последовательного компенсатора и передаточной функции $W_{ТО}(s)$ технического объекта

$$W(s, \omega_0) = \frac{v_n \omega_0^n}{(s^{n-1} + v_1 \omega_0 s^{n-2} + \ldots + v_{n-1} \omega_0^{n-1})s} = W_{ПК}(s, \omega_0) W_{ТО}(s). \quad (24)$$

11. На основании (24) вычислить передаточную функцию конструируемого последовательного компенсатора

$$W_{ПК}(s, \omega_0) = \frac{v_n \omega_0^n}{(s^{n-1} + v_1 \omega_0 s^{n-2} + \ldots + v_{n-1} \omega_0^{n-1})s} W_{ТО}^{-1}(s). \quad (25)$$

12. Провести комплексное исследование системы с последовательным компенсатором с передаточной функцией (25), разместив его в цепи тракта "постоянного тока" между демодулятором с фильтром и модулятором, в модельной оболочке Simulink.

13. В случае положительных результатов выполнения п. 12 осуществить техническую реализацию последовательного компенсатора на микроконтроллере, агрегированном с цифро-аналоговым преобразователем. Для этого перейти от непрерывного представления последовательного компенсатора п. 11 к его дискретному представлению с помощью процедуры c2d пакета MATLAB.

Иллюстративный пример

В качестве примера рассмотрим задачу проектирования следящего электропривода с исполнительным двигателем переменного тока. Следуя алгоритму:

1) зададим технический объект — электропривод, составленный из усилительно-преобразовательного устройства, содержащего фильтр демодулированного сигнала, сервоусилитель и асинхронный двухфазный исполнительный двигатель. Экспертная оценка состава технического объекта дает размерность $n = 3$;

2) зададим требования к показателям качества проектируемой системы:

в форме перерегулирования $\sigma_R = 0$ %, времени переходного процесса $t_{пR} = 1$ с, добротности по скорости $D_{1R} = 50$ с$^{-1}$;

3) по значению $\sigma_R = 0$ % приходим к необходимости использования ТПМ с ньютоновским размещением корней полинома знаменателя ее передаточной функции;

4) на основании выбранного варианта ТПМ и ее размерности $n = 3$, пользуясь табл. 3, оцениваем предельно допустимые значения характеристической частоты ω_0 при частотах ГСН амплитудной модуляции $\omega_0 = \omega_0$ ($f = 50$) = 112,9 с$^{-1}$ и $\omega_0 = \omega_0$ ($f = 400$) = 903,2 с$^{-1}$;

5) пользуясь табл. 3, решаем задачу

$$\omega_{0R} = \max\left\{\begin{aligned} &\omega_0 = \arg\left(t_п = \frac{6{,}3}{\omega_0} = 1\right) = 6{,}3; \\ &\omega_0 = \arg(D_1 = 0{,}33\omega_0 = 50) = 150 \end{aligned}\right\} = 150;$$

6) проверяем выполнения условий

6.1: $\omega_0 = \omega_0$ ($f = 50$) = 112,9 < ω_{0R} = 150;

6.2: $\omega_0 = \omega_0$ ($f = 400$) = 903,2 < ω_{0R} = 150;

7) на основании результатов проверки выполнения п. 6 устанавливаем, что выполняется только условие 6.2 и поэтому допускается выбрать аппаратные компоненты, составляющие технический объект, работающие на частоте $f = 400$ Гц;

8) на основании аппаратной компоновки ТО, описанной в п. 1, составляем его передаточную функцию

$$W_{ТО}(s) = \frac{K_п}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)s};$$

9) пользуясь значением характеристической частоты $\omega_0 = \omega_{0R} = 150$, на основании представления (23) формируем желаемую передаточную функцию прямой ветви проектируемой системы

$$W(s, \omega_0 = \omega_{0R}) = \frac{150^3}{(s^2 + 3 \cdot 150 s + 3 \cdot 150^2)s};$$

10) выполняя п.п. 10—11 алгоритма, на основании (25) вычисляем передаточную функцию конструируемого последовательного компенсатора

$$W_{ПК}(s, \omega_0) = W(s, \omega_0 = \omega_{0R}) W_{ТО}^{-1}(s) = \frac{150^3 K_п^{-1}(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s^2 + 3 \cdot 150 s + 3 \cdot 150^2}. \quad ■$$

Задача аналитического конструирования последовательного компенсатора на примере системы управления техническим объектом с амплитудной модуляцией с частотой ГСН $f = 400$ Гц решена.

Заключение

Частота гармонического сигнала-носителя в системах с амплитудной модуляцией является важным системным фактором. Как его можно учесть при аналитическом конструировании последовательного компенсатора, доставляющего системе с амплитудной модуляцией требуемые показатели качества, предложено в настоящей статье.

