

Ю. Н. Челноков, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. лаб., ChelnokovYuN@gmail.com,  
Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов

## Приложения теории кинематического управления движением твердого тела

*Представлен обзор работ, посвященных следующим приложениям теории кинематического управления движением твердого тела: двухконтурное управление вращательным движением космического аппарата с использованием БИНС; бесплатформенные корректируемые системы ориентации и навигации движущихся объектов; управление движением платформенного комплекса "ТСП-Аргус" космического проекта "Марс-94"; оптимальная переориентация орбиты, плоскости орбиты и коррекция угловых элементов орбиты космического аппарата посредством реактивного ускорения, ортогонального плоскости орбиты аппарата; решение обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием бикватернионной теории кинематического управления; кинематическое управление в механике роботов-манипуляторов (независимое программное управление движением по скорости).*

**Ключевые слова:** кинематическое управление, твердое тело, движущийся объект, ориентация, навигация, платформенный комплекс, космический аппарат, орбита, обратная задача кинематики, робот-манипулятор, стабилизирующее управление, кватернион, бикватернион

### Введение

Кинематические задачи управления играют важную роль в теории управления движением твердого тела в силу следующих причин. Во-первых, они, в отличие от динамических задач управления, во многих случаях имеют аналитические решения, которые часто используются при построении программных траекторий и управлений движением твердого тела. Во-вторых, использование аналитических решений кинематических задач управления в сочетании с решением обратных задач динамики позволяет в ряде случаев построить эффективные законы управления движением твердого тела, учитывающие его динамику.

Отметим также, что задачи управления в кинематической постановке рассматриваются в теории дифференциальных игр, при создании бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС), в механике космического полета и в механике роботов-манипуляторов, при решении задач наведения, анимации (оживления) пространственных образов на экранах ЭВМ и в других прикладных задачах.

В статье [1] дается обзор работ по теории кинематического управления вращательным (угловым) движением твердого тела и пространственным движением свободного твердого тела, которое представляет собой композицию вращательного (углового) и поступательного (траекторного) движений твердого тела. Излагаемая в этой статье теория кинематического управления основана на кватернионных и бикватернионных кинематических моделях

движения твердого тела. Здесь же приводится обзор работ, посвященных задачам построения оптимальных законов изменения вектора кинетического момента динамически симметричного твердого тела и твердого тела с произвольным распределением масс, сообщение которого твердому телу обеспечивает его оптимальный перевод из произвольного начального углового положения в требуемое конечное угловое положение. Эти задачи занимают промежуточное положение между кинематическими и динамическими задачами управления вращательным движением твердого тела и играют важную роль в теории управления ориентацией космических аппаратов с помощью вращающихся маховиков.

В данной статье представлен обзор работ, посвященных различным актуальным приложениям теории кинематического управления движением в механике космического полета, инерциальной навигации, механике роботов-манипуляторов.

### 1. Двухконтурное управление вращательным движением твердого тела (космического аппарата) с использованием БИНС

В. Н. Бранцем и И. П. Шмыглевским предложена двухконтурная схема управления вращательным движением твердого тела (космического аппарата) с использованием БИНС. В книге В. Н. Бранца и И. П. Шмыглевского [2, 1992, с. 171] говорится: "Кинематическая задача ориентации играет большую роль во всех задачах ориентации; как будет показано далее, к ней может быть сведена и динамическая задача управления ориентацией". В этой же книге [2, 1992, с. 172—173] рассмотрен "вопрос

принципиального доказательства достижимости устойчивого процесса управления и стабилизации вращательным движением и сведения динамической задачи управления к кинематической". В заключение этого рассмотрения сказано: "Процесс управления (вращательным движением твердого тела) можно интерпретировать как динамическое управление движением связанного базиса  $E$  при приведении его к некоторому приборному базису, движущемуся с угловой скоростью  $\Omega_{kE}$ ; такое управление и характеризует процесс стабилизации. Движение же приборного базиса определяется потребной скоростью коррекции  $\Omega_{kE}$  таким образом, чтобы совместить его с заданным опорным базисом (процесс приведения).

Таким образом, динамическая задача управления ориентацией в рассматриваемой двухконтурной схеме управления — контур стабилизации и контур приведения — может быть сведена к кинематической задаче приведения (управления)."

## **2. Бесплатформенные корректируемые системы ориентации и навигации движущихся объектов**

**Алгоритмы корректируемых БИНС.** Теория кинематического управления движением используется для построения алгоритмов корректируемых БИНС. В. Н. Бранцем и И. П. Шмыглевским [2, 1992] рассмотрены позиционные и интегрально-позиционные коррекции приборного базиса в БИНС, реализующие различные законы кинематического управления вращательным движением твердого тела (различные законы угловой скорости коррекции связанного базиса (асимптотически устойчивые законы приведения связанного базиса к опорному)).

**Определение местоположения и ориентации подвижных объектов с помощью БИНС посредством решения на бортовом вычислителе кватернионных уравнений движения гироскопических систем.** В работах Ю. Н. Челнокова [3, 1991; 4, 2011] рассматривается определение местоположения и ориентации подвижных объектов по показаниям чувствительных элементов БИНС посредством решения на бортовом вычислителе кватернионных прецессионных и полных уравнений движения гироскопических систем. Предлагается подход к определению географических координат и параметров ориентации объекта в инерциальной и во вращающейся опорной системах координат по текущим показаниям чувствительных элементов БИНС, заключающийся в решении на бортовом вычислителе кватернионных уравнений движения гироскопических систем. В основе рассматриваемого подхода лежит известная динамическая аналогия невозмущаемых гироскопических систем и двухкомпонентных инерциальных навигационных систем.

В рамках предлагаемого подхода обсуждается применение для решения задач навигации и ориентации средствами БИНС прецессионных кватернионных уравнений движения гироскопического

маятника, бигироскопной вертикали, двухроторной маятниковой гирорамы, пространственного гирогоризонткомпыаса, а также полных кватернионных уравнений движения невозмущаемых гироскопических систем. Для построения прецессионных кватернионных уравнений движения гироскопических систем фактически используется теория кинематического управления вращательным движением твердого тела. Рассматриваемый в этих работах подход позволяет предложить новые уравнения функционирования БИНС, обладающие свойствами уравнений тех или иных невозмущаемых или корректируемых гироскопических систем, позволяет использовать методы и результаты гироскопии для построения алгоритмов функционирования корректируемых БИНС. Использование кватернионов (параметров Родрига—Гамильтона) позволяет построить удобные с вычислительной точки зрения алгоритмы.

**Теория и алгоритмы бесплатформенных корректируемых систем ориентации и навигации.** В работах П. К. Плотникова [5, 1999; 6, 1999], П. К. Плотникова, Ю. В. Чеботаревского, В. Б. Никишина, А. А. Большакова [7, 2003] и П. К. Плотникова, Ю. В. Чеботаревского, В. Ю. Чеботаревского [8, 2005] рассмотрены теория и кватернионные алгоритмы бесплатформенных корректируемых систем ориентации и навигации. При этом используются корректируемые кватернионные кинематические уравнения ориентации твердого тела и теория кинематического управления.

## **3. Управление движением платформенного комплекса "ТСП-Аргус" космического проекта "Марс-94"**

С 1990 по 1996 год в рамках Государственного космического проекта "Марс-94" Всероссийским НИИ транспортного машиностроения (г. С.-Петербург) при участии ряда других организаций был создан по заказу Института космических исследований РАН платформенный комплекс "ТСП-Аргус" (главный конструктор комплекса — Г. А. Пейсахович), предназначенный для программного наведения и стабилизации блока научной аппаратуры при съемке поверхности Марса, калибровке научной аппаратуры по диффузному экрану и звездам, а также для определения ориентации этого блока. Основной функциональный элемент комплекса — трехосная стабилизированная платформа с научной аппаратурой и блоком гироскопов. Платформа помещена в трехосный обращенный торсионный кардановый подвес и установлена на выходном звене трехзвенного манипулятора с вращательными сочленениями, который с помощью выносного рычага крепится на борту космического аппарата. Управление движением платформы осуществляется подачей на входы гироскопа управляющих воздействий, а стабилизация этого движения с высокой точностью (по техническому заданию — единицы угловых секунд) обеспечивается контуром стабили-

зации, представляющим собой замкнутую через гириблок трехканальную систему автоматического управления. Большие пространственные развороты платформы без "складывания" рам карданова подвеса обеспечиваются соответствующими разворотами звеньев манипулятора. Эту функцию выполняет контур наведения, представляющий собой замкнутую через бортовой вычислитель систему управления (в которой манипулятор с приводами звеньев выступает в роли локального объекта) и обрабатывающий угловые отклонения выходного звена манипулятора от платформы с точностью, равной нескольким единицам угловых минут.

