Acknowledgements: The work was supported by RFBR grants No. 16-08-00312 and No. 17-01-00251

For citation:

Semenov M. E., **Matveev M. G.**, **Lebedev G. N.**, **Solovyev A. M.** Stabilization of a Flexible Inverted Pendulum with the Hysteretic Properties, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 8, pp. 516—525.

DOI: 10.17587/mau.18.516-525

References

1. **Stephenson A.** On an induced stability, *Phil. Mag.*, 15, 233 (1908).

2. **Kapica P. L.** *Majatnik s vibrirujushhim podvesom* (Pendulum with vibrating suspension), *Uspehi Fizicheskih Nauk*, 1951, no. 44, pp. 7—20 (in Russian).

3. **Kapica P. L.** *Dinamicheskaja ustojchivost' majatnika pri kolebljushhejsja tochke podvesa* (Dynamic stability of a pendulum at an oscillating suspension point), *Zhurnal Jeksperimental'noj i Teoreticheskoj Fiziki*, 1951, no. 21, pp. 588—597 (in Russian).

4. **Chernous'ko F. L., Akulenko L. D., Sokolov B. N.** *Upravlenie kolebanijami* (Control of oscillations), Moscow, Nauka, 1980 (in Russian).

5. **Reshmin S. A., Chernous'ko F. L.** *Optimal'noe po bystrodejstviju upravlenie perevernutym majatnikom v forme sinteza* (The optimal control of the inverted pendulum in the form of synthesis), *Izvestija RAN, Teorija i sistemy upravlenija*, 2006, no. 3, pp. 51—62 (in Russian).

6. **Matveev M. G., Semenov M. E., Shevljakova D. V., Kanisheva O. I.** *Zony ustoychivosti i periodicheskiye resheniya perevernutogo mayatnika s gisterezisnym upravleniyem* (Zone of stability and periodic solutions of the inverted pendulum with hysteretic control), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye*, 2012, no. 11, pp. 8—14 (in Russian).

7. **Mikhail E. Semenov, Andrey M. Solovyov, Peter A. Meleshenko** Elastic inverted pendulum with backlash in suspension: stabilization problem, *Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 82. pp. 677—688.

8. **Semenov M. E., Meleshenko P. A., Solovyov A. M., Semenov A. M.** Hysteretic Nonlinearity in Inverted Pendulum Problem, Springer *Proceedings in Physics. Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis*, 2015, vol. 168. pp. 463—506.

9. **Chao Xu, Xin Yu.** Mathematical model of elastic inverted pendulum control system, *Journal of Control Theory and Applications*, 2004, no. 3, pp. 281—282.

10. **Elmer P. Dadios, Patrick S. Fernandez, David J. Williams.** Genetic Algorithm On Line Controller for the Flexible Inverted Pendulum Problem, *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 2006, vol. 10, no. 2.

11. **Tang Jiali, Ren Gexue.** Modeling and Simulation of a Flexible Inverted Pendulum System, *Tsinghua Science and Technology*, December 2009, vol. 14, no. S2.

12. **Zheng-Hua Luo, Bao-Zhu Guo.** Shear Force Feedback Control of a Single-Link Flexible Robot with a Revolute Joint, *IEEE Transaction On Automatic Control*, January 1997, vol. 42, no. 1.

13. **Mohsen Dadfarnia, Nader Jalili, Bin Xian, Darren M. Dawson.** A Lyapunov-Based Piezoelectric Controller for Flexible Cartesian Robot Manipulators, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, June 2004, vol. 126/347.

14. **Krasnosel'skij M. A., Pokrovskij A. V.** *Sistemy s gisterezisom* (Systems with hysteresis), Moscow, Nauka, 1983 (in Russian).

15. **Godunov S. K., Rjaben'kij V. S.** *Raznostnye shemy* (Difference schemes), Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).

16. **Attetkov A. V., Galkin S. V., Zarubin V. S.** *Metody optimizacii* (Optimization methods), Moscow, Publishing house of Bauman Moscow State Technical University, 2003 (in Russian).

УДК 004.94:519.711.3 DOI: 10.17587/mau.18.525-531

В. И. Потапов, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой,
Омский государственный технический университет

Постановка и решение игровой задачи противоборства аппаратно-избыточной динамической системы с атакующим противником, действующим в условиях неполной информации в процессе конфликта

Поставлена и решена численно-аналитическим методом игровая задача противоборства атакуемой аппаратно-избыточной динамической системы с атакующим противником, действующим в условиях неполной информации о поведении атакуемой системы в процессе конфликта.

Дифференциальная модель игры сводится к многошаговой матричной модели с заданными вероятностями состояний атакующего противника. Приведены численные алгоритмы для вычисления вектора резервирования атакуемой системы, максимизирующего вероятность ее безотказной работы к моменту окончания игры, и для решения рассматриваемой игровой задачи в виде, удобном для реализации на персональном компьютере.

