

М. Е. Семёнов¹, д-р физ.-мат. наук, проф., mkl150@mail.ru,
М. Г. Матвеев¹, д-р техн. наук, проф., зав. каф., mgmatveev@yandex.ru,
Г. Н. Лебедев², д-р техн. наук, проф., **А. М. Соловьёв**¹, аспирант, darkzite@yandex.ru,
¹ Воронежский государственный университет,
² Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Стабилизация обратного гибкого маятника с гистерезисными свойствами*

Изучается динамика системы, состоящей из гибкого обратного маятника, имеющего люфт в основании его крепления. Разработан алгоритм стабилизации маятника в окрестности вертикального положения, основанный на принципе обратной связи. Также в работе решается задача оптимизации по параметрам управляющего воздействия.

Ключевые слова: обратный гибкий маятник, гистерезис, градиентный метод, оптимизация, разностная схема

Введение

Стабилизация обратного, или перевернутого, маятника является классической проблемой теории управления и широко используется в качестве эталона для тестирования различных алгоритмов управления неустойчивыми объектами (ПИД регуляторов, нейронных сетей, нечеткого управления и т. д.).

Аналоги подобных механических систем можно встретить в совершенно различных технических (и не только технических) приложениях — от медицины и биологии до роботостроения, ракетных и космических технологий. Так, решение задачи стабилизации обратного маятника используется при расчете динамических характеристик ракет, так как двигатель ракеты расположен ниже центра тяжести, вызывая аэродинамическую неустойчивость. Эта же проблема решена в сегвее — самобалансирующемся транспортном устройстве.

Первое теоретическое исследование обратного маятника было проведено Стефенсоном в работе [1], а первые эксперименты по стабилизации обратного маятника с помощью колебаний подвеса были рассмотрены П. Л. Капицей и описаны в работе [2]. В дальнейшем в его работе [3] была показана возможность стабилизации перевернутого маятника горизонтальными движениями нижней точки крепления, с помощью которых также удалось добиться устойчивости верхнего положения. Исследование стабилизации схожих механических систем были активно продолжены в ряде работ Ф. Л. Черноусько [4, 5]. В указанных выше работах рассматривался обычный жесткий маятник, подвес которого совершает принудительные колебания в вертикальном или горизонтальном направлении. Особо отметим, что эта сравнительно простая механическая система демонстрирует в зависимости от частоты и амплитуды вынужденных колебаний точки подвеса большое число разнообразных видов движения.

Некоторые движения представляются весьма необычными и противоречат нашей интуиции.

Задача стабилизации обратного маятника имеет большую историю и кажется достаточно изученной, однако большая часть этих исследований рассматривает упрощенную модель, не в полной мере соответствующую реальной механической системе подобного вида. Так, учитывая наличие обыкновенного люфта в точке крепления (например, возникшего вследствие износа деталей или же введенного намеренно, как в рулевом управлении автомобиля), а также рассматривая случай гибкого стержня, можно добиться большего соответствия модели реальным механическим системам, однако в этом случае задача стабилизации существенно усложняется.

Люфт в опоре маятника — это один из видов гистерезисных зависимостей. Задачи, в которых гистерезисные явления играют существенную роль, встречаются в физике, химии, биологии, экономике и смежных дисциплинах. Учет и корректное математическое моделирование этих зависимостей совершенно необходимы для адекватного описания процессов в указанных областях. Модели гистерезисных явлений к настоящему времени достаточно хорошо изучены, однако системы, в которых гистерезисные свойства проявляются на уровне отдельных их составляющих, исследованы в меньшей степени, вследствие чего наличие люфта в опоре маятника порождает новую интересную механическую систему. Стабилизации и оптимальному управлению жестким обратным маятником посвящена работа [6], также важные результаты в этой области получены в работах [7, 8], модели близких механических систем рассматривались в работе [9]. Исследованию динамики обратного гибкого маятника посвящены работы [10–13].

В данной статье рассматривается задача стабилизации в вертикальном положении обратного маятника, представляющего собой гибкий стержень, одним концом шарнирно закрепленный на цилиндре, движение которого вызывается горизонтальным перемещением поршня.

* Работа поддержана грантами РФФИ № 16-08-00312, № 17-01-00251.

Постановка задачи

Рассмотрим модель динамики обратного маятника в предположении малых отклонений от вертикального неустойчивого равновесия. Изучаемая система представляет собой гибкий стержень, одним концом шарнирно закрепленный на цилиндре, движение которого вызывается горизонтальным перемещением поршня (рис. 1).

Здесь (x, y) — система отсчета гибкого стержня массой m , длиной l и линейной плотностью ρ (определяемой отношением массы тела к его линейному параметру), где ось Ox совпадает с касательной к профилю стержня в точке его крепления; θ — угол наклона системы координат стержня; $(X, \bar{x})$ — инерциальная система координат рассматриваемой механической системы, M — масса цилиндра с раствором L , F — сила, приложенная к поршню массой m_p , трактуемая как управление.

Целью данной работы является изучение возможной стабилизации обратного гибкого маятника в окрестности вертикального положения при условии наличия люфта в опоре стержня, а также ис-

следование различных аспектов динамической системы, описывающей его поведение.

Модель управляющего воздействия

Одной из особенностей рассматриваемой в данной работе механической системы является наличие люфта в опоре стержня, а так как люфт является одним из видов гистерезисных зависимостей, то, следуя классическим схемам М. А. Красносельского и А. В. Покровского [14], будем трактовать его как преобразователь, определенный на пространстве непрерывных функций, динамика которого описывается соотношениями: вход — состояние и состояние — выход.