В состав разработчиков математического обеспечения системы управления движением комплекса "ТСП-Аргус" входила лаборатория механики, навигации и управления движением Института проблем точной механики и управления РАН (г. Саратов). В ходе разработки комплекса сотрудниками лаборатории (Ю. Н. Челноковым, Ю. В. Садомцевым, В. В. Батуриным, А. В. Молоденковым, А. А. Панковым) были разработаны различные математические модели движения платформенного комплекса, принципы и подходы к решению основных проблем, возникающих при построении систем управления движением такого рода высокоточных платформенных комплексов. Решению различных аспектов общей проблемы управления движением комплекса "ТСП-Аргус" посвящена серия публикаций из пяти статей, подготовленных сотрудниками лаборатории и опубликованных в журнале "Изв. РАН. Теория и системы управления" в 2001—2002 годах. В них основное внимание уделяется построению математических моделей движения комплекса, позволяющих учесть при моделировании движения не только динамику манипулятора и платформы, но и переносное движение основания (космического аппарата), а также нелинейности приводов, конечность разрядных сеток цифроаналоговых и аналогово-цифровых преобразователей и другие возмущающие факторы; построению алгоритмов ориентации, программного управления и наведения комплекса; принципу управления движением платформы по ее абсолютному угловому положению; синтезу цифровых регуляторов для стабилизированного разворота платформы; управлению движением в режиме сканирования; определению отклонений кинематических осей комплекса от их расчетных положений по информации об абсолютном угловом положении платформы в пространстве.

Принцип управления движением платформы по ее абсолютному угловому положению и высокоточные алгоритмы такого управления были предложены Ю. Н. Челноковым [9—13] и основаны на теории кинематического управления угловым движением твердого тела. Такое управление движением платформы построено по принципу обратной связи, при котором управляющее воздействие на гириблок контура стабилизации формируется в виде векторной суммы программной угловой скорос-

ти и составляющей, пропорциональной ошибке по угловому положению платформы.

Как уже отмечалось, основным функциональным элементом платформенного комплекса является трехстепенная стабилизированная платформа (ТСП) с камерами научной аппаратуры и блоком гироскопов (гироблоком). Одной из главных задач комплекса при его функционировании на орбите является осуществление заданных пространственных разворотов платформы в целях высокоточного наведения визирных осей камер научной аппаратуры на определенную точку инерциального пространства. Эта задача связана с определением действительной и программной ориентации платформы и вычислением компонент вектора программной абсолютной угловой скорости ее движения, которые в виде программных управляющих воздействий подаются на входы гириблока контура стабилизации и обеспечивают требуемую текущую ориентацию камер научной аппаратуры.

Стабилизация движения платформы в инерциальном пространстве осуществляется контуром стабилизации, на входы которого подаются управляющие воздействия  $U_{c_j}$  ( $j = 1, 2, 3$ ), имеющие смысл проекций требуемой абсолютной угловой скорости платформы на связанные с ней координатные оси. При этом, если управляющие воздействия равны проекциям программной угловой скорости платформы, то действительное абсолютное угловое движение платформы оказывается некорректируемым, что может привести к большим ошибкам. В связи с этим для повышения точности стабилизированного движения платформы Ю. Н. Челноковым было предложено использовать принцип обратной связи, в соответствии с которым вектор управлений  $U_c = (U_{c1}, U_{c2}, U_{c3})$  формируется в виде векторной суммы программной абсолютной угловой скорости платформы и составляющей, пропорциональной ошибке по ее угловому положению. Теория такого (кинематического) управления была опубликована в работах П. К. Плотникова, А. Н. Сергеева, Ю. Н. Челнокова [14, 1991], А. А. Панкова, Ю. Н. Челнокова [15, 1995] и Ю. Н. Челнокова [13, 2006].

#### **4. Оптимальная переориентация орбиты, плоскости орбиты и коррекция угловых элементов орбиты космического аппарата посредством реактивного ускорения, ортогонального плоскости орбиты аппарата**

Переориентация орбиты, плоскости орбиты и коррекция угловых элементов орбиты космического аппарата (КА) могут быть осуществлены посредством реактивного ускорения центра масс КА, ортогонального плоскости орбиты аппарата. При таком управлении траекторным движением КА вектор ускорения от тяги реактивного двигателя (управление) во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости оскулирующей орбиты, т.е. ортогонально радиусу-вектору и

вектору скорости центра масс КА (коллинеарно вектору момента скорости центра масс КА). Дифференциальные уравнения движения центра масс КА в ньютоновском гравитационном поле, описывающие изменение размеров и формы мгновенной орбиты КА, при таком управлении интегрируются, давая уравнение конического сечения. Поэтому управляемое движение центра масс КА в этом случае описывается дифференциальными уравнениями, характеризующими изменение мгновенной ориентации орбиты КА или используемой (например, орбитальной) вращающейся системы координат, в которой записываются исходные уравнения движения центра масс КА, и дифференциальным уравнением для истинной аномалии (угловой переменной, отсчитываемой в плоскости мгновенной орбиты), характеризующей положение центра масс КА на орбите.

Орбита КА в процессе рассматриваемого управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в инерциальном пространстве под действием такого управления, как неизменяемая (недеформируемая) фигура (эллипс или окружность), вращаясь в инерциальной системе координат с мгновенной угловой скоростью, направленной вдоль радиуса-вектора центра масс КА. Частным случаем задачи переориентации орбиты КА является хорошо известная и имеющая большое практическое значение задача коррекции угловых элементов орбиты КА, когда изменения угловых элементов орбиты в процессе управления имеют малые значения. Использование управления, ортогонального плоскости оскулирующей орбиты КА, позволяет корректировать элементы орбиты КА, сохраняя форму и размеры орбиты КА неизменными. Это ценное свойство такого процесса переориентации орбиты КА является полезным при решении как задачи коррекции угловых элементов орбиты КА, так и других задач механики космического полета, например, при управлении конфигурацией группировки спутников.

Подчеркнем, что математическая модель, с помощью которой решаются задачи переориентации орбиты, плоскости орбиты и коррекции угловых элементов орбиты КА посредством реактивного ускорения центра масс КА, ортогонального плоскости орбиты аппарата, имеет вид кинематических уравнений углового движения твердого тела, которые дополняются скалярным дифференциальным уравнением для истинной аномалии. Скалярное управление (алгебраическая величина реактивного ускорения центра масс КА, ортогонального плоскости орбиты аппарата) входит в коэффициенты этих кинематических уравнений (в проекции вектора абсолютной угловой скорости мгновенной ориентации орбиты КА или орбитальной системы координат). Поэтому эти задачи могут быть отнесены к классу кинематических задач управления угловым движением твердого тела.

Частные случаи рассматриваемой задачи оптимальной переориентации орбиты КА рассматрива-

лись в работах Ю. М. Копнина [16], В. Н. Лебедева [17], М. З. Борщевского, М. В. Иословича [18], Г. Л. Гродзовского, Ю. Н. Иванова, В. В. Токарева [19], Д. Е. Охоцимского, Ю. Г. Сихарулидзе [20].

В работе В. Н. Лебедева [17] изучался поворот плоскости околоземной круговой орбиты с помощью тяги, нормальной к мгновенной плоскости орбиты, с использованием усредненных уравнений в угловых элементах орбиты.

В работе Г. Л. Гродзовского, Ю. Н. Иванова, В. В. Токарева [19] исследовался поворот плоскости круговой орбиты спутника поперечной тягой (тягой, направленной перпендикулярно к мгновенной плоскости орбиты, называемой также в работе [19] "бинормальной тягой"). Для описания движения использованы уравнения ориентации орбиты КА в угловых оскулирующих элементах, записанные в безразмерных переменных. Задача рассматривалась в предположении, что начальная орбита спутника лежит в плоскости экватора и требуемый угол наклона орбиты является малым.