Ключевые слова: *игровая задача, противоборство, конфликтная ситуация, математическая модель, динамическая система, аппаратная избыточность, вероятность безотказной работы, численные алгоритмы*

Введение

Исследованиям в области постановки и решения задач противоборства в конфликтных ситуациях динамических систем различной природы, в том числе проблемно ориентированным игровым задачам, посвящено большое число научных работ, наиболее близкими из которых по содержанию к проблемам, рассматриваемым в данной статье, являются работы [1—12]. В указанных выше работах прямо или косвенно полагалось, что противоборствующие стороны в процессе конфликта имеют полную информацию о поведении противника и о результатах своих действий, а также о состоянии игры на предыдущих шагах. Однако на практике дело обстоит далеко не так. В реальных конфликтных ситуациях, имеющих место в экономике, предпринимательстве, военном деле, в социальной сфере и в других областях, в силу объективных причин [1] участвующие в конфликтной ситуации противоборствующие стороны получают чаще всего лишь вероятностную информацию о результатах своих действий и действий противника, о правилах игры и стратегиях поведения игроков или их функций выигрыша. Иначе говоря, в реальных условиях чаще всего приходится сталкиваться с игровыми задачами, когда одна или обе противоборствующие стороны действуют в условиях неполной информации в течение конфликта. Существует большое число моделей таких игровых задач, среди которых, с точки зрения автора данной работы, наиболее важное практическое значение имеют модели, связанные с исследованием стратегий поведения и оптимизацией надежности функционирования в конфликтной ситуации защищающейся от атак противника стороны.

Постановке и решению одной из таких игровых задач с неполной информацией, связанных с выбором стратегии резервирования участвующей в конфликтной ситуации аппаратно-избыточной динамической системы, максимизирующей вероятность ее безотказной работы к моменту окончания противоборства (игры) с атакующим противником, посвящена данная статья.

Постановка задачи

Будем полагать, что участвующая в конфликтной ситуации атакуемая противником аппаратно-избыточная динамическая система $S_A(n, m, \mathbf{s})$, управляемая игроком A, состоит из n ($n = n_1 + n_2 + \ldots + n_q$) основных функциональных и m ($m = s_1 + s_2 + \ldots + s_q$) резервных блоков, разбитых на q соответствующих групп, в каждой из которых возможна замена любого отказавшего основного функционального блока резервным $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_q)$ — целочисленный вектор резервирования, элементы которого задают число резервных блоков в каждой из q групп. При этом будем считать, что резервные блоки могут перераспределятся по командам игрока A между группами функциональных блоков системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$ для замены отказавших основных функциональных блоков в соответствующей группе. В дальнейшем для упрощения модели будем пренебрегать временем настройки и перераспределения резервных блоков вместо отказавших основных в процессе конфликта, а также конечной надежностью системы контроля работы основных блоков, настройки и перераспределения резервных блоков.

При необходимости рассматриваемую модель аппаратно-избыточной динамической системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$ можно усложнить, введя дополнительные ограничения, рассмотренные в работе [13], что, естественно, приведет к усложнению всех вычислительных процедур при решении рассматриваемой задачи.

В дальнейшем будем полагать, что каждой из q групп основных блоков $n_1, n_2, \ldots, n_q$ системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$ соответствуют интенсивности отказов $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, ..., $\lambda_q(t)$, а не включенным в работу группам резервных блоков $s_1, s_2, \ldots, s_q$ соответствует интенсивность отказов $\lambda_0(t)$, причем $\lambda_0(t) \leqslant \min\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_q(t)\}$. После подключения резервного блока вместо отказавшего основного в i-й группе он начинает работать в том же режиме, что и основные блоки, т.е. с интенсивностью отказов $\lambda_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant q$. В процессе конфликта противник за счет своих средств нападения стремится увеличить интенсивность отказов компонентов системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$, поэтому функции $\lambda_i(t)$ являются возрастающими.

Пусть атакуемая сторона A располагает вышеописанной системой $S_A(n, m, \mathbf{s})$. На интервале времени $[0, t_f]$, где t_f — время окончания игры, введем вектор $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_L)$, $\tau_0 = 0$, $\tau_L < t_f$, элементы которого соответствуют моментам перераспределения резервных элементов аппаратно-избыточной системы между группами. В дальнейшем вектор $\boldsymbol{\tau}$ будем называть вектором настройки системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$. Каждому моменту времени τ_k ($0 \leqslant k \leqslant L$) поставим в соответствие вектор распределения резервных блоков $\boldsymbol{s}(\tau_k) = \{s_1(\tau_k), s_2(\tau_k), \ldots, s_q(\tau_k)\}$. Таким образом, игрок A располагает множеством стратегий $W^A = \{\boldsymbol{\tau}, s(\boldsymbol{\tau})\}$, удовлетворяющих ограничениям:

$$\min_{0 \leqslant k \leqslant L-1} (\tau_{k+1} - \tau_k) \geqslant \alpha; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{q} s_i(\tau_k) = m - \varphi(\tau_k); \tag{2}$$

$$\varphi(\tau_k) = \sum_{l=0}^{m} l p_l(\tau_k), \tag{3}$$

где $\varphi(\tau_k)$ — математическое ожидание числа отказавших к моменту времени τ_k элементов системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$; $p_l(\tau_k)$ — вероятности нахождения рассматриваемой системы в состояниях с l отказами.