Выход преобразователя-люфта на монотонных входах описывается соотношением

$$u(t) = \Gamma[u_0, h]x(t) = \begin{cases} u_0, & u_0 \leq x(t) \leq u_0 + h; \\ x(t), & x(t) < u_0; \\ x(t) - h, & u_0 + h < x(t), \end{cases}$$

где Γ — гистерезисный оператор; $x(t)$ — вход преобразователя, u_0 — начальное состояние выхода, а h — раствор люфта. С помощью полугруппового тождества

$$\Gamma[u(t_1, h)]x(t) = \Gamma[\Gamma[u_0, h]x(t_1, h)]x(t)$$

и специальной предельной конструкции действие оператора распространяется на все непрерывные входы. Применительно к изучаемой системе выход преобразователя-люфта удобно определить следующим соотношением:

$$X(t) = \Gamma[X_0, L]Y(t) = \begin{cases} 0, & |Y(t) - X_0| \leq \frac{L}{2}; \\ Y(t) - \frac{L}{2}, & Y(t) - X_0 > \frac{L}{2}; \\ Y(t) + \frac{L}{2}, & Y(t) - X_0 < -\frac{L}{2}, \end{cases}$$

которое иллюстрирует рис. 2.

Здесь $X(t)$ — перемещение центра цилиндра, $Y(t)$ — перемещение поршня в горизонтальной плоскости. Сила, приложенная к опоре стержня, определяется следующим соотношением:

$$f(t) = \Gamma[X(0, t), Y(t), L, F_0]F = \begin{cases} 0, & |X(0, t) - Y(t)| \leq L; \\ F, & |X(0, t) - Y(t)| > L, \end{cases}$$

где L — раствор цилиндра, F — сила, трактуемая как управление, приложенная к поршню массой m_p . В свою очередь, движение поршня подчиняется уравнению

$$m_p \ddot{Y}(t) = F.$$

Здесь и далее производные по времени обозначаются нижним индексом t или верхними точками, а производные по пространственной координате — соответствующими нижними индексами или штрихами.

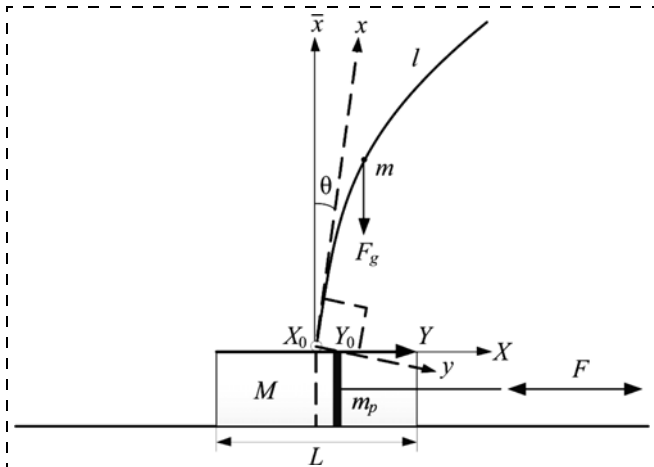


Рис. 1. Модель гибкого маятника

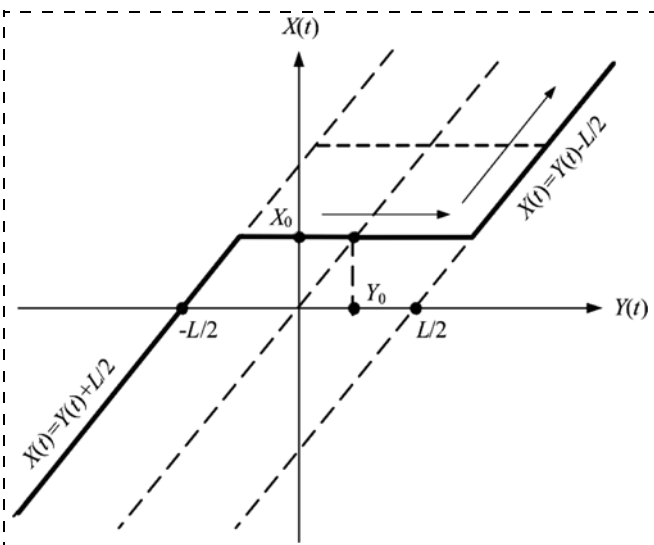


Рис. 2. Динамика входно-выходных соответствий люфта

Рассмотрим физическую модель маятника (см. рис. 1). Будем считать, что отклонение y и угол наклона стержня θ малы, т. е. $x \approx \bar{x}$, а граничные условия системы, определяющие кривизну стержня, имеют вид

$$\begin{cases} y(0, t) = y'(0, t) = 0; \\ y''(l, t) = y'''(l, t) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Функция $X(\bar{x}, t)$ описывает поведение профиля стержня с течением времени и показывает отклонение каждой точки стержня от вертикальной оси; $(X, \bar{x})$ — координаты профиля стержня; $X(0, t) = s(t)$ — перемещение точки крепления в горизонтальной плоскости.

Перейдем к новой системе координат посредством следующего соотношения:

$$\begin{pmatrix} X \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X(0, t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для описания движения изучаемой системы используем формализм Лагранжа. Учитывая, что y и θ малы и пренебрегая членами старшего порядка, определим функцию Лагранжа:

$$L(t) = \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l [\rho \dot{s}^2 + \rho y_t^2 + \rho (x\dot{\theta})^2] + \rho(2\dot{s}x\dot{\theta} + 2x\dot{\theta}y_t + 2\dot{s}y_t) + 2\rho gy\theta - EI y_{xx}^2 dx, \quad (2)$$

где I — осевой момент инерции сечения стержня; E — модуль Юнга; ρ — линейная плотность материала стержня.

Проинтегрировав уравнение (2) на интервале (t_0, t_f) , получим функцию действия:

$$W = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} M \dot{s}^2 dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \int_0^l \left\{ \rho(\dot{s}^2 + y_t^2 + x^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{s}x\dot{\theta}) + 2x\dot{\theta}y_t + 2\dot{s}y_t + 2gy\theta - \frac{EI}{\rho} y_{xx}^2 \right\} dx dt.$$

Используя принцип наименьшего действия, в линейном приближении получим следующее соотношение:

$$\ddot{y} + \frac{EI}{\rho} y'''' = -\ddot{s} - x\ddot{\theta} + g\theta. \quad (3)$$

Принимая в качестве обобщенной координаты переменную θ , из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

с учетом (2) получаем

$$\int_0^l x(x\ddot{\theta} + \ddot{y} + \ddot{s}) dx = g \int_0^l y dx.$$

Используя равенство (3), последнее соотношение преобразуем к виду

$$\int_0^l x \left(g\theta - \frac{EI}{\rho} y'''' \right) dx = g \int_0^l y dx,$$