В работе Д. Е. Охоцимского, Ю. Г. Сихарулидзе [20] рассматривалась задача поворота плоскости оскулирующей орбиты КА с помощью "бинормальной силы", создающей "бинормальное ускорение", с использованием уравнений для угловых оскулирующих элементов. Рассмотрение ограничивается случаем круговой орбиты, который, по словам авторов этой работы, был исследован в работах Ю. М. Копнина [16] и М. З. Борщевского, М. В. Иословича [18]. Анализируется оптимальный в смысле минимизации характеристической скорости поворот плоскости круговой орбиты на угол наклона орбиты  $\Delta I$  за неограниченное время. Показывается, что для малых углов поворота  $\Delta I$  одноимпульсный поворот плоскости орбиты, выполняемый на линии узлов, энергетически эквивалентен повороту плоскости орбиты с помощью "бинормального импульса скорости". Отметим, однако, что поворот орбиты на угол  $\Delta I$  рассматривается в работе [20] в приближенной постановке с использованием лишь одного из дифференциальных уравнений для угловых оскулирующих элементов орбиты.

В статье С. А. Ишкова и В. А. Романенко [21] рассматривается вековое изменение трех угловых элементов орбиты под действием реактивного ускорения, ортогонального плоскости оскулирующей орбиты КА. Эта задача называется в статье задачей коррекции элементов орбиты "бинормальным реактивным ускорением". Предполагается, что КА оснащен электрореактивным двигателем с регулируемой тягой, работающим без выключения. Используемые в статье [21] исходные уравнения движения КА имеют вид кинематических уравнений в угловых элементах. Для решения задачи авторы статьи переходят в этих уравнениях к новой независимой переменной (истинной аномалии). Полученные уравнения дополняются уравнением для характеристической скорости.

Задача решается с помощью принципа максимума и усреднения уравнений. Из усредненных уравнений получен ряд аналитических соотношений для определения затрат характеристической скорости в частных случаях коррекции одного или двух элементов орбиты (наклона орбиты, долготы восходящего узла) при условии малости изменения наклона орбиты и долготы восходящего узла. По словам авторов статьи [21], уравнения задачи оптимизации в полном объеме не приведены и не проанализированы из-за большой громоздкости уравнений для сопряженных переменных.

Решение задачи оптимальной переориентации орбиты КА посредством реактивного ускорения, ортогонального плоскости оскулирующей орбиты, или посредством реактивной тяги, создающей это ускорение, с помощью кинематических уравнений в угловых элементах орбиты в строгой нелинейной постановке достаточно сложно в силу нелинейности этих уравнений, наличия в них особых точек, в которых угол наклона орбиты равен 0 или  $\pi$ , а также в силу громоздкости уравнений для сопряженных переменных. Поэтому для решения этой задачи оптимальной переориентации орбиты КА вместо угловых элементов орбиты целесообразно использовать [4, 13, 22—24] параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона).

Дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера [4, 13, 22—24] образуют систему пяти нелинейных стационарных дифференциальных уравнений первого порядка относительно параметров Эйлера (Родрига—Гамильтона), описывающих ориентацию орбиты КА, и истинной аномалии. Эти уравнения в отличие от четырех нелинейных дифференциальных уравнений ориентации орбиты в угловых элементах орбиты не имеют особых точек, к тому же при переходе в них от времени к новой независимой переменной (истинной аномалии) получается (при известном (как функция времени) управлении) система четырех линейных нестационарных дифференциальных уравнений относительно параметров Эйлера, в то время как дифференциальные уравнения в угловых элементах орбиты остаются существенно нелинейными. Отметим также, что система уравнений в параметрах Эйлера, описывающая ориентацию орбиты КА, может рассматриваться как нестационарная система дифференциальных уравнений четвертого порядка, так как уравнение для истинной аномалии в этой системе интегрируется в квадратурах независимо от других уравнений, в силу чего истинная аномалия может рассматриваться как известная функция времени. При таком рассмотрении указанная система уравнений является (при известном управлении) линейной дифференциальной системой.

Указанные обстоятельства делают использование кинематических уравнений ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера для решения задач переориентации орбиты, плоскости орбиты и коррекции угловых элементов орбиты более удобным и эффективным в сравнении с использованием урав-

нений в угловых оскулирующих элементах. Такое решение задачи переориентации орбиты КА в непрерывной постановке (с использованием ограниченной (малой) тяги) рассмотрено в работах [25—28]. В них в качестве управления использовано ускорение от тяги реактивного двигателя, в качестве функционала качества процесса переориентации орбиты КА рассмотрены комбинированный функционал, равный взвешенной сумме времени переориентации и интеграла от квадрата модуля управления, а также комбинированный функционал, равный взвешенной сумме времени переориентации и импульса управления (характеристической скорости) за время переориентации орбиты КА. Получены законы оптимального управления (законы изменения реактивного ускорения КА), удовлетворяющие необходимым условиям принципа максимума Понтрягина. Построены условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа. Сформулированы соответствующие кватернионные дифференциальные краевые задачи переориентации орбиты КА с подвижным правым концом траектории, описываемые системами нелинейных (для первого функционала) или линейных (для второго функционала) нестационарных дифференциальных уравнений восьмого порядка, в которых роль независимой переменной играет истинная аномалия (при использовании вместо времени в качестве независимой переменной истинной аномалии из рассмотрения исключается дифференциальное сопряженное уравнение, соответствующее истинной аномалии). Установлены первые интегралы дифференциальных уравнений краевых задач оптимизации, в том числе их кватернионный первый интеграл, существующий для любого (не только оптимального) управления. Отметим, что кватернионное сопряженное уравнение в рассматриваемой задаче имеет форму кватернионного фазового уравнения, что делает дифференциальные уравнения краевых задач компактными и удобными для численного решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА. В этих работах также приведены примеры численного решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА в непрерывных постановках (с использованием ограниченной (малой) тяги), выявлены особенности и закономерности оптимальных траекторий и оптимальных управлений. Приведенные в работе [28] примеры содержат как варианты с минимизацией комбинированных функционалов качества, так и варианты с минимизацией времени (случай быстрогодействия) или характеристической скорости в отдельности.

Отметим, что исследованию задачи оптимальной переориентации орбиты КА в непрерывной постановке (с использованием в качестве управления реактивного ускорения, создаваемого двигателем малой тяги) и с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат посвящены работы [23, 29—31]. Использование кватернионного диф-

ференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат более удобно при аналитическом исследовании задачи оптимальной переориентации орбиты КА в непрерывной постановке, так как оно в случае круговой орбиты и постоянного (по модулю) управления является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, в то время как кватернионное дифференциальное уравнение ориентации орбиты КА в этом случае является линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Однако использование кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА имеет преимущество при численном решении задачи оптимальной переориентации орбиты КА, поскольку кватернион ориентации орбиты КА является оскулирующим (медленно изменяющимся) элементом орбиты. Кватернион ориентации орбитальной системы координат таким свойством не обладает, так как является быстро меняющейся переменной.

Отметим также, что в недавно опубликованных работах [32, 33] продолжено аналитическое и численное изучение задачи об оптимальной переориентации орбиты КА с помощью реактивного ускорения, ортогонального плоскости оскулирующей орбиты. Функционал, определяющий качество процесса управления, представляет собой свертку с весовыми множителями двух критериев: времени и суммарного импульса реактивного ускорения, затраченных на процесс управления (частные случаи этого функционала — случаи быстрогодействия и минимизации характеристической скорости). В этих работах изложена новая теория решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА в импульсной постановке (с использованием импульсной (большой) реактивной тяги). Приведены алгоритмы решения краевых задач оптимальной двухимпульсной и многоимпульсной переориентации орбиты КА (для нефиксированного числа импульсов реактивного ускорения) и примеры численного решения краевых задач оптимальной переориентации орбиты КА с использованием ограниченной (малой) или импульсной (большой) тяги, в которых для описания ориентации орбиты КА используется кватернионный оскулирующий элемент ориентации орбиты.