Физический смысл ограничения (1) заключается в том, что стороне A запрещается делать две последовательные настройки слишком быстро, т.е. α — минимальное время между двумя соседними настройками. Смысл ограничения (2) состоит в том, что к моменту настройки τ_k вследствие замены отказавших основных функциональных блоков системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$ резервными число последних уменьшится на величину $\varphi(\tau_k)$.

Пусть сторона B, нападающая в процессе конфликта на систему $S_A(n, m, \mathbf{s})$, может находиться в одном из состояний $B_1, B_2, \ldots, B_N$, характеризующихся соответствующим результатом атаки на эту систему в виде вектора интенсивностей отказов системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$ $\boldsymbol{\lambda}(t) = \{\boldsymbol{\lambda}^i(t)\}$, каждый элемент которого представляет совокупность интенсивностей отказов в q группах основных функциональных блоков и не включенных в работу резервных блоков $\boldsymbol{\lambda}^i(t) = \{\lambda_0^i(t), \lambda_1^i(t), ..., \lambda_q^i(t)\}$, $i = 1, 2, ..., N$. Ели для каждого состояния нападающей стороны B_i заданы вероятности ее нахождения в этих состояниях $\mathbf{Q}(t) = \{Q_i(t)\}$, то множество стратегий игрока со стороны B можно определить как $W^B = \{\mathbf{Q}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)\}$. Таким образом, действия игрока B заключаются в случайном выборе одного из N состояний, которым соответствуют интенсивности нестанционарных пуассоновских потоков отказов основных и резервных блоков системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$.

На стратегии игрока B наложены следующие ограничения:

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i(t) = 1;$$

$$\sum_{i=0}^{q} \int_0^{\infty} \lambda_i^i(t)dt \leqslant \Lambda^i, \; j = 1, 2, ..., N,$$

смысл первого из которых очевиден, а физический смысл второго заключается в том, что для каждого состояния нападающей стороны B ограничено суммарное нападение на основные и резервные элементы системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$.

В качестве функции платы в рассматриваемой игре будем использовать вероятность безотказной работы системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$ к моменту окончания игры $P(t_f)$. Тогда решением игры будут вектор моментов настроек τ системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$ и множество векторов резервирования $\{\boldsymbol{s}(\tau_k)\}$, $0 \leqslant k \leqslant L$, соответствующих моментам настроек τ_k, максимизирующие вероятность безотказной работы $P(t_f)$ атакуемой системы.

Следовательно, перед атакуемой стороной (игрок A) в процессе противоборства с атакующей стороной (игрок B) для защиты от атак противника, целью которых является увеличение интенсивности отказов компонентов системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$ вплоть до полного отказа атакуемой системы в течение конфликта (игры), стоит задача так осуществлять перераспределение резервных блоков между отказавшими основными в моменты настройки τ_k, чтобы к концу игры вероятность безотказной работы атакуемой системы была максимальной, т. е.

$$P(t_f) = \max P(t_f, \mathbf{s}(\tau_k)).$$

Для решения этой задачи воспользуемся методом, изложенным в работе [10].

Решение задачи оптимизации вероятности безотказной работы $S_A(n, m, \mathbf{s})$-системы

Будем считать, что поведение атакуемой системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$ в процессе конфликта аппроксимируется марковским процессом, а число работоспособных состояний E_k $(0 \leqslant k \leqslant m)$ равно числу отказавших основных функциональных блоков, не превышающих число резервных. Очевидно, что состояние E_{k+1} является состоянием полного отказа работоспособности системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$, т. е. поглощающим состоянием. Обозначим A_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ — интенсивность переходов системы из состояния E_{k-1} в состояние E_k; B_k $(1 \leqslant k \leqslant m + 1)$ — интенсивность переходов системы из состояния E_{k-1} в состояние полного отказа. Тогда система дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающих поведение системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$ в процессе конфликта, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &p_0'(t) = D_1 p_0(t); \\ &p_k'(t) = A_k p_{k-1}(t) - D_{k+1} p_k(t), \\ &k = 1, 2, ..., m; \\ &p_{m+1}'(t) = \sum_{k=1}^{m+1} B_k \lambda(t) p_{k-1}(t), \end{aligned} \tag{4}$$

с начальными условиями

$$p_0(0) = 1, \; p_i(0) = 0, \; 1 \leqslant i \leqslant m.$$

При этом $D_k = A_k + B_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $D_{m+1} = B_{m+1}$.