или

$$\frac{gl^2\theta}{2} - \frac{EI}{\rho} \int_0^l xy'''' dx = g \int_0^l y dx. \quad (4)$$

С учетом начальных условий (1) интеграл в левой части выражения (4) будет равен нулю, а домножив обе части этого равенства на ρ/g , получим

$$\frac{1}{2} ml\theta = \rho \int_0^l y dx. \quad (5)$$

Проинтегрируем обе части равенства (3) и домножим на ρ :

$$\begin{aligned} \rho \int_0^l \left(\ddot{y} + \frac{EI}{\rho} y'''' \right) dx &= \rho \int_0^l (-\ddot{s} - x\ddot{\theta} + g\theta) dx, \\ \rho \int_0^l \ddot{y} dx + EI[y'''(l, t) - y'''(0, t)] &= -\ddot{s}\rho l - \frac{l^2}{2}\rho\ddot{\theta} + g\rho l\theta. \end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что $\rho l = m$, $y'''(l, t) = 0$ (из начальных условий), и в соответствии с равенством (5) получим следующее уравнение:

$$m\ddot{\theta} + m\ddot{s} = mg\theta + EI y'''(0, t). \quad (6)$$

Принимая в качестве обобщенной координаты функции Лагранжа переменную s , получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = f(t), \quad (7)$$

где $f(t)$ — сила, приложенная к опоре стержня.

Подставим выражение (2) в равенство (7):

$$M\ddot{s} + \rho \int_0^l (\ddot{s} + x\ddot{\theta} + \ddot{y}) dx = f(t).$$

Учитывая равенство (3), получим

$$M\ddot{s} + \rho \int_0^l \left(g\theta - \frac{EI}{\rho} y'''' \right) dx = f(t).$$

Аналогично, из выражения (6) следует равенство

$$M\ddot{s} = f(t) - mg\theta - EI y'''(0, t).$$

Таким образом, имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} ml\ddot{\theta} + m\ddot{s} = mg\theta + EIy'''(0, t), \\ M\ddot{s} = f(t) - mg\theta - EIy'''(0, t). \end{cases}$$

Переходя к системе координат $(X, \bar{x})$, модель рассматриваемой механической системы можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \ddot{X} + \frac{EI}{\rho} X'''' = gX'(0, t); \\ M\ddot{X}(0, t) = f(t) - mgX'(0, t) - EIX''''(0, t), \\ ml\ddot{X}'(0, t) + m\ddot{X}(0, t) = mgX'(0, t) + EIX''''(0, t), \end{cases}$$

где $X = X(x, t)$.

Выразим $\ddot{X}(0, t)$ из первого уравнения системы и подставим во второе:

$$g(M + m)X'(0, t) - \frac{MEI}{\rho} X'''' + EIX'''' = f(t).$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения по x :

$$g(M + m)X(0, t) - \frac{MEI}{\rho} X''' + EIX'' = lf(t).$$

Учитывая условия (1), получаем

$$g(M + m)X(0, t) - \frac{MEI}{\rho} X''' = lf(t)$$

или

$$\frac{g}{l} (M + m)X(0, t) - \frac{MEI}{m} X''' = f(t).$$

В дальнейшем управление маятником будем строить по принципу обратной связи, т.е. считаем, что сила, приложенная к цилиндру, определяется следующим равенством:

$$F = k \text{sign}(ae_1 + e_2), \quad (8)$$

где коэффициенты $a > 0$, $k > 0$ и

$$e_1 = \int_0^l X' dl;$$

$$e_2 = \int_0^l \dot{X}' dl.$$

Параметр e_1 — интегральный угол отклонения стержня; e_2 — интегральная угловая скорость стержня. Решение задачи стабилизации обратного положения будет заключаться в поиске таких значений коэффициентов a и k , при которых параметры e_1 и e_2 будут ограничены.

Таким образом, система уравнений, описывающая динамику исследуемой механической системы, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{X} + \frac{EI}{m} X'''' = gX'(0, t); \\ (M + m)\ddot{X}(0, t) + ml\ddot{X}'(0, t) = f(t); \\ \frac{g}{l} (M + m)X(0, t) - \frac{MEI}{m} X''''(0, t) = f(t); \\ f(t) = \Gamma[X(0, t), Y(t), L, F_0]F; \\ m_p \ddot{Y}(t) = F; \\ F = k \text{sign}(ae_1 + e_2); \\ e_1 = \int_0^l X' dl; \\ e_2 = \int_0^l \dot{X}' dl. \end{cases} \quad (9)$$

Разностная схема.

Приближенное решение задачи стабилизации

Систему (9) будем решать численно: введем прямоугольную сетку, для этого разобьем область определения функции $X = X(x, t)$ прямыми линиями, параллельными координатным осям (рис. 3).