#### **5. Решение обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов с использованием бикватернионной теории кинематического управления движением свободного твердого тела**

Бикватернионная теория кинематического управления движением свободного твердого тела может быть применена для решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов. Обратная задача кинематики является одной из фундаментальных задач механики, она используется не только в робототехнике, но и в трехмерной компьютерной анимации, при разработке компьютерных игр и

моделировании движений молекул. Эта задача в робототехнике заключается в определении обобщенных координат робота-манипулятора по известному угловому и линейному местоположению выходного звена (схвата) робота-манипулятора. В качестве шести неизвестных обобщенных координат выступают величины, характеризующие относительные перемещения звеньев робота-манипулятора (как правило, это углы относительных поворотов и относительные линейные перемещения звеньев), а в качестве известных величин — три декартовы координаты выбранной точки схвата манипулятора и три угла Эйлера или Крылова, характеризующие поворот схвата вокруг этой точки.

Решение обратной задачи кинематики в традиционной постановке сводится к решению алгебраических систем, состоящих из шести трансцендентных уравнений, имеющих сложную структуру, определяемую выбранной кинематической схемой робота-манипулятора. В большинстве случаев эти системы не имеют аналитических решений, а при их численном решении возникают значительные трудности, связанные с плохой сходимостью, а также с неоднозначностью решения. Поэтому при проектировании многих существующих роботов-манипуляторов их кинематические схемы выбирались так, чтобы обратные задачи кинематики решались аналитически. Такой выбор кинематических схем манипуляторов может быть неоптимальным с функциональной точки зрения.

Решением обратной задачи кинематики занимались многие авторы начиная с 70-х годов прошлого века и по сегодняшний день. Первыми были А. Т. Yang и R. Freudenstein (1964), J. J. Uicker, J. Denavit, R. S. Hartenberg (1964), D. L. Pieper (1968), D. Kohli и A. H. Soni (1975). Выделим основные известные методы решения обратной задачи кинематики: геометрический подход, алгебраический подход со сведением к полиному; группа методов, основанных на применении матрицы Якоби; группа методов, основанных на использовании алгоритма Ньютона; метод последовательно покоординатного спуска, метод последовательного преобразования Монте-Карло. С помощью кватернионного и бикватернионного аппаратов задачу решали А. Т. Yang, R. Freudenstein (1964) и В. П. Глазков (2005). В последние годы обратную задачу кинематики активно решали с применением искусственного интеллекта и нейронных сетей. Одним из наиболее популярных в настоящее время является приближенный итерационный алгоритм FABRIK.

Универсального способа решения обратной задачи кинематики не существует, все известные методы имеют свои достоинства и недостатки. Поэтому поиск новых эффективных методов решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов продолжает оставаться актуальным.

В работах А. В. Молоткова и Ю. Н. Челнокова [34, 2001; 36, 2002], Ю. Н. Челнокова [35, 2002; 37, 2013], Е. И. Ломовцевой (Нелаевой) и Ю. Н. Челнокова [38, 39, 2013; 40, 41, 2014; 42, 43, 2015] раз-

вивается предложенный Ю. Н. Челноковым принципиально новый метод решения обратных задач кинематики роботов-манипуляторов, основанный на применении бикватернионной теории кинематического управления движением свободного твердого тела по принципу обратной связи.

Предложенный метод заключается в решении задачи Коши для кинематических уравнений движения робота-манипулятора, представляющих собой системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат робота-манипулятора. Содержащиеся в этих интегрируемых (в ходе решения обратной задачи) кинематических уравнениях векторы абсолютных линейной и угловой скоростей выходного звена (схвата) робота-манипулятора рассматриваются как управления и формируются по принципу обратной связи в виде некоторых функций обобщенных координат таким образом, чтобы любое выбранное (программное) положение схвата робота-манипулятора было асимптотически устойчивым в большом или в целом. Тогда любое частное решение дифференциальных кинематических уравнений будет стремиться асимптотически устойчивым образом к требуемой точке пространства обобщенных координат, отвечающей заданному положению схвата робота-манипулятора. Поэтому в результате решения задачи Коши для любых заданных начальных значений обобщенных координат робота-манипулятора его обобщенные координаты примут в конечный момент времени значения, отвечающие (с заданной степенью точности) требуемому положению схвата робота-манипулятора (для которого необходимо решить обратную задачу кинематики), и, следовательно, обратная задача кинематики будет решена. Отметим, что начальное положение выходного звена может задаваться произвольным набором значений обобщенных координат из их рабочих диапазонов, и формирование указанных законов управления движением схвата робота-манипулятора эффективно осуществляется с использованием бикватернионной кинематической теории управления движением свободного твердого тела.

Таким образом, в предлагаемом методе решения обратных задач кинематики роботов-манипуляторов решение нелинейных алгебраических (как правило, трансцендентных) систем уравнений заменяется интегрированием кинематических уравнений движения робота-манипулятора. Алгоритм решения обратной задачи кинематики заключается в численном интегрировании кинематических уравнений движения робота-манипулятора для заданных или произвольно выбранных (из заданных рабочих диапазонов) начальных значений обобщенных координат робота-манипулятора. Фигурирующие в этих уравнениях проекции вектора мгновенной абсолютной угловой скорости выходного звена манипулятора и вектора мгновенной абсолютной скорости выбранной точки этого звена на связанные с этим звеном координатные оси (под абсолютной скоростью понимается скорость

относительно основания манипулятора) выступают в качестве управлений, построение которых выполняется по принципу обратной связи в соответствии с теорией кинематического управления таким образом, чтобы выходное звено манипулятора переходило (с требуемой степенью точности) из любого выбранного начального положения в любое заданное конечное положение асимптотически устойчивым образом. Значения обобщенных координат манипулятора, соответствующие этому конечному положению схвата, и будут решением обратной задачи манипулятора.

К достоинствам предложенного нового метода решения обратных задач кинематики роботов-манипуляторов относятся:

- универсальность и возможность применения для кинематически избыточных схем роботов-манипуляторов;
- единственность решения (если оно существует) для выбранного закона кинематического управления и заданного начального положения манипулятора;
- высокая точность решения;
- высокое быстродействие;
- неитерационность (все другие известные методы являются итерационными).

Предложенный метод позволяет также эффективно решать задачу кинематически оптимального перевода выходного звена манипулятора из его любого начального положения, задаваемого начальными значениями обобщенных координат, в требуемое конечное положение, задаваемое бикватернионом конечного положения выходного звена манипулятора, т.е. эффективно решать задачу оптимального разложения кинематически оптимального перемещения выходного звена манипулятора из его любого начального положения в требуемое конечное положение по отдельным степеням свободы манипулятора.

## **6. Кинематическое управление в механике роботов-манипуляторов: независимое программное управление движением по скорости**

Кинематическое управление движением твердого тела используется в механике роботов-манипуляторов для построения так называемого независимого программного управления движением по скорости (см., например, книгу К. Фу, Р. Гонсалеса и К. Ли [44, 1989]). В работе [44] рассмотрены методы управления механическим манипулятором в связанных (обобщенных) координатах, в том числе "нелинейное независимое управление по обратной связи". Отмечается, что "во многих приложениях более предпочтительным является программное управление движением, которое обеспечивает движение манипулятора в декартовых координатах по требуемой траектории с необходимой скоростью". При независимом программном управлении движением манипулятора по скорости работа различных двигателей в сочленениях проводится [44]

независимо и одновременно с различными скоростями, изменяющимися во времени для того, чтобы обеспечить установившееся движение конечного звена манипулятора вдоль любой оси неподвижной (опорной) системы координат. При таком управлении задаются [44] желаемые линейная и угловая скорости конечного звена манипулятора и используется матричное кинематическое уравнение, позволяющее вычислить скорости в сочленениях (обобщенные скорости) через желаемые скорости выходного звена и определить режимы работы двигателей в сочленениях манипулятора для того, чтобы, как уже отмечалось, обеспечить желаемое движение конечного звена манипулятора вдоль любой оси неподвижной системы координат. Отметим, что желаемые (в частности, оптимальные) линейная и угловая скорости конечного звена манипулятора могут быть построены, как это предлагается, например, в работе E. Ozgur, Y. Mezouar [45, 2016], с использованием бикватернионной теории кинематического управления движением свободного твердого тела.

Сведения по независимому управлению движением даны в более ранних работах D. E. Whitney [46—48, 1969, 1972], где рассматривается независимое управление движением манипуляторов по скорости. В работе R. P. Paul, B. E. Shimano и G. Mayer [49, 1981] рассмотрены уравнения кинематического управления для простых манипуляторов.