Коэффициенты системы уравнений (4) вычисляются в соответствии с выражениями

$$A_k = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i(k)\lambda_i(t), \; k = 1, 2, ..., m;$$

$$D_k = \sum_{i=0}^{q} \beta_i(k)\lambda_i(t), \; k = 1, 2, ..., m + 1,$$

где при $0 \leqslant k \leqslant m$ имеет место

$$\alpha_i(k) = \begin{cases} m - k + 1)R_k, \text{ если } i = 0, \\ \delta_i n_i R_k, \text{ если } 1 \leqslant i \leqslant q; \end{cases}$$

$$\beta_i(k) = \begin{cases} m - k + 1)R_k, \text{ если } i = 0, \\ \delta_i n_i R_k + n_i \Theta_i(k), \text{ если } 1 \leqslant i \leqslant q; \end{cases}$$

$$\beta_i(m + 1) = \delta_i \, n_i, \; 1 \leqslant i \leqslant q.$$

Коэффициенты δ_i и $\Theta_i(k)$, являющиеся элементами векторов $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_q)$ и $\boldsymbol{\Theta}(k) = (\Theta_1(k), \Theta_2(k), ..., \Theta_q(k))$, определяются следующим образом:

$$\delta_i = \begin{cases} 0, \text{ если } s_i = 0, \\ 1, \text{ если } s_i \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\Theta_i(k) = \begin{cases} 0, \text{ если } k \leqslant s_i, \\ 1, \text{ если } k \geqslant s_i + 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $\Theta_i(1) = 1 - \delta_i$.

Переменная R_k определяет число возможных попаданий системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$ в состояние E_k и вычисляется [14] по формуле

$$R_k = \sum_{\mathbf{v} \in \Omega(k, \mathbf{s})} \prod_{i=1}^{q} \binom{n_i + s_i}{v_i}, \qquad (5)$$

где

$$\Omega(k, \mathbf{s}) = \{\mathbf{v} | v_1 + v_2 + ... + v_q = k; \forall_i\ 0 \leqslant v_i \leqslant s_i\},$$

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, ... v_q)$ — целочисленный вектор, представляющий сумму целочисленных векторов ($\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$), $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_q)$ и $\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_q)$.

Выражение (5) получено в предположении, что k отказов в системе распределились следующим образом: в i-й группе основных блоков x_i отказов, в i-й группе резервных блоков z_i отказов ($1 \leqslant i \leqslant q$). Если $x_i = 0$ или $z_i = 0$, то в соответствующей группе отказов не было.

Рассматриваемая задача заключается в следующем. Для заданного времени $t_f > 0$ найти вектор $\mathbf{s}$, максимизирующий вероятность безотказной работы $P(t_f, \mathbf{s})$ технической системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$, описываемой уравнениями (4), при заданных ограничениях на параметры системы.

Получить точное решение данной задачи не представляется возможным, так как входящие в систему (4) дифференциальные уравнения имеют переменные коэффициенты. Поэтому воспользуемся методом дискретизации для получения приближенного решения.

Для этого вычислим минимальное натуральное число r, удовлетворяющее условиям:

$$r \geqslant 2,$$

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant q}\ \max_{1 \leqslant v \leqslant r}\ \max_{t \in \Delta_v} |\lambda_i(t) - \lambda_{iv}| \leqslant \varepsilon,$$

где

$$\Delta_v = [t_{v-1}, t_v],\ t_v = v\Delta t,\ \Delta t = t_f/r,$$

$$\lambda_{iv} = \frac{1}{2}[\lambda_i(t_{v-1}) + \lambda_i(t_v)],$$

ε — заданное положительное число, представляющее собой наибольшее допустимое отклонение функций $\lambda_i(t)$ от констант λ_{iv} на интервалах дискретизации Δ_v для всех $1 \leqslant v \leqslant r$.

Очевидно, что $t_0 = 0$, $t_r = t_f$.

Тогда система уравнений (4) распадается на r систем с постоянными коэффициентами для $t \in \Delta_v$:

$$\begin{aligned} &p'_{0v}(t) = -D_{1v}p_{0v}(t); \\ &p'_{k,v}(t) = A_{kv}p_{k-1,v}(t) - D_{k+1,v}p_{kv}(t); \\ &k = 1, 2, ..., m, \end{aligned} \qquad (6)$$

с начальными условиями

$$p_{kv}(t_{v-1}) = \begin{cases} p_k(0) \text{ для } v = 1, \\ p_{k,v-1}(t_{v-1}) \text{ для } 2 \leqslant v \leqslant r. \end{cases}$$

Коэффициенты системы дифференциальных уравнений (6) имеют следующий вид:

$$A_{kv} = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i(k)\lambda_{iv};\ D_{kv} = \sum_{i=0}^{q} \beta_i(k)\lambda_{iv}.$$

Решение системы уравнений (6) для $t \in \Delta_v$ может быть записано в следующей форме:

$$p_{0v}(t) = p_{0,v-1}(t_{v-1})\exp(-D_{1v}t);$$

$$p_{kv}(t) = \sum_{j=0}^{k} p_{j,v-1}(t_{v-1}) \times$$

$$\times \prod_{i=j+1}^{k} A_{iv} \sum_{l=j+1}^{k+1} \exp(-D_{lv}t) / \prod_{\substack{i=j+1 \\ i \neq l}}^{k+1} (D_{iv} - D_{lv}), \qquad (7)$$

$$k = 1, 2, ..., m.$$

Обозначим $S(m)$ — множество $S(m) = \{\mathbf{s} | s_1 + s_2 + ... + s_q = m, \forall_i\ s_i \geqslant 0\}$.