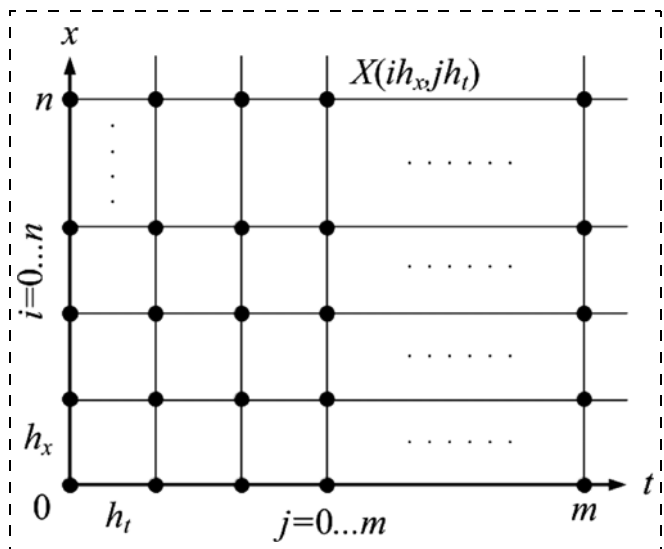


Рис. 3. Сеточное разбиение области определения функции $X(x, t)$

Очевидно, что в узлах сетки функция $X(x, t)$ будет принимать значение

$$X_{i,j} = X(ih_x, jh_t),$$

где h_x — шаг сетки по оси x ; h_t — шаг сетки по оси времени t ; $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$; $h_x = l/n$, $h_t = T/m$, T — исследуемый промежуток времени для расчета одной итерации по времени. Тогда с использованием неявной схемы систему уравнений (9) в конечных разностях можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases}
\frac{X_{i,j+1} - 2X_{i,j} + X_{i,j-1}}{h_t^2} + \frac{EIl}{m} \frac{6X_{i,j+1} - 4X_{i-1,j+1} - 4X_{i+1,j+1} + X_{i+2,j+1} + X_{i-2,j+1}}{h_x^4} = g \frac{X_{1,j+1} - X_{0,j+1}}{h_x}; \\
(M+m) \frac{X_{0,j+1} - 2X_{0,j} + X_{0,j-1}}{h_t^2} + ml \frac{X_{1,j-1} - X_{0,j+1} + X_{1,j+1} + 2X_{0,j} - 2X_{1,j} - X_{0,j-1}}{h_x h_t^2} = F_j; \\
\frac{g}{l} (M+m) g X_{0,j} - \frac{MEI}{m} \frac{3X_{1,j} - 3X_{2,j} + X_{3,j} - X_{0,j}}{h_x^3} = F_j; \\
F_j = k \text{sign}(ae_{1j} + e_{2j}); \\
e_{1j} = \frac{X_{n,j} - X_{0,j}}{l}; \\
e_{2j} = \frac{e_{1,j} - e_{1,j-1}}{h_t}.
\end{cases} \quad (10)$$

Граничные условия будут иметь вид

$$\begin{cases}
\frac{X_{1,0} - X_{0,0}}{h_x} = \alpha; \\
\frac{X_{2,j} - 2X_{1,j} + X_{0,j}}{h_x^2} = 0; \\
\frac{X_{n-1,j} - 2X_{n-2,j} + X_{n-3,j}}{h_x^2} = 0; \\
\frac{3X_{n-2,j} - 3X_{n-1,j} + X_{n,j} - X_{n-3,j}}{h_x^3} = 0; \\
\frac{X_{i,1} - X_{i,0}}{h_t} = 0; \\
\frac{X_{i,2} - 2X_{i,1} + X_{i,0}}{h_t^2} = 0.
\end{cases} \quad (11)$$

Прежде всего докажем устойчивость относительно возмущения начальных данных разностной схемы (10), (11) с помощью спектрального метода [15]. Так как устойчивость характеризуется изменением погрешности с течением времени, рассмотрим уравнения системы, содержащие узлы из разных временных слоев. Учитывая тот факт, что наличие свободного члена не влияет на устойчивость, будем исследовать следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
& (M+m) \frac{X_{0,j+1} - 2X_{0,j} + X_{0,j-1}}{h_t^2} + \\
& + ml \frac{X_{1,j-1} - X_{0,j+1} + X_{1,j+1} + 2X_{0,j} - 2X_{1,j} - X_{0,j-1}}{h_x h_t^2} = 0; \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{X_{i,j+1} - 2X_{i,j} + X_{i,j-1}}{h_t^2} + \\
& + \frac{EIl}{m} \frac{6X_{i,j+1} - 4X_{i-1,j+1} - 4X_{i+1,j+1} + X_{i+2,j+1} + X_{i-2,j+1}}{h_x^4} = 0. \quad (13)
\end{aligned}$$

Представим решение разностной схемы в виде гармоники

$$X_{k,p} = \lambda^p e^{i\alpha k}. \quad (14)$$

Подставив выражение (14) в уравнение (12) и (13) и упростив выражения, получим

$$\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda h_t^2} \left(M+m + ml \frac{e^{i\alpha} - 1}{h_x} \right) = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\lambda-2+\lambda^{-1}}{h_t^2} + \frac{EIl}{m} \frac{6-4e^{-i\alpha}-4e^{i\alpha}+e^{2i\alpha}+e^{-2i\alpha}}{h_x^4} \lambda = 0. \quad (16)$$

Рассматриваемая разностная схема является устойчивой относительно возмущения начальных данных в случае выполнения необходимого спектрального условия Неймана:

$$|\lambda(\alpha)| \leq 1. \quad (17)$$

Из уравнения (15) следует, что

$$|\lambda(\alpha)| = 1, \forall \alpha. \quad (18)$$

Применяя формулу Эйлера к уравнению (16), получим

$$\frac{\lambda-2+\lambda^{-1}}{h_t^2} + \frac{EIl}{m} \frac{3-4\cos\alpha+\cos 2\alpha}{h_x^4} \lambda = 0$$

или

$$\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2 h_t^2} + \frac{4EIl}{m} \frac{(\cos\alpha-1)^2}{h_x^4} = 0. \quad (19)$$

Обозначим

$$\varphi(\alpha) = \sqrt{\frac{EIl}{m}} \frac{2h_t}{h_x^2} (\cos\alpha - 1),$$

тогда равенство (19) будет иметь следующий вид:

$$\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2} = -\varphi^2(\alpha)$$

или

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda} = \pm j\varphi(\alpha).$$

Окончательно

$$\lambda = \frac{1}{1 \mp j\varphi(\alpha)},$$

$$|\lambda| = \frac{1}{1 + \varphi^2(\alpha)}.$$

Таким образом,

$$|\lambda(\alpha)| \leq 1, \forall \alpha. \quad (20)$$

Из выражений (18) и (20) следует, что спектральное условие Неймана (17) выполняется, и рассматриваемая разностная схема является абсолютно устойчивой.

Таким образом, для нахождения положения стержня на каждом временном слое необходимо решить СЛАУ вида

$$\mathbf{B}^{nn} \mathbf{X}_j^n = \mathbf{C}^n,$$

где

$$\mathbf{B}^{nn} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_0 & b_1 & 0 & b_{n-6} & b_{n-5} & b_{n-4} & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\ & & & & & & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{X}_j^n = \begin{pmatrix} X_{0,j} \\ X_{1,j} \\ X_{2,j} \\ X_{3,j} \\ X_{4,j} \\ X_{5,j} \\ \dots \\ X_{n-2,j} \\ X_{n-1,j} \\ X_{n,j} \end{pmatrix}; \mathbf{C}^n = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ \dots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix},$$

b_i — коэффициенты при неизвестных $X_{i,j}$; c_i — свободный член.