Список литературы

1. **Куракин К. И., Куракин Л. К.** Анализ систем автоматического регулирования на несущей переменного тока. М.: Машиностроение, 1978. 238 с.
2. **Сабинин Ю. А.** Позиционные и следящие электромеханические системы. СПб.: Энергоатомиздат. Санкт-Петербургское отд-ние, 2001. 208 с.
3. **Заде Л., Дезоер Ч.** Теория линейных систем (Метод пространства состояний) / Пер. с. англ. М.: Наука, 1970. 703 с.
4. **Андреев Ю. Н.** Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
5. **Григорьев В. В., Дроздов В. Н., Лаврентьев В. В., Ушаков А. В.** Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1983. 245 с.
6. **Джури Э.** Импульсные системы автоматического регулирования. М.: Физматгиз, 1963. 456 с.
7. **Julius T.** Tou Modern control theory. New York: McGraw-Hill Inc., 1964. 427 p.
8. **Shannon C. E.** A Mathematical theory of communication // Bell System Technical Journal. 1948. V. 27. P. 379—423.
9. **Основы** автоматического регулирования. Теория / Под ред. В. В. Солодовникова. М.: Машгиз, 1954. 1117 с.
10. **Бесекерский В. А., Попов Е. П.** Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1966. 992 с.
11. **Красовский А. А., Поспелов Г. С.** Основы автоматики и технической кибернетики. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1962. 600 с.
12. **Ким Д. П.** Определение желаемой передаточной функции при синтезе систем управления алгебраическим методом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 5. С. 15—21.
13. **Дударенко Н. А., Слита О. В., Ушаков А. В.** Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: учеб. пособ. / Под ред. А. В. Ушакова СПб.: СПбГУ ИТМО, 2008. 325 с.
14. **Гайдук А. Р.** Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012. 360 с.
15. **Быстров С. В., Вундер Н. А., Ушаков А. В.** Решение проблемы сигнальной неопределенности при аналитическом конструировании последовательного компенсатора в задаче управления пьезоприводом // Науч.-техн. вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16, № 3. С. 451—459.
16. **Brasch F. M., Jr. and J. B. Pearson.** Pole placement using dynamic compensators // IEEE Trans. Automat. Contr. Feb.1970.Vol. 15, N. 1. P. 34—43.

Analytical Designing of a Consecutive Compensator for the Technical Plants' Control Systems with Modulation

S. V. Bystrov, sbystrov@mail.ru, **A. S. Vasyliev,** vasyliev_90@mail.ru,
N. A. Vunder, polinova_nina@mail.ru ✉, **A. V. Ushakov,** ushakov-AVG@yandex.ru,
ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: **Vunder Nina A.,** Postgraduate Student of the Department of Control Systems and Informatics, ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation, e-mail: polinova_nina@mail.ru

Received on December 09, 2016
Accepted on June 01, 2017

The article proposes an analytical design algorithm of a consecutive compensator in the control system of a plant with amplitude modulation. The modulation is generated by using an induction motor as an actuator. This type of systems is called "quasi-discrete" because an information transmission using a harmonic carrier signal is carried out by its half-waves, that means discretely such that a discrete interval is equal to the half-period of the carrier signal. The algorithm is based on typical polynomial models parameterized by characteristic frequency. Analytical representations of quality indicators of systems with typical polynomial model are presented in the article. The bandwidth is associated with the characteristic frequency at the level of small values of the amplitude frequency response of the system. At the same time, system quality indicators are associated with frequency of the carrier signal, this follows from the Kotel'nikov-Shannon's theorem. This became the basis of the proposed algorithm. Thus, the complete algorithm of the design of control systems with target quality indicators for plants with amplitude modulation is received in this work. Results are illustrated by an example of design of a servomotor drive with an AC motor. The main power frequencies of induction motors are 50 Hz and 400 (500) Hz. Therefore, the results are oriented to these values of the signal carrier frequencies.

Keywords: *typical polynomial model, characteristic frequency, amplitude modulation, stability, Kotel'nikov-Shannon's theorem, frequency of the carrier signal, quality indicators, analytical design algorithm of consecutive compensator*

Acknowledgements: This work was supported by the Government of the Russian Federation, Grant 074-U01; Ministry of Education and Science of the Russian Federation, Project 14.Z50.31.0031; Russian Federation President Grant № 14.Y31.16.9281-НШ.

For citation:

Bystrov S. V., Vasyliev A. S., Vunder N. A., Ushakov A. V. Analytical Designing of a Consecutive Compensator for the Technical Plants' Control Systems with Modulation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2017, vol. 18, no. 9, pp. 597—604.

DOI: 10.17587/mau.18.597-604.

References

1. **Kurakin K. I., Kurakin L. K.** *Analiz sistem avtomaticheskogo regulirovanija na nesushhej peremennogo toka* (Analysis of automatic control systems on an AC carrier), Moscow, Mashinostroenie, 1978, 238 p. (in Russian).
2. **Sabinin Ju. A.** *Pozicionnye i sledjashhie jelektromehanicheskie sistemy* (Positional and servo electromechanical systems), SPb, Jenergoatomizdat. Sankt-Peterburgskoe otd-nie, 2001, 208 p. (in Russian).