Теперь задачу вычисления вектора $\mathbf{s} = (s_1, s_2, ..., s_q)$, максимизирующего вероятность $P(t_f, \mathbf{s})$ безотказной работы системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$, можно решить, используя следующий алгоритм.

АЛГОРИТМ 1

Начало.

1. Задать натуральные числа m, q, массив $\{n_1, n_2, ..., n_q\}$, функции $\lambda_i(t)$, $0 \leqslant i \leqslant q$, массив $\{1, 0, 0, ..., 0\}$ начальных значений, число $t_f > 0$, число $\varepsilon > 0$.
2. Положить $r = 2$.
3. Вычислить число $\Delta t = t_f/r$ и массив $\{t_0, t_1, ..., t_r\}$.
4. Положить $i = 0$.
5. Положить $v = 1$.
6. Вычислить $\lambda_{iv} = \frac{1}{2}[\lambda_i(t_{v-1}) + \lambda_i(t_v)]$.
7. Вычислить число

$$\varphi^r_{iv} = \max_{t \in \Delta} |\lambda_i(t) - \lambda_{iv}| = \frac{1}{2}[\lambda_i(t_v) - \lambda_i(t_{v-1})].$$

8. Положить $v = v + 1$.
9. Если $v \leqslant r$, идти к п. 6.
10. Вычислить число

$$\varphi^r_i = \max_{1 \leqslant v \leqslant r} \{\varphi^r_{iv}\}.$$

11. Положить $i = i + 1$.
12. Если $i \leqslant m$, идти к п. 5.
13. Вычислить число

$$\varphi^r_i = \max_{0 \leqslant i \leqslant m} \{\varphi^r_{iv}\}.$$

14. Если $\varphi^r \leqslant \varepsilon$, идти к п. 17.
15. Положить $r = r + 1$.
16. Идти к п. 3.
17. Задать целочисленный вектор $\mathbf{s} \in S(m)$.
18. Положить $v = 1$.
19. Вычислить $p_{kv}(t_v)$, $0 \leqslant k \leqslant m$, по формулам (7).
20. Положить $v = v + 1$.
21. Если $v \leqslant r$, идти к п. 19.
22. Вычислить

$$P(t_f, \mathbf{s}) = \sum_{k=0}^{m} p_{kr}(t_f).$$

23. Выполнить процедуру пп. 17—22 для всех $\mathbf{s} \in S(m)$.
24. Вычислить вектор $\mathbf{s}(\tau_k)$, для которого

$$P(t_f, \mathbf{s}(\tau_k)) = \max_{\mathbf{s} \in S(m)} P(t_f, \mathbf{s}).$$

25. Конец ($\mathbf{s}(\tau_k)$ — искомый вектор резервирования).

Решение игровой задачи противоборства

Рассмотрим игру G_1 при $Q_i(t) = \text{const}$ с функцией выигрыша $P(t_f)$, где t_f — время окончания игры. Сторона A располагает системой $S_A(n, m, \mathbf{s})$ и множеством стратегий W^A, сторона B (противник) может находиться в N состояниях и располагает множеством стратегий W^B. Пусть на интервале $[0, t_f]$ заданы моменты времени $\{t_0, t_1, t_2, ..., t_z\}$, $t_0 = 0$, $t_z < t_f$. Каждому фиксированному моменту времени t_i поставим в соответствие вектор вероятностей нахождения атакующего противника в том или ином состоянии $\mathbf{Q}(t_i)$ и будем полагать, что вероятности состояния противника не изменяются в интервале $[t_i, t_{i+1}]$, $t_{z+1} = t_f$. Пусть для каждого интервала $T_{i+1} = [t_i, t_{i+1}]$ задано число $L_{T_{i+1}}$ настроек системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$. Тогда рассматриваемую игру можно представить как совокупность Z игр, каждая из которых имеет функцию выигрыша $P(t_{i+1})$. Последовательные решения Z игр при соответствующих начальных условиях дают решение игры G_1.

Рассмотрим решение одной из Z игр на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ и определим начальные условия для следующей игры.