Параметрическая оптимизация и стабилизация

Как было указано ранее, решение задачи стабилизации обратного гибкого маятника в окрестности вертикального положения будет заключаться в поиске оптимальных значений коэффициентов a и k из равенства (8).

Во многих технических задачах требуется не только стабилизировать систему, но и добиться асимптотически оптимальных характеристик. В рассмотренной задаче этому соответствует минимизация функционала, определяющего отклонение маятника от вертикального положения.

Определим функционал, который в дальнейшем будем называть целевым:

$$J(a, k) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_0^l (\dot{X}')^2 dl + \int_0^l (\dot{X}')^2 dl \right] dt. \quad (21)$$

Здесь величина T — это временной интервал, на котором проводится оптимизация.

При решении уравнений, описывающих динамику исследуемой механической системы, необходимо минимизировать функционал (21). Таким образом, на физическом уровне задача сводится к минимизации среднеквадратичного отклонения маятника от вертикального положения.

Учитывая тот факт, что решение поставленной задачи выполнялось пошагово с применением численных методов, для оптимизации решения используем градиентный метод дробления шага, являющийся разновидностью методов градиентного поиска [16]. Данный метод обладает простотой реализации и достаточно высокой скоростью сходимости.

Алгоритм метода дробления шага

Шаг 0. Задать параметр точности ε , начальный

шаг $h > 0$, выбрать начальный вектор $u^0 = \begin{bmatrix} k_0 \\ a_0 \end{bmatrix}$ и

вычислить $J(u^0)$.

Шаг 1. Найти численно $\nabla J(u^0)$ и проверить критерий останова $\|\nabla J(u^0)\| < \varepsilon$. Если критерий останова выполнен, то вычисления завершить, полагая $u^* = u^0$, $J^* = J(u^0)$.

Шаг 2. Положить $u^1 = u^0 - h \nabla J(u^0)$, вычислить $J(u^1)$. Если $J(u^1) < J(u^0)$, то положить $u^0 = u^1$, а $J(u^0) = J(u^1)$ и перейти к шагу 1.

Шаг 3. Положить $h = h/2$ и перейти к шагу 2.

Результаты компьютерного моделирования

Обратный гибкий маятник без люфта

Ниже представлены результаты моделирования поведения обратного гибкого маятника с применением соответствующей разностной схемы без учета

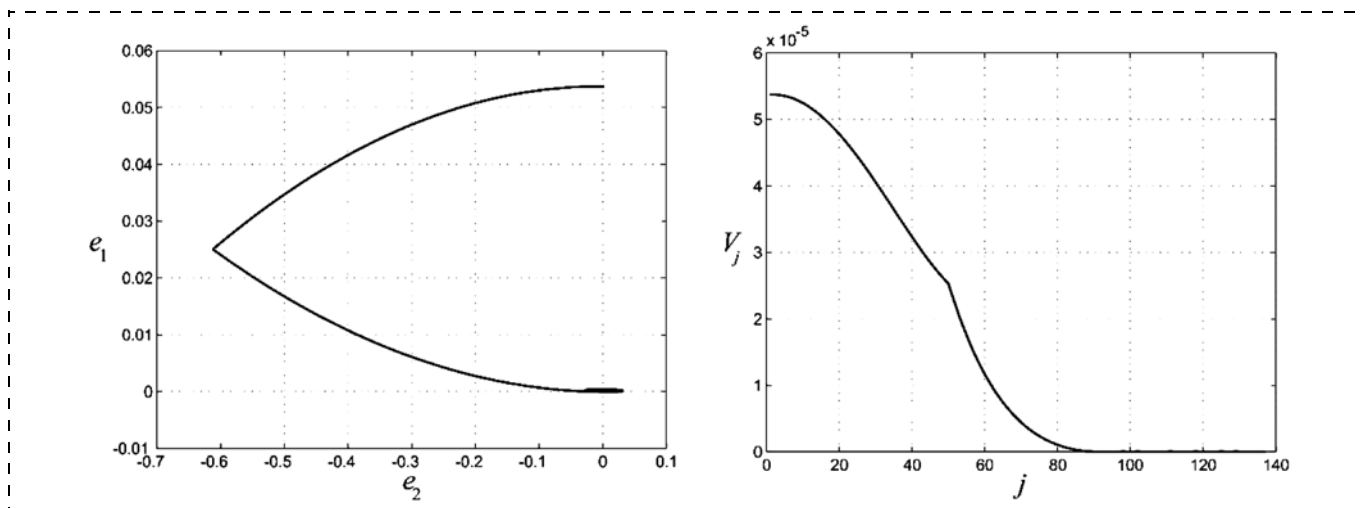


Рис. 4. Фазовая траектория (слева) и функция Ляпунова (справа) системы без люфта ($a = 22$, $k = 1,22$)