В работе Fabrizio Caccavale и Bruno Siciliano [50, 2001] рассматривается задача кинематического управления кинематически-избыточными космическими манипуляторами с использованием кватернионов ориентации. Вводятся кватернион ошибки ориентации. Выводятся соотношения для присоединенных скоростей. В работе X. Wang, D. Han, C. Yu и Z. Zheng [51, 2012] рассмотрена геометрическая структура дуального кватерниона с приложениями в кинематическом управлении.

В работе L. F.C. Figueredo, B. V. Adorno, J. Y. Ishihara и G. A. Borges [52, 2013] рассматривается робастное (грубое) кинематическое управление манипуляционными системами с использованием дуальных кватернионов. Укажем также недавнюю работу E. Ozgur, Y. Mezouar [45, 2016], где рассмотрено управление движением руки робота с использованием дуальных кватернионов и кинематического бикватернионного стабилизирующего закона управления, предложенного Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li [53, 2008] и имеющего вид отрицательной бикватернионной логарифмической обратной связи.

#### Список литературы

1. **Челноков Ю. Н.** Теория кинематического управления движением твердого тела // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 7. С. 435—446.
2. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
3. **Челноков Ю. Н.** Определение местоположения и ориентации подвижных объектов по показаниям чувствительных элементов БИНС посредством решения на бортовом вычислителе

кватернионных уравнений движения гироскопических систем // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1991. № 4. С. 3—12 (**Chelnokov Yu. N.** Determination of position and orientation of moving objects from sensors of platformless inertial navigation systems, through on-board computer solution of the quaternion equations of motion of gyroscopic systems // Mechanics of Solids. 1991. Vol. 26, N. 4. P. 3—12).

4. **Челноков Ю. Н.** Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 560 с.
5. **Плотников П. К.** Построение и анализ кватернионных дифференциальных уравнений задачи определения ориентации твердого тела с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. № 2. С. 3—14.
6. **Плотников П. К.** Элементы теории работы одной разновидности бесплатформенных инерциальных систем ориентации // Гироскопия и навигация. 1999. № 2. С. 23—35.
7. **Плотников П. К., Чеботаревский Ю. В., Никишин В. Б., Большаков А. А.** Применение кватернионных алгоритмов в бесплатформенных системах ориентации и навигации // Авиакосмическое приборостроение. 2003. № 10. С. 21—31.
8. **Плотников П. К., Чеботаревский Ю. В., Чеботаревский В. Ю.** Анализ свойств полуаналитической инерциальной навигационной системы и ее бесплатформенного аналога // Авиакосмическое приборостроение. 2005. № 3. С. 17—23.
9. **Челноков Ю. Н., Зубенко Г. И., Пейсахович Г. А., Власов Ю. Б., Панков А. А.** Принципы и задачи управления движением комплекса манипулятор — трехосная стабилизированная платформа по информации о движении выходного звена манипулятора // Тез. докл. третьей научной школы "Автоматизация создания математического обеспечения и архитектуры систем реального времени". М.: ГосНИИАС, 1992. С. 84—85.
10. **Челноков Ю. Н., Панков А. А., Пейсахович Г. А., Рудаков Р. Н., Уткин Г. В., Федосеев С. В., Ярошевский В. С.** Модели и алгоритмы ориентации и управления движением платформенного комплекса "ТСП — АРГУС" проекта "МАРС" // Материалы седьмой НТК "Экстремальная робототехника". С.-Пб.: Изд-во СПбГТУ, 1996. С. 186—196.
11. **Челноков Ю. Н., Батурин В. В., Садомцев Ю. В., Панков А. А., Пейсахович Г. А., Рудаков В. Н., Федосеев С. В., Уткин Г. В., Ярошевский В. С.** Модели и алгоритмы ориентации и управления движением платформенного комплекса "ТСП-Аргус" проекта "Марс" // Материалы Междунар. конф. "Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении". Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. С. 68—69.
12. **Зубенко Г. И., Молоденков А. В., Пейсахович Г. А., Садомцев Ю. В., Уткин Г. В., Федосеев С. В., Челноков Ю. Н.** Управление движением космического платформенного комплекса. Ч. II. Алгоритмы ориентации, программного управления и наведения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 159—167 (**Zubenko G. I., Molodencov A. V., Peisakhovitch G. A., Sadomtsev Yu. V., Utkin G. V., Fedoseev S. V., Chelnokov Yu. N.** Motion control for a space platform complex. II. Algorithms for orientation, programmed control, and guidance // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2001. Vol. 40, N. 5. P. 829—838).
13. **Челноков Ю. Н.** Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит. 2006. 512 с.
14. **Плотников П. К., Сергеев А. Н., Челноков Ю. Н.** Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 5. С. 9—18 (**Plotnikov P. K., Sergeev A. N., Chelnokov Yu. N.** Kinematic control problem for the orientation of a rigid body // Mechanics of Solids. 1991. Vol. 37, N. 5. P. 7—16).
15. **Панков А. А., Челноков Ю. Н.** Исследование кватернионных законов кинематического управления ориентацией твердого тела по угловой скорости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 6. С. 3—13 (**Pankov A. A., Chelnokov Yu. N.** Investigation of quaternion laws of kinematic control of solid body orientation in angular velocity // Mechanics of Solids. 1995. Vol. 33, N. 6. P. 3—13).
16. **Копнин Ю. М.** К задаче поворота плоскости орбиты спутника // Космические исследования. 1965. Т. 3, Вып. 4.
17. **Лебедев В. Н.** Расчет движения космического аппарата с малой тягой. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 108 с.
18. **Борщевский М. З., Иослович М. В.** К задаче о повороте плоскости орбиты спутника при помощи реактивной тяги // Космические исследования. 1969. Т. 7, Вып. 6.