Пусть в рассматриваемом интервале времени вероятности нахождения противника в состояниях $B_1, B_2, ..., B_N$, характеризующихся векторами интенсивностей отказов основных и резервных блоков системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$ $\lambda^i(t) = \{\lambda_0^i(t), \lambda_1^i(t), ..., \lambda_q^i(t)\}$, $i = 1, 2, ..., N$, равны $Q_1, Q_2, ..., Q_N$. Введем множество $\chi = \{t_{i+1} - \alpha, t_{i+1} - 2\alpha, ..., t_{i+1} - (\omega - 1)\alpha\}$, где α — минимальное время между двумя соседними настройками атакуемой системы, а ω — целая часть (t_{i+1}/α). Очевидно, что $\tau_0 = t_i$. Последовательность моментов настроек $\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_L\}$ на точках множества χ можно распределить $C_{\omega-1}^{L}$ способами. Поскольку для каждого момента τ_k общее число настроек определяется как число целых неотрицательных корней уравнения (2), число стратегий игрока A можно вычислить по формуле

$$M = \binom{q + m - \varphi(t_i) - 1}{m - \varphi(t_i)} + \binom{\omega - 1}{L_{T_{i+1}}} \prod_{i=1}^{L_{T_{i+1}}} \binom{q + m - \varphi(\tau_k) - 1}{m - \varphi(\tau_k)},$$

где $\varphi(t)$ определяется выражением (3) и имеет тот же смысл. Очевидно, что число стратегий игрока B равно числу состояний противника N.

Сформируем "платежную" матрицу $A = \|\alpha_{ij}\|$ размерности $M \times N$, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца запишем функцию платы $P(t_{i+1})$, вычисленную в предположении j-го состояния противника с соответствующими ему интенсивностями отказов компонентов атакуемой системы на всем временном интервале $T_{i+1} = [t_i, t_{i+1}]$. Функция платы определяется по алгоритму 1 путем последовательного интегрирования системы дифференциальных уравнений (4), описывающей вероятности нахождения системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$ в состояниях с $l(0 \leqslant l \leqslant m)$ отказами, на интервалах времени, определяемых разбиением интервала $T_{i+1} = [t_i, t_{i+1}]$ моментами настроек τ_k. При этом начальные условия на интервале $T_1 = [t_0, t_1]$ в момент времени $\tau_k = 0$ имеют вид $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = p_2(0) = ... = p_m(0) = 0$, а в каждый последующий момент времени τ_k определяются как вероятности нахождения системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$ в состояниях с $l(0 \leqslant l \leqslant m)$ отказами к этому моменту.

К начальному моменту времени t_i следующей игры начальные условия определяются через вероятности нахождения атакуемой системы в состояниях с $l(0 \leqslant l \leqslant m)$ отказами к этому моменту, вычисленные в предположении j-го состояния противника, по формуле

$$p_l(t_i) = \sum_{j=1}^{N} p_l^j(t_i) Q_j.$$

Стратегия игрока A в каждой из Z игр определяется как строка платежной матрицы, для которой математическое ожидание выигрыша с учетом вероятностей всех возможных состояний противника обращается в максимум:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{N} Q_j \alpha_{ij} \to \max.$$

Очевидно, что такая стратегия является оптимальной (близкой к оптимальной) не в каждом отдельном случае, а в среднем. Решение рассматриваемой игры следует искать в чистых стратегиях, поскольку для любой смешанной стратегии среднее взвешенное выигрышей, соответствующих чистым стратегиям, не может превышать максимального из них. Решение рассматриваемой игровой задачи возможно с помощью следующего алгоритма.

АЛГОРИТМ 2

Начало.

1. Задать N, t_j, α, Z.

2. Для $z = 0, 1, ..., Z$ задать $\{t_z\}$, $\{L_{T_{z+1}}\}$, $\mathbf{Q}(T_{z+1})$, $\boldsymbol{\lambda}(T_{z+1})$.

3. Положить $z = 0$.

4. Вычислить $\omega = [t_{z+1}/\alpha]$, где $[x]$ — целая часть x.

5. Сформировать множество

$$\chi = \{t_{z+1} - \alpha,\ t_{z+1} - 2\alpha,\ ...,\ t_{z+1} - (\omega - 1)\alpha,\ t_z\}.$$

6. Задать все возможные векторы моментов настроек системы $S_A(n, m, \mathbf{s})$ $\boldsymbol{\tau}_{z+1} = \{\tau_0, \tau_1, ..., \tau_{L_{T_{z+1}}}\}$, где $\tau_k \in \chi$, $0 \leqslant k \leqslant L_{T_{z+1}}$, $\tau_0 = t_z$, и соответствующие этим моментам векторы резервирования $\mathbf{s}_{z+1}(\tau_k)$, определяемые как целые неотрицательные решения уравнения (2).

7. Сформировать платежную матрицу $A^z = \|\alpha_{ij}\|_{M\times N}$, где $\alpha_{ij} = P(t_{z+1}, \{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{s}_i\}, \boldsymbol{\lambda}_j)$ — платеж, вычисленный по алгоритму 1.

8. Определить i, для которого

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{N} Q_j\alpha_{ij} \to \max.$$

9. Положить $\boldsymbol{\tau}(z + 1) = \boldsymbol{\tau}^i_{z+1}$, $\mathbf{s}(z + 1) = \mathbf{s}^i$.