3. **Zadeh L., Dezoer Ch.** *Teorija linejnyh sistem (Metod prostranstva sostojanij)* (Theory of Linear Systems (State Space Method)), Moscow, Nauka, 1970, 703 p. (in Russian).

4. **Andreev Ju. N.** *Upravlenie konechnomernymi linejnymi ob'ektami* (Control of finite-dimensional linear objects), Moscow, Nauka, 1976, 424 p. (in Russian).

5. **Grigor'ev V. V., Drozdov V. N., Lavrent'ev V. V., Ushakov A. V.** *Sintez diskretnyh reguljatorov pri pomoshhi JeVM* (Synthesis of discrete regulators by computer), Leningrad, Mashinostroenie. Leningr. otd-nie, 1983, 245 p. (in Russian).

6. **Dzhuri Je.** *Impul'snye sistemy avtomaticheskogo regulirovanija* (Pulse control systems), Moscow, Fizmatgiz, 1963, 456 p. (in Russian).

7. **Julius T.** Modern control theory, New York, McGraw-Hill Inc., 1964, 427 p.

8. **Shannon C. E.** A Mathematical theory of communication, *Bell System Technical Journal*, 1948, vol. 27, pp. 379—423.

9. **Solodovnikov V. V.** *Osnovy avtomaticheskogo regulirovanija. Teorija* (Fundamentals of automatic control. Theory), Moscow, Fizmatgiz, 1954, 1117 p. (in Russian).

10. **Besekerskij V. A., Popov E. P.** *Teorija sistem avtomaticheskogo regulirovanija* (Theory of automatic control systems), Moscow, Nauka, 1966, 992 p. (in Russian).

11. **Kpasovskij A. A., Pospelov G. S.** *Osnovy avtomatiki i tehnicheskoj kibepnetiki* (Fundamentals of Automation and Technical Cybernetics), Moscow — Leningrad, Gosjenepgoizdat, 1962, 600 p. (in Russian).

12. **Kim D. P.**, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2011, no. 5, pp. 15—21 (in Russian).

13. **Dudarenko N. A., Slita O. V., Ushakov A. V.** *Matematicheskie osnovy sovremennoj teorii upravlenija: apparat metoda prostranstva sostojanij: uchebnoe posobie. / Pod red. Ushakova A. V.* (Mathematical foundations of modern management theory: the apparatus of the state space method: a textbook. Ed. Ushakov A. V.), SPb, SPbGU ITMO, 2008, 325 p. (in Russian).

14. **Gajduk A. R.** *Teorija i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravlenija (polinomial'nyj podhod)* (Theory and mesthods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach)), Moscow, Fizmatgiz, 2012, 360 p. (in Russian).

15. **Bystrov S. V., Vunder N. A., Ushakov A. V.**, *Nauchno-tehnicheskij vestnik informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki*, 2016, vol. 16, no. 3, pp. 451—459. (in Russian).

16. **Brasch F. M., Jr. and J. B. Pearson.** Pole placement using dynamic compensators, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1970, vol. 15, no. 1, pp. 34—43.

УДК 681.5.015.75 DOI: 10.17587/mau.18.604-611

В. Н. Якимов, д-р техн. наук, проф., yvnr@hotmail.com,
В. И. Батищев, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой, vib@list.ru,
А. В. Машков, ст. преподаватель, mavstu@list.ru,
Самарский государственный технический университет

Статистическая идентификация линейных динамических систем с использованием знакового аналого-стохастического квантования входного и выходного сигналов[1]

Задача статистической идентификации импульсной переходной функции линейной динамической системы решается с использованием знакового аналого-стохастического квантования входного и выходного сигналов. Данный вид квантования позволил перейти от обработки многоразрядных отсчетов входного и выходного сигналов к обработке целочисленных отсчетов времени, определяемых сменой знака результата квантования. Получены соотношения для последовательного вычисления отсчетов импульсной переходной функции, которые не требуют предварительной оценки корреляционных функций.

Ключевые слова: *статистическая идентификация, динамическая система, стохастическое квантование, знаковый сигнал, отсчет времени*

Введение

Импульсная переходная функция является одной из наиболее распространенных форм математического описания во временной области оператора преобразования линейных динамических систем. Классический подход к идентификации импульсной переходной функции предполагает использование предварительной информации о структуре системы и наблюдаемых сигналах на ее входе и выходе. В соответствии с данным подходом достаточно полно разработаны теоретические основы и алгоритмическое обеспечение для количественной оценки импульсной переходной функции [1—5]. Однако быстрое развитие науки, техники и инженерных технологий ведет к необходимости совершенствования существующих методов идентификации систем [6, 7]. В частности, это касается дальнейшего развития методов идентификации, основанных на бинарном представлении (бинарном квантовании) сигналов исследуемой системы. В последнее время наблюдается определенный интерес к подобному роду методов. Использование таких методов на практике в основном мотивировано тем, что они обеспечивают снижение вычислительных затрат и приводят к техническому упрощению построения аппаратуры приема и преобразования сигналов. Общий подход к идентификации систем на основе обработки данных наблюдений, представляющих собой бинарные временные последо-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-08-00269).