19. **Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В.** Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975. 702 с.
20. **Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г.** Основы механики космического полета: Учеб. пособие. М.: Наука, 1990. 448 с.
21. **Ишков С. А., Романенко В. А.** Формирование и коррекция высокоэллиптической орбиты спутника земли с двигателем малой тяги // *Космические исследования*. 1997. Т. 35. № 3. С. 287—296.
22. **Челноков Ю. Н.** Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. Ч. 2 // *Космические исследования*. 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3—15 (**Chelnokov Yu. N.** Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II // *Cosmic Research*. 1993. Vol. 31, N. 3. P. 409—418).
23. **Челноков Ю. Н.** Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // *Прикладная математика и механика*. 2012. Т. 76. Вып. 6. С. 897—914 (**Chelnokov Yu. N.** Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane," *J. Appl. Math. Mech.* 76 (6), 646—657 (2012)).
24. **Челноков Ю. Н.** Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // *Космические исследования*. 2014. Т. 52. № 4. С. 322—336 (**Chelnokov Yu. N.** Quaternion Regularization in Celestial Mechanics and Astrodynamics and Trajectory Motion Control. II // *Cosmic Research*. 2014. Vol. 52, N. 4. P. 350—361).
25. **Ненахов С. В., Челноков Ю. Н.** Кватернионное решение задачи оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата // *Бортовые интегрированные комплексы и современные проблемы управления*: Сб. тр. Междунар. конф. М.: МАИ, 1998. С. 59—60.
26. **Сергеев Д. А., Челноков Ю. Н.** Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата // *Математика. Механика*: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 185—188.
27. **Сергеев Д. А., Челноков Ю. Н.** Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата // *Проблемы точной механики и управления*: Сб. науч. тр. ИПТМУ РАН. Саратов: Изд-во СГТУ, 2002. С. 64—75.
28. **Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.** Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2012. Т. 12. Вып. 3. С. 87—95.
29. **Челноков Ю. Н.** Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // *Математика. Механика*: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231—234.
30. **Челноков Ю. Н.** Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата: Кватернионный подход к решению задачи // *Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении*: Материалы Междунар. конф. ИПТМУ РАН. Саратов: Изд-во СГТУ, 2006. С. 54—60.
31. **Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.** Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер.* 2013. Т. 13. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 1. Ч. 1. С. 84—92.
32. **Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.** Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 1 // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2016. Т. 17, № 8. С. 567—575.
33. **Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.** Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 2 // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2016. Т. 17. № 9. С. 633—643.
34. **Молотков А. В., Челноков Ю. Н.** О применении теории кинематического управления к решению обратной задачи кинематики манипулятора с вращательными сочленениями // *Математика. Механика*: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 170—172.
35. **Челноков Ю. Н.** О некоторых проблемах нелинейной динамики и управления движением // *Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении*: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. техн. ун-та, 2002. С. 10—13.
36. **Молотков А. В., Челноков Ю. Н.** Решение обратной задачи кинематики робота-манипулятора "Пума" с использованием бикватернионной теории кинематического управления // *Математика. Механика*: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 204—206.
37. **Челноков Ю. Н.** Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2013. № 1. С. 38—58 (**Chelnokov Yu. N.**, Biquaternion Solution of the Kinematic Control Problem for the Motion of a Rigid Body and Its Application to the Solution of Inverse Problems of Robot-Manipulator Kinematics // *Mechanics of Solids*. 2013. Vol. 48, N. 1. P. 31—46).
38. **Ломовцева Е. И., Челноков Ю. Н.** Бикватернионные методы решения прямой и обратной задач кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора с использованием бикватернионной теории кинематического управления // *Матер. Всеросси. научн. конф. с международным участием "Проблемы критических ситуаций в точной механике и управлении"*. Саратов: ООО Издательский Центр "Наука", 2013. С. 270—274.
39. **Ломовцева Е. И., Челноков Ю. Н.** Дуальные матричные и бикватернионные методы решения прямой и обратной задач кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора. I // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2013. Т. 13, Вып. 4. Ч. 1. С. 78—85.
40. **Ломовцева Е. И., Челноков Ю. Н.** Дуальные матричные и бикватернионные методы решения прямой и обратной задач кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора. II // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2014. Т. 14, Вып. 1. С. 88—95.
41. **Нелаева Е. И., Челноков Ю. Н.** Решение обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора с применением бикватернионной теории кинематического управления // *Математика. Механика*: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 111—114.
42. **Нелаева Е. И., Челноков Ю. Н.** Решение прямых и обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием дуальных матриц и бикватернионов на примере стэнфордского манипулятора. Часть 1 // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2015. Т. 16. № 6. С. 373—380.
43. **Нелаева Е. И., Челноков Ю. Н.** Решение прямых и обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием дуальных матриц и бикватернионов на примере стэнфордского манипулятора. Часть 2 // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2015. Т. 16. № 7. С. 456—463.
44. **Фу К., Гонсалес Р., Ли К.** Робототехника. М.: Мир, 1989. 624 с.
45. **Ozgun E., Mezouar Y.** Kinematic modeling and control of a robot arm using unit dual quaternions // *Robotics and Autonomous Systems*. 77 (2016). P. 66—73.
46. **Whitney D. E.** Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses // *IEEE. Man-Machine Systems*, MMS-10, 1969. N. 2. P. 47—53.
47. **Whitney D. E.** State Space Models of Remote Manipulation Tasks // *Proc. Intl. Joint Conf. Artificial Intelligence*, Washington, D. C. 1969. P. 495—598.
48. **Whitney D. E.** The Mathematics of Coordinated Control of Prosthetic Arms and Manipulators // *Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement and Control*. 1972. 122. P. 303—309.
49. **Paul R. P., Shimano B. E., Mayer G.** Kinematic Control Equations for Simple Manipulators // *IEEE. Trans. Systems. M. Cybern.*, SMC-11. 1981. N. 6. P. 449—455.
50. **Fabrizio Caccavale, Bruno Siciliano.** Quaternion-Based Kinematic Control of Redundant Spacecraft/Manipulator Systems // *Proc. of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Seoul, Korea. May 21—26. 2001. P. 435—440.
51. **Wang X., Han D., Yu C., Zheng Z.** The geometric structure of unit dual quaternion with application in kinematic control, *J. Math. Anal. Appl.* (2012).
52. **Figueredo L. F. C., Adorno B. V., Ishihara J. Y., Borges G. A.** Robust kinematic control of manipulator robots using dual quaternion representation. *Robotics and Automation (ICRA)*, 2013 IEEE International Conference. 6—10 May 2013. P. 1949—1955.
53. **Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li, Weimeng Sun.** Control of Oriented Mechanical systems: A Method Based on Dual Quaternion // *Proc. of the 17th World Congress the International Federation of Automatic Control*. Seoul, Korea, July 6—11 2008. P. 3836—3841.

# Application of the Theory of Kinematic Motion Control of a Rigid Body

Yu. N. Chelnokov, ChelnokovYuN@gmail.com✉,

Institute of Precision Mechanics and Control Problems, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation

Corresponding author: Chelnokov Yury N., D. Sc., Head of Laboratory of Mechanics, Navigation and Motion Control, Institute of Precision Mechanics and Control Problems, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation, e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com

Received on February 13, 2017

Accepted on February 21, 2017

The theory of the kinematic control of the rotational (angular) motion of a rigid body and the spatial motion of a free rigid body used in the article is based on the quaternion and biquaternion kinematic models of the rigid body motion. In this theory, the kinematic equations of the rotational and (or) translational motion of a body are considered as the mathematical models of a rigid body motion, and the vectors of the angular and (or) translational velocities of a body or kinematic screws are used as the controls. The goal of the kinematic control is transfer of a rigid body from its assigned initial position to the desired final position by applying the required (program) angular and (or) linear velocities to the body. Also, the goal of the kinematic control can transfer a rigid body from its given initial position to any selected program path and, further, to an asymptotically stable motion along the program path with the required program angular and linear velocities by applying the required stabilizing angular and linear velocities to the body. In the article the authors present a review of the papers dedicated to the following applications of the theory of the kinematic control of a rigid body motion in the mechanics of a space flight, inertial navigation and mechanics of the robot manipulators: two-circuit control of the rotational motion of a rigid body (spacecraft) using a strapdown inertial navigation system; adjustable strapdown systems for orientation and navigation of the moving objects; TSP-Argus motion control platform complex for Mars-94 space project; optimal reorientation of the orbit, of the orbital plane and correction of the angular elements of the orbit of the spacecraft by means of a reactive acceleration, orthogonal to the plane of the orbit of the spacecraft; solving of the inverse problems of the kinematics of the robot manipulators using the biquaternion theory of the kinematic control; kinematic control for the mechanics of the robotic manipulators (independent program motion speed control).

**Keywords:** kinematic control, rigid body, moving object, orientation, navigation, platform complex, spacecraft, orbit, inverse problem of kinematics, robot manipulator, quaternion, biquaternion

For citation:

Chelnokov Yu. N. Application of the Theory of Kinematic Motion Control of a Rigid Body, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no.8, pp. 532–542.

DOI: 10/17587/mau.18.532-542

## References

1. Chelnokov Yu. N. *Teoriya kinematicheskogo upravleniya dvizheniem tverdogo tela* (The theory of the kinematic motion control of rigid body), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 7, pp. 435–446 (in Russian).
2. Branets V. N., Shmyglevskii I. P. *Vvedenie v teoriyu besplatfornnykh inertial'nykh navigatsionnykh sistem* (Introduction to the theory of strapdown inertial navigation systems), Moscow, Nauka, 1992, 280 p. (in Russian).
3. Chelnokov Yu. N. Determination of position and orientation of moving objects from sensors of platformless inertial navigation systems, through on-board computer solution of the quaternion equations of motion of gyroscopic systems, *Mechanics of Solids*, 1991, vol. 26, no. 4, pp. 3–12.
4. Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnye modeli i metody dinamiki, navigatsii i upravleniya dvizheniem* (Quaternion models and methods of dynamics, navigation and motion control), Moscow, Fizmatlit, 2011, 560 p. (in Russian).
5. Plotnikov P. K. *Postroenie i analiz kvaternionnykh differentsial'nykh uravnenii zadachi opredeleniya orientatsii tverdogo tela s pomoshch'yu besplatfornnoy inertial'noi navigatsionnoy sistemy* (Construction and analysis of quaternion differential equations of the problem of determining the orientation of a rigid body with the help of a strapdown inertial navigation system), *Izv. RAN. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1999, no. 2, pp. 3–14 (in Russian).
6. Plotnikov P. K. *Elementy teorii raboty odnoi raznovidnosti besplatfornnykh inertial'nykh sistem orientatsii* (Elements of the theory of operation of one species strapdown inertial orientation system), *Girokopiya i Navigatsiya*, 1999, no. 2, pp. 23–35 (in Russian).
7. Plotnikov P. K., Chebotarevskii Yu. V., Nikishin V. B., Bol'shakov A. A. *Primenenie kvaternionnykh algoritmov v besplatfornnykh sistemakh orientatsii i navigatsii* (Application of quaternion algorithms in strapdown systems of orientation and navigation), *Aviakosmicheskoe Priborostroenie*, 2003, no. 10, pp. 21–31 (in Russian).
8. Plotnikov P. K., Chebotarevskii Yu. V., Chebotarevskii V. Yu. *Analiz svoystv poluanaliticheskoi inertial'noi navigatsionnoy sistemy i ee besplatfornnogo analoga* (Analysis of properties of semi-analytic inertial navigation system and its counterpart strapdown), *Aviakosmicheskoe Priborostroenie*, 2005, no. 3, pp. 17–23 (in Russian).
9. Chelnokov Yu. N., Zubenko G. I., Peisakhovich G. A., Vlasov Yu. B., Pankov A. A. *Printsiipy i zadachi upravleniya dvizheniem kompleksa manipulator — trekhosnaia stabilizirovannaya platforma po*