10. Положить $z = z + 1$.

11. Вычислить начальные условия для интегрирования системы дифференциальных уравнений [4] на интервале $[t_z, t_{z+1}]$ по формуле

$$p_i(\tau_z) = \sum_{j=1}^{N} p^j_i(\tau_z)Q_j(T_z),\ i = 0, 1, ..., m.$$

12. Выполнить процедуру 4—11 для всех $z(0 \leqslant z \leqslant Z)$, полагая $(Z + 1) = t_f$.

13. Конец. Векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{s}$ — искомые стратегии игрока A.

Заключение

Решение рассмотренной выше игровой задачи получено в предположении известных вероятностей состояний атакующего противника, т. е. задача о выборе решения в условиях неопределенности ввиду неполной информации сводится к задаче о выборе решения в условиях определенности таким образом, чтобы полученное решение было оптимальным не в каждом отдельном случае, а в среднем.

Если вероятности состояний атакующего противника не могут быть оценены или вычислены, то решение в условиях неопределенности можно принимать на основе критерия пессимизма [15].

Список литературы

1. **Крапивин В. Ф.** Теоретико-игровые методы синтеза сложных систем в конфликтных ситуациях. М.: Сов. радио, 1972. 192 с.

2. **Гермейер Ю. Б.** Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 383 с.

3. **Лефевр В. А.** Конфликтующие структуры. М.: Сов. радио, 1973. 159 с.

4. **Оуэн Н. Г.** Теория игр и игровое моделирование. Исследование операций. Методологические основы и математические методы. М.: Мир, 1981. Т. 1. С. 513—549.

5. **Петросян Л. А., Томский Г. В.** Динамические игры и их приложения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. 252 с.

6. **Nartov B. K.** Conflict of Moving Systems. France: AMSE Press, 1994. 87 p.

7. **Potapov V. I.** Model and Numerical Solving Algorithm of Counteraction Problem for Two Restored after Failure Redundant Engineering Systems // Journal of Automation and Information Sciences. 2015. Vol. 47. P. 41—51.

8. **Потапов В. И., Потапов И. В.** Противоборство (дифференциальная игра) двух нейрокомпьютерных систем // Информационные технологии. 2005. № 8. С. 53—57.

9. **Потапов В. И.** Математическая модель и алгоритм оптимального управления подвижным объектом в конфликтной ситуации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7 (160). С. 16—22.

10. **Потапов В. И.** Противоборство технических систем в конфликтных ситуациях: модели и алгоритмы. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2015. 168 с.

11. **Потапов В. И.** Задачи и численные алгоритмы оптимизации надежности аппаратно-избыточной технической системы в конфликтной ситуации при различных стратегиях защиты от атак противника // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. С. 617—624.

12. **Потапов В. И., Горн О. А.** Математическая модель, метод решения и программное обеспечение для поиска и исследования оптимальных стратегий поведения в конфликтных ситуациях двух динамических систем // Омский научный вестник. Сер. "Приборы, машины и технологии". 2016. № 5 (149). С. 142—147.

13. **Потапов В. И.** Новая математическая модель аппаратно-избыточной технической системы, участвующей в конфликтной ситуации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17. С. 363—367.

14. **Потапов В. И., Братцев С. Г.** Новые задачи оптимизации резервированных систем. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1986. 112 с.

15. **Вентцель Е. С.** Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972. 552 с.

Setting and Solving of the Game Problem of Confrontation of the Hardware-Redundant Dynamic System with an Attacking Enemy Operating in the Conflict Process in Conditions of Incomplete Information

V. I. Potapov, ivt@omgtu, Omsk State Technical University, Omsk, 644050, Russia Federation

Corresponding author: **Potapov Victor I.,** D. Sc., Professor, Head of Department of Informatics and Computer Engineering, Omsk State Technical University, Omsk, 644050, Russia Federation, e-mail: ivt@omgtu.ru

Received on February 17, 2017

Accepted on March 10, 2017

The game task of confrontation of the attacked hardware-redundant dynamic system with an attacking enemy operating in conditions of incomplete information about the behavior of the attacked enemy in a conflict was posed and solved numerically and analytically. The attacking party aspires to increase the intensity of failures of the components of the attacked system due to its attack resources, up to its total failure. The attacked party, due to the corresponding strategy of redistribution of the reserve units of the hardware-redundant dynamic system between the failed main units at the appropriate instants of time, strives to maximize the probability of a failure-free operation of the attacked system by the end of the confrontation (game) with the attacking enemy. Behavior of the system under attack in the process of a conflict is approximated by the Markov process, while the number of the operable states is equal to the number of the failed functional units, not exceeding the number of the standby units. As a function of the board in the considered game the probability of a failure-free operation of the attacked system is used by the time the game ends. The solution to the game is the vector of the system setup moments after the corresponding failures of the functional units and a set of the reservation vectors corresponding to the instantaneous settings of the attacked system, which maximize the probability of a system failure during a conflict. The differential game model is reduced to a multi-step matrix model with the given probabilities of the states of the attacking enemy. Numerical algorithms for calculation of the reservation vector for the attacked system are presented, which maximize the probability of its trouble-free operation by the end of the game and for solving of the game problem in a form convenient for its implementation on a personal computer.