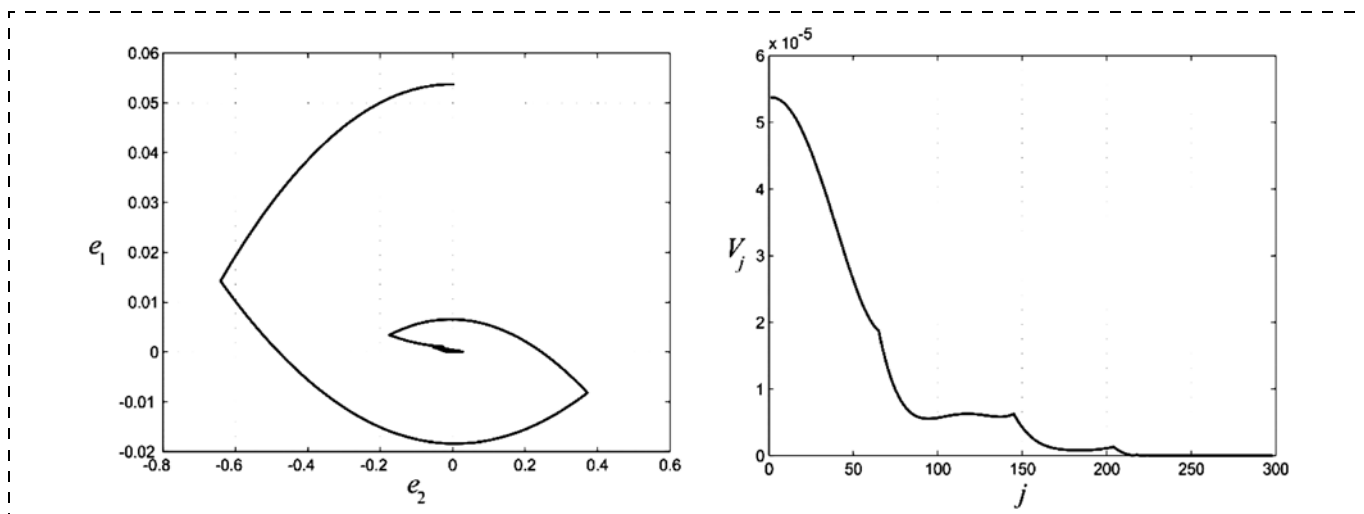


Рис. 5. Фазовая траектория (слева) и функция Ляпунова (справа) системы без люфта ($a = 40$, $k = 1$)

люфта. Найдем оптимальные значения коэффициентов a и k .

Характеристики исследуемой механической системы и начальные условия:

материал стержня — сталь, $m = 1$ кг; $M = 10$ кг; $l = 1$ м; $\rho = 1,04$ кг/м; $E = 210 \cdot 10^9$ Па; $I = 0,087$ кг $\cdot$ м²; $\alpha = 0,06^\circ$.

В процессе оптимизации решения были найдены коэффициенты $a = 22$ и $k = 1,15$.

Оценим устойчивость системы в соответствии с критерием Ляпунова. В качестве функции Ляпунова возьмем

$$V = \int_0^l \dot{X}'^2 dl + \int_0^l \dot{X}'^2 dl.$$

Фазовая траектория исследуемой системы, представляющая собой зависимость интегрального угла отклонения стержня от его интегральной угловой скорости, и соответствующая ей функция Ляпунова показаны на рис. 4.

Как видно из рис. 4, функция Ляпунова на всем интервале времени удовлетворяет следующему условию:

$$\dot{V}(t) < -kV.$$

Следовательно, обратный маятник с течением времени стремится к устойчивому вертикальному положению.

Изменим коэффициенты управления: пусть $a = 40$ и $k = 1$. График фазовой траектории и функция Ляпунова для этого случая приведены на рис. 5.

Как видно из рис. 4, 5, изменение коэффициентов, найденных с помощью метода дробления шага, приводит к увеличению времени стабилизации.

Обратный гибкий маятник с люфтом

Добавим в модель механической системы люфт опоры стержня. Исследуем поведение системы при тех же параметрах. Поиск коэффициентов для такой системы дал следующий результат: $a = 8,4$; $k = 1,39$.

Примем значение люфта $L = 0,01$ м, $m_p = 1$ кг. Фазовая траектория и функция Ляпунова такой системы показаны на рис. 6.

Увеличим раствор цилиндра, пусть $L = 0,02$ м при тех же параметрах системы. Результаты моделирования приведены на рис. 7.

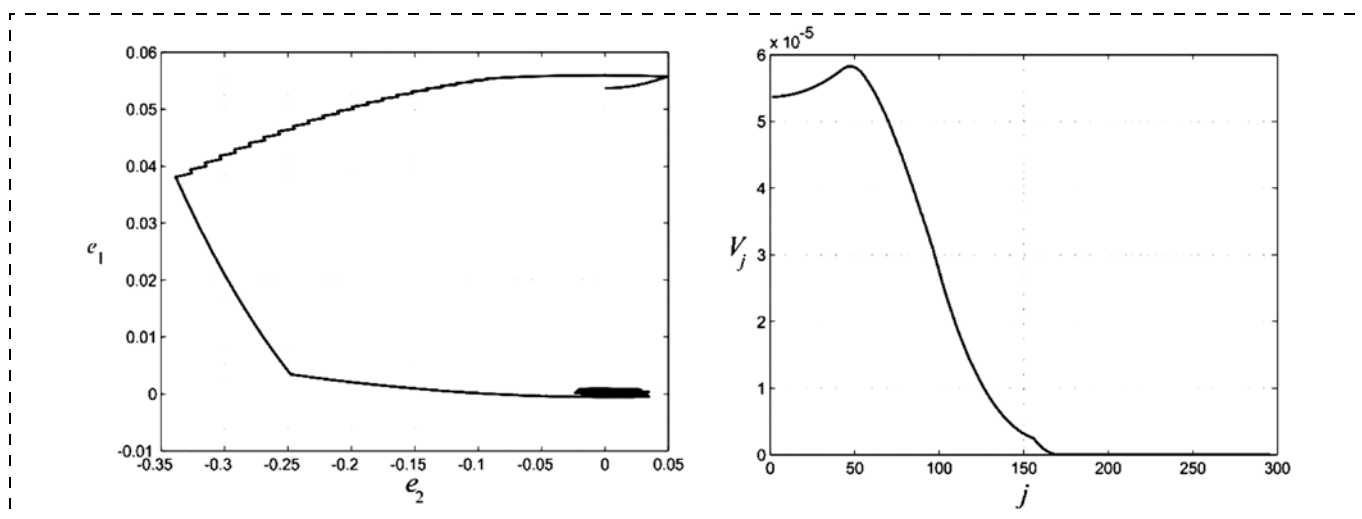


Рис. 6. Фазовая траектория (слева) и функция Ляпунова (справа) системы с люфтом $L = 0,01$ м ($a = 8,4$; $k = 1,39$)