informatsii o dvizhenii vykhodnogo zvena manipulatora (The principles and objectives of the complex motion control arm — three-axis stabilized platform for information on the output level of the manipulator motion), *Tez. dokl. tret'ei nauchnoi shkoly "Avtomatizatsiya sozdaniya matematicheskogo obespecheniya i arkhitektury sistem real'nogo vremeni"*, Moscow, GosNIIAS, 1992, pp. 84–85 (in Russian).

10. Chelnokov Yu. N., Pankov A. A., Peisakhovich G. A., Rudakov R. N., Utkin G. V., Fedoseev S. V., Yaroshevskii V. S. *Modeli i algoritmy orientatsii i upravleniya dvizheniem platformnogo kompleksa "TSP — Argus" proekta "Mars"* (Models and algorithms for orientation and motion control platform complex "TSP — ARGUS" project "MARS"), *Materialy sed'moi NTK "Ekstremal'naya robototekhnika"*, S.-Pb., Publishing house of SPbGTU, 1996, pp. 186–196 (in Russian).

11. Chelnokov Yu. N., Baturin V. V., Sadomtsev Yu. V., Pankov A. A., Peisakhovich G. A., Rudakov V. N., Fedoseev S. V., Utkin G. V., Yaroshevskii V. S. *Modeli i algoritmy orientatsii i upravleniya dvizheniem platformnogo kompleksa "TSP-Argus" proekta "Mars"* (Models and algorithms for orientation and motion control platform complex "TSP — Argus" project "Mars"), *Materialy mezhdunar. konf. "Problemy i perspektivy pretsizionnoi mekhaniki i upravleniya v mashinostroeni"*, Saratov, Publishing house of Sarat. university, 1997, pp. 68–69 (in Russian).

12. Zubenko G. I., Molodnikov A. V., Peisakhovich G. A., Sadomtsev Yu. V., Utkin G. V., Fedoseev S. V., Chelnokov Yu. N. *Motion control for a space platform complex. II. Algorithms for orientation, programmed control, and guidance*, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2001, vol. 40, no. 5, pp. 829–838.

13. Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ikh prilozheniya. Geometriya i kinematika dvizheniya* (Quaternion and bi-quaternion models and methods of solid state mechanics and their applications. Geometry and kinematics of motion), Moscow, Fizmatlit, 2006, 512 p. (in Russian)

14. Plotnikov P. K., Sergeev A. N., Chelnokov Yu. N. *Kinematic control problem for the orientation of a rigid body*, *Mechanics of Solids*, 1991, vol. 37, no. 5, pp. 7–16 (in Russian).

15. Pankov A. A., Chelnokov Yu. N. *Investigation of quaternion laws of kinematic control of solid body orientation in angular velocity*, *Mechanics of Solids*, 1995, vol. 33, no. 6, pp. 3–13.

16. Kopnin Yu. M. *K zadache povorota ploskosti orbity sputnika* (On the problem of the rotation of the satellite's orbital plane), *Kosmicheskoe issledovaniya*, 1965, vol. 3, no. 4 (in Russian).

17. Lebedev V. N. *Raschet dvizheniya kosmicheskogo apparata s maloi tiagoy* (Calculation of motion of the spacecraft with low thrust), Moscow, VC AS USSR, 1968, 108 p. (in Russian)

18. Borschevsky M. Z., Ioslovich M. V. *K zadache o povorote ploskosti orbity sputnika pri pomoshchi reaktivnoi tiagi* (On the problem of the rotation of the satellite's orbital plane with the help of jet thrust), *Kosmicheskoe Issledovaniya*, 1969, vol. 7, no. 6 (in Russian).

19. Grodzovskii G. L., Ivanov Iu. N., Tokarev V. V. *Mekhanika kosmicheskogo poleta. Problemy optimizatsii* (The mechanics of space flight. Optimization problems), Moscow, Nauka, 1975, 702 p. (in Russian).