Keywords: *game task, confrontation, conflict situation, mathematical model, dynamic system, hardware redundancy, probability of failure-free operation, numerical algorithms*

For citation:

Potapov V. I. Setting and Solving of the Game Problem of Confrontation of the Hardware-Redundant Dynamic System with an Attacking Enemy Operating in the Conflict Process in Conditions of Incomplete Information, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2017, vol. 18, no. 8, pp. 525—531.

DOI: 10.17587/mau.18.525-531

References

1. **Krapivin V. F.** *Teoretiko-igrovye metody sinteza slozhnykh sistem v konfliktnykh situatsiyakh* (Game-theoretic methods of synthesis of complex systems in conflict situations), Moscow, Sov. Radio, 1972, 192 p. (in Russian).
2. **Germeyer Yu. B.** *Vvedenie v teoriyu issledovaniya operatsij* (Introduction to the theory of operations research), Moscow, Nauka, 1971, 383 p. (in Russian).
3. **Lefevre V. A.** *Konfliktuyushhie struktury* (Conflicting structures), Moscow, Sov. Radio, 1973, 159 p. (in Russian).
4. **Owen N. G.** *Teoriya igr i igrovoe modelirovanie. Issledovanie operatsij. Metodologicheskie osnovy i matematicheskie metody* **(**Theory of games and game simulation. Operations research. Methodological bases and mathematical methods), Moscow, Mir, 1981, no. 1, pp. 513—549 (in Russian).
5. **Petrosyan L. A., Tomsky G. V.** *Dinamicheskie igry i ikh prilozheniya* **(**Dynamic games and their applications), Leningrad, Publishing house of Leningrad. Univ., 1982, 252 p. (in Russian)
6. **Nartov B. K.** Conflict of Moving Systems, AMSE Press, France, 1994, 87 p.
7. **Potapov V. I.** Model and Numerical Solving Algorithm of Counteraction Problem for Two Restored Failure Redundant Engineering Systems, *Journal of Automation and Information Sciences*, 1915, vol. 47, pp. 41—51.
8. **Potapov V. I., Potapov I. V.** *Protivoborstvo (differentsial'naya igra) dvukh nejrokomp'yuternykh sistem* (Antagonism (differential game) of two neurocomputer systems), *Information Technologies*, 2005, no. 8, pp. 53—57 (in Russian)
9. **Potapov V. I.** *Matematicheskaya model' i algoritm optimal'nogo upravleniya podvizhnym ob"ektom v konfliktnoj situatsii* (Mathematical model and algorithm for optimal control of a mobile object in a conflict situation), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 7 (160), pp. 16—22 (in Russian).
10. **Potapov V. I.** *Protivoborstvo tekhnicheskikh sistem v konfliktnykh situatsiyakh: modeli i algoritmy* (Confrontation of technical systems in conflict situations: models and algorithms), Omsk, Publishing house of OmGTU, 2015, p. 168 (in Russian).
11. **Potapov V. I.** *Zadachi i chislennye algoritmy optimizatsii nadezhnosti apparatno-izbytochnoj tekhnicheskoj sistemy v konfliktnoj situatsii pri razlichnykh strategiyakh zashhity ot atak protivnika* (Tasks and numerical algorithms for optimizing the reliability of the hardware-redundant technical system in a conflict situation under various defense strategies against enemy attacks), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, pp. 617—624 (in Russian).
12. **Potapov V. I., Gorn O. A.** *Matematicheskaya model', metod resheniya i programmnoe obespechenie dlya poiska i issledovaniya optimal'nykh strategij povedeniya v konfliktnykh situatsiyakh dvukh dinamicheskikh sistem* (Mathematical model, solution method and software for searching and researching optimal strategies of behavior in conflict situations of two dynamic systems), *Omsk Scientific Herald. Ser. "Devices, machines and technologies*", 2016, no. 5 (149), pp. 142—147 (in Russian).
13. **Potapov V. I.** *Novaya matematicheskaya model' apparatno-izbytochnoj tekhnicheskoj sistemy, uchastvuyushhej v konfliktnoj situatsii* (A new mathematical model of the hardware-redundant technical system involved in the conflict situation), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, no. 17, pp. 363—367 (in Russian).
14. **Potapov V. I., Brattsev S. G.** *Novye zadachi optimizatsii rezervirovannykh sistem* (New optimization tasks for redundant systems), Irkutsk, Publishing house of Irkut. University, 1986, 112 p. (in Russian).
15. **Ventzel Ye. S.** *Issledovanie operatsij* (Operations research), Moscow, Sov. Radio, 1972, 552 p. (in Russian).