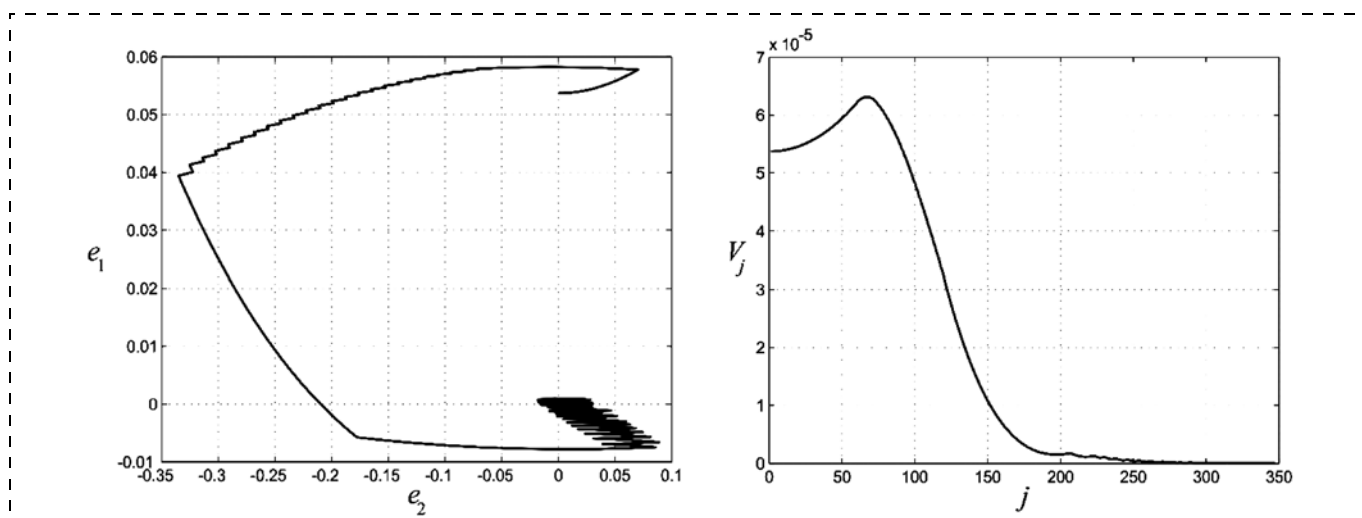


Рис. 7. Фазовая траектория (слева) и функция Ляпунова (справа) системы с люфтом $L = 0,02$ м ($a = 8,4$; $k = 1,39$)

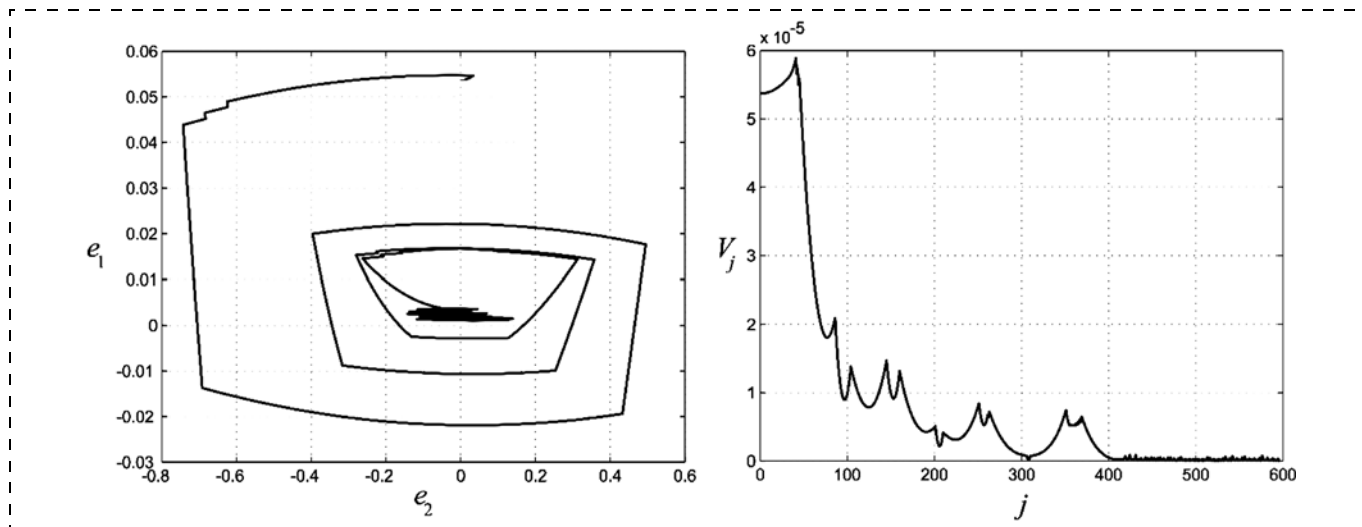


Рис. 8. Фазовая траектория (слева) и функция Ляпунова (справа) системы с люфтом $L = 0,02$ м ($a = 15$; $k = 6$)

Система при заданных параметрах также с течением времени приходит в устойчивое состояние. Изменим коэффициенты управления: пусть $a = 15$, $k = 6$. Результаты моделирования приведены на рис. 8.

Как и в случае с системой без люфта, изменение коэффициентов, найденных с помощью метода дробления шага, приводит к увеличению времени стабилизации.

Закключение

В настоящей работе рассмотрена физическая модель обратного гибкого маятника с люфтом в основании его крепления, предложен метод стабилизации маятника в окрестности вертикального положения. В качестве алгоритма оптимизации при стабилизации маятника был использован градиентный метод дробления шага. Динамика изучаемой физической системы проиллюстрирована с помощью численного моделирования.

Список литературы

1. Stephenson A. On an induced stability // Phil. Mag. 15, 233 (1908).
2. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН. 1951. № 44. С. 7–20.
3. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. № 21. С. 588–597.
4. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.

5. Решмин С. А., Черноусько Ф. Л. Оптимальное по быстрейшему управлению перевернутым маятником в форме синтеза // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. № 3. С. 51–62.
6. Матвеев М. Г., Семенов М. Е., Шевлякова Д. В., Канищева О. И. Зоны устойчивости и периодические решения перевернутого маятника с гистерезисным управлением // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 11. С. 8–14.
7. Mikhail E. Semenov, Andrey M. Solovyov, Peter A. Meleshchenko Elastic inverted pendulum with backlash in suspension: stabilization problem // Nonlinear Dynamics. 2015. Vol. 82. P. 677–688.
8. Semenov M. E., Meleshchenko P. A., Solovyov A. M., Semenov A. M. Hysteretic Nonlinearity in Inverted Pendulum Problem // Springer Proceedings in Physics. Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis. 2015. Vol. 168. P. 463–506.
9. Chao Xu, Xin Yu. Mathematical model of elastic inverted pendulum control system // Journal of Control Theory and Applications. 2004. N. 3. P. 281–282.
10. Elmer P. Dadios, Patrick S. Fernandez, and David J. Williams Genetic Algorithm On Line Controller for the Flexible Inverted Pendulum Problem // Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics. 2006. Vol. 10. N. 2.
11. Tang Jiali, Ren Gexue. Modeling and Simulation of a Flexible Inverted Pendulum System // Tsinghua Science and Technology. 2009. Vol. 14. N. S2.
12. Zheng-Hua Luo, Bao-Zhu Guo. Shear Force Feedback Control of a Single-Link Flexible Robot with a Revolute Joint // IEEE Transaction On Automatic Control. 1997. Vol. 42. N. 1.
13. Mohsen Dadfarnia, Nader Jalili, Bin Xian, Darren M. Dawson. A Lyapunov-Based Piezoelectric Controller for Flexible Cartesian Robot Manipulators // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2004. Vol. 126/347.
14. Красносельский М. А., Покровский А. В. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
15. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
16. Аттетков А. В., Галкин С. В., Зарубин В. С. Методы оптимизации. М.: Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003.

Stabilization of a Flexible Inverted Pendulum with the Hysteretic Properties

M. E. Semenov¹, mkl150@mail.ru✉, M. G. Matveev¹, mgmatveev@yandex.ru,
G. N. Lebedev², A. M. Solovye¹, darkzite@yandex.ru,

¹Voronezh State University, Voronezh, 394006, Russian Federation,

²Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russian Federation

Corresponding author: Semenov Mikhail E., D. Sc., Head of Laboratory of Mechanics, Navigation and Motion Control, Institute of Precision Mechanics and Control Problems, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation, e-mail: mkl150@mail.ru

Received on September 19, 2016

Accepted on March 23, 2017

As is known, the problem of the inverted pendulum plays the central role in the control theory. In particular, the problem of the inverted pendulum (as a test model) presents many challenging problems to the control designs. Because of their nonlinear nature, the pendulums have preserved their usefulness and now they are used to illustrate many of the ideas emerging in the field of a nonlinear control. Typical examples of that are the feedback stabilization, variable structure control, passivity-based control, back-stepping and forwarding, nonlinear observers, friction compensation, and nonlinear model reduction. The challenges of the control made the inverted pendulum systems a classic tool for the control laboratories. It should also be pointed out that the problem of stabilization of such a system is a classical problem of the dynamics and control theory. Moreover, the model of the inverted pendulum is widely used as a standard for testing of the control algorithms (for PID controllers, neural networks, fuzzy control, etc.). In this paper, the authors investigate the elastic inverted pendulum with a hysteretic nonlinearity (a backlash) in the suspension point. Namely, the problems of stabilization and optimization of such a system are considered. The algorithm, which ensures an effective procedure for finding of the optimal parameters, is presented and applied to the considered system. The results of the numerical simulations, namely the phase portraits and the dynamics of Lyapunov function, are also presented and discussed.

Keywords: flexible inverted pendulum, hysteresis, gradient method, optimization, difference scheme

Acknowledgements: The work was supported by RFBR grants No. 16-08-00312 and No. 17-01-00251

For citation:

Semenov M. E., Matveev M. G., Lebedev G. N., Solovyev A. M. Stabilization of a Flexible Inverted Pendulum with the Hysteretic Properties, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 8, pp. 516–525.

DOI: 10.17587/mau.18.516-525

References

1. **Stephenson A.** On an induced stability, *Phil. Mag.*, 15, 233 (1908).
2. **Kapica P. L.** *Majatnik s vibrirujushhim podvesom* (Pendulum with vibrating suspension), *Uspehi Fizicheskikh Nauk*, 1951, no. 44, pp. 7–20 (in Russian).
3. **Kapica P. L.** *Dinamicheskaja ustojchivost' majatnika pri kolebljushhejsja tochke podvesa* (Dynamic stability of a pendulum at an oscillating suspension point), *Zhurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki*, 1951, no. 21, pp. 588–597 (in Russian).
4. **Chernous'ko F. L., Akulenko L. D., Sokolov B. N.** *Upravlenie kolebanijami* (Control of oscillations), Moscow, Nauka, 1980 (in Russian).
5. **Reshmin S. A., Chernous'ko F. L.** *Optimal'noe po bystrodejstviju upravlenie perevernutym majatnikom v forme sinteza* (The optimal control of the inverted pendulum in the form of synthesis), *Izvestija RAN, Teorija i sistemy upravlenija*, 2006, no. 3, pp. 51–62 (in Russian).
6. **Matveev M. G., Semenov M. E., Shevljakova D. V., Kanishheva O. I.** *Zony ustojchivosti i periodicheskiye resheniya perevernutogo majatnika s gisterezisnym upravleniem* (Zone of stability and periodic solutions of the inverted pendulum with hysteretic control),

Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye, 2012, no. 11, pp. 8–14 (in Russian).

7. **Mikhail E. Semenov, Andrey M. Solovyov, Peter A. Meleshchenko** Elastic inverted pendulum with backlash in suspension: stabilization problem, *Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 82, pp. 677–688.

8. **Semenov M. E., Meleshchenko P. A., Solovyov A. M., Semenov A. M.** Hysteretic Nonlinearity in Inverted Pendulum Problem, Springer *Proceedings in Physics. Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis*, 2015, vol. 168, pp. 463–506.

9. **Chao Xu, Xin Yu.** Mathematical model of elastic inverted pendulum control system, *Journal of Control Theory and Applications*, 2004, no. 3, pp. 281–282.

10. **Elmer P. Dadios, Patrick S. Fernandez, David J. Williams.** Genetic Algorithm On Line Controller for the Flexible Inverted Pendulum Problem, *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 2006, vol. 10, no. 2.

11. **Tang Jiali, Ren Gexue.** Modeling and Simulation of a Flexible Inverted Pendulum System, *Tsinghua