20. **Okhotsimskii D. E., Sikharulidze Iu. G.** *Osnovy mekhaniki kosmicheskogo poleta* (Basis of the mechanics of space flight), Moscow, Nauka, 1990, 448 p. (in Russian).
21. **Ishkov S. A., Romanenko V. A.** Forming and correction of a high-elliptical orbit of an Earth satellite with low-thrust engine, *Cosmic Research*, 1997, vol. 35, no. 3, pp. 268–277.
22. **Chelnokov Yu. N.** Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II, *Cosmic Research*, 1993, vol. 31, no. 3, pp. 409–418.
23. **Chelnokov Yu. N.** Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane, *J. Appl. Math. Mech.* 76 (6), 646–657 (2012).
24. **Yu. N. Chelnokov.** Quaternion Regularization in Celestial Mechanics and Astrodynamics and Trajectory Motion Control. II, *Cosmic Research*, 2014, vol. 52, no. 4, pp. 350–361.
25. **Nenakhov S. V., Chelnokov Yu. N.** *Kvaternionnoe reshenie zadachi optimal'nogo upravleniya orientatsiei orbity kosmicheskogo apparata* (Quaternion solution of a task of an optimal control of spacecraft's orbit orientation), *Bortovye integrirovannye kompleksy i sovremennyye problemy upravleniya: Sb. tr. mezhdunar. konf.*, Moscow, Publishing house of MAI, 1998, pp. 59–60 (in Russian).
26. **Sergeev D. A., Chelnokov Yu. N.** *Optimal'noe upravlenie orientatsiei orbity kosmicheskogo apparata* (Optimal control of the orientation of the spacecraft's orbit), *Matematika. Mekhanika: Sb. nauch. tr.*, Saratov, Publishing house of Sarat. university, 2001, no. 3, pp. 185–188 (in Russian).
27. **Sergeev D. A., Chelnokov Yu. N.** *Optimal'noe upravlenie orientatsiei orbity kosmicheskogo apparata* (Optimal control of the orientation of the spacecraft's orbit), *Problemy tochnoi mekhaniki i upravleniya: Sb. nauch. tr. IPTMU RAN*, Saratov, Publishing house of SGTU, 2002, pp. 64–75 (in Russian).
28. **Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N.** *Ob odnoi zadache optimal'noi pereorientatsii orbity kosmicheskogo apparata* (About a problem of spacecraft's orbit optimal reorientation), *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2012, vol. 12, no. 3, pp. 87–95 (in Russian).
29. **Chelnokov Yu. N.** *Optimal'naia pereorientatsiia orbity kosmicheskogo apparata posredstvom reaktivnoi tiagi, ortogonal'noi ploskosti orbity* (Optimal reorientation of spacecraft's orbit through thrust orthogonal to the plane of orbit), *Matematika. Mekhanika: Sbornik nauchnykh trudov*, Saratov, Publishing house of Sarat. university, 2006, no. 8, pp. 231–234 (in Russian).
30. **Chelnokov Yu. N.** *Optimal'naia pereorientatsiia orbity kosmicheskogo apparata: Kvaternionnyi podkhod k resheniiu zadachi* (Optimal reorientation of spacecraft's orbit. Quaternion approach to solving the problem), *Problemy i perspektivy pretsizionnoi mekhaniki i upravleniya v mashinostroenii: Materialy mezhdunar. konf. IPTMU RAN*, Saratov, Publishing house of SGTU, 2006, pp. 54–60 (in Russian).
31. **Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N.** *Reshenie zadachi optimal'noi pereorientatsii orbity kosmicheskogo apparata s ispol'zovaniem kvaternionnykh uravnenii orientatsii orbital'noi sistemy koordinat* (Solution of a problem of spacecraft's orbit optimal reorientation using quaternion equations of orbital system of coordinates orientation), *Izv. Sarat. universiteta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2013, vol. 13, no. 1, part 1, pp. 84–92 (in Russian).
32. **Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N.** *Issledovanie zadachi optimal'noi pereorientatsii orbity kosmicheskogo apparata posredstvom ogranicheynoi ili impul'snoi reaktivnoi tiagi, ortogonal'noi ploskosti orbity. Chast' 1* (Investigation of optimal reorientation of spacecraft orbit through limited or impulse jet thrust which is orthogonal to the plane of the orbit. Part 1), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 8, pp. 567–575 (in Russian).
33. **Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N.** *Issledovanie zadachi optimal'noi pereorientatsii orbity kosmicheskogo apparata posredstvom ogranicheynoi ili impul'snoi reaktivnoi tiagi, ortogonal'noi ploskosti orbity. Chast' 2* (Investigation of optimal reorientation of spacecraft orbit through limited or impulse jet thrust which is orthogonal to the plane of the orbit. Part 2), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 9, pp. 633–643 (in Russian).
34. **Molotkov A. V., Chelnokov Yu. N.** *O primenении teorii kinematicheskogo upravleniya k resheniiu obratnoi zadachi kinematiki manipuliatora s vrashchatelnymi sochleneniyami* (On the application of the kinematic theory of management to solve the inverse problem of kinematics manipulator with rotational joints), *Matematika. Mekhanika: Sb. nauch. tr.*, Saratov, Publishing house of Sarat. university, 2001, no. 3, pp. 170–172 (in Russian).
35. **Chelnokov Yu. N.** *O nekotorykh problemakh nelineinoy dinamiki i upravleniya dvizheniem* (On some problems of nonlinear dynamics and motion control), *Problemy i perspektivy pretsizionnoi mekhaniki i upravleniya v mashinostroenii: Sb. nauch. tr.* Saratov Saratov, Publishing house of Sarat. university, 2002, pp. 10–13 (in Russian).
36. **Molotkov A. V., Chelnokov Yu. N.** *Reshenie obratnoi zadachi kinematiki robota-manipuliatora "Puma" s ispol'zovaniem bikvaternionnoi teorii kinematicheskogo upravleniya* (Solution of inverse kinematics of the robot manipulator "Puma" with biquaternion kinematic theory of control), *Matematika. Mekhanika: Sb. nauch. tr.* Saratov, Publishing house of Sarat. university, 2002, no. 4, pp. 204–206 (in Russian).
37. **Chelnokov Yu. N.**, Biquaternion Solution of the Kinematic Control Problem for the Motion of a Rigid Body and Its Application to the Solution of Inverse Problems of Robot-Manipulator Kinematics, *Mechanics of Solids*, 2013, vol. 48, no. 1, pp. 31–46.
38. **Lomovtseva E. I., Chelnokov Yu. N.** *Bikvaternionnye metody resheniya priamo i obratnoi zadach kinematiki robotov-manipulatorov na primere stenfordskogo manipuliatora s ispol'zovaniem bikvaternionnoi teorii kinematicheskogo upravleniya* (Biquaternion methods for solving direct and inverse kinematic problems of robotic manipulators on the example of Stanford manipulator using biquaternion kinematic theory of control), *Materialy Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii s Mezhdunarodnym uchastiem "Problemy kriticheskikh situatsii v tochnoi mekhanike i upravlenii"*, Saratov, Izdatel'skii Tsentr "Nauka", 2013, pp. 270–274 (in Russian).
39. **Lomovtseva E. I., Chelnokov Yu. N.** *Dual'nye matrichnye i bikvaternionnye metody resheniya priamo i obratnoi zadach kinematiki robotov-manipulatorov na primere stenfordskogo manipuliatora. I* (Dual matrix and biquaternion methods of solving direct and inverse kinematics problems of manipulators, for example Stanford robot arm. I), *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaia seria. Ser. Matematika. Informatika*, 2013, vol. 13, no. 4, ch. 1, pp. 78–85 (in Russian).
40. **Lomovtseva E. I., Chelnokov Yu. N.** *Dual'nye matrichnye i bikvaternionnye metody resheniya priamo i obratnoi zadach kinematiki robotov-manipulatorov na primere stenfordskogo manipuliatora. II* (Dual matrix and biquaternion methods of solving direct and inverse kinematics problems of manipulators, for example Stanford robot arm. II), *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaia seria. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 88–95 (in Russian).
41. **Nelaeva E. I., Chelnokov Yu. N.** *Reshenie obratnoi zadachi kinematiki stenfordskogo manipuliatora s primeneniem bikvaternionnoi teorii kinematicheskogo upravleniya* (Solution of inverse kinematics Stanford manipulator using biquaternion kinematic theory of control), *Matematika. Mekhanika: Sb. nauch. tr.*, Saratov, Publishing house of Sarat. university, 2014, no. 16, pp. 111–114 (in Russian).
42. **Nelaeva E. I., Chelnokov Yu. N.** *Reshenie priamykh i obratnykh zadach kinematiki robotov-manipulatorov s ispol'zovaniem dual'nykh matris i bikvaternionov na primere stenfordskogo manipuliatora. Chast' 1* (Solution of direct and inverse tasks of robotics kinematics using dual matrices and biquaternions the example of Stanford manipulator. Part 1), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 6, pp. 373–380 (in Russian).
43. **Nelaeva E. I., Chelnokov Yu. N.** *Reshenie priamykh i obratnykh zadach kinematiki robotov-manipulatorov s ispol'zovaniem dual'nykh matris i bikvaternionov na primere stenfordskogo manipuliatora. Chast' 2* (Solution of direct and inverse tasks of robotics kinematics using dual matrices and biquaternions the example of Stanford manipulator. Part 2), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 7, pp. 456–463 (in Russian).
44. **Fu K., Gonsales R., Li K.** *Robototekhnika*, Moscow, Mir, 1989, 624 p. (in Russian).
45. **Ozgur E., Mezouar Y.** Kinematic modeling and control of a robot arm using unit dual quaternions, *Robotics and Autonomous Systems*, 77 (2016), 66–73.
46. **Whitney D. E.** Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Humen Prostheses, *IEEE. Man-Machine Systems, MMS-10*, 1969, no. 2, pp. 47–53.
47. **Whitney D. E.** State Space Models of Remote Manipulation Tasks, *Proc. Intl. Joint Conf. Artificial Intelligence*, Washington, D. C., 1969, pp. 495–598.
48. **Whitney D. E.** The Mathematics of Coordinated Control of Prosthetic Arms and Manipulators, *Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1972, 122, pp. 303–309.
49. **Paul R. P., Shimano B. E., Mayer G.** Kinematic Control Equations for Simple Manipulators, *IEEE. Trans. Systems.*, Moscow, Cybern., SMC-11, 1981, no. 6, pp. 449–455.
50. **Fabrizio Caccavale, Bruno Siciliano.** Quaternion-Based Kinematic Control of Redundant Spacecraft/Manipulator Systems, *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Seoul, Korea, May 21–26, 2001, pp. 435–440.
51. **X. Wang, D. Han, C. Yu, Z. Zheng.** The geometric structure of unit dual quaternion with application in kinematic control, *J. Math. Anal. Appl.*, 2012.
52. **Figueredo L. F. C., Adorno B. V., Ishihara J. Y., Borges G. A.** Robust kinematic control of manipulator robots using dual quaternion representation, Robotics and Automation (ICRA), *2013 IEEE International Conference*, 6–10 May 2013, pp. 1949–1955.
53. **Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li, Weimeng Sun.** Control of Oriented Mechanical systems: A Method Based on Dual Quaternion, *Proceedings of the 17th World Congress the International Federation of Automatic Control*, Seoul, Korea, July 6–11, 2008, pp. 3836–3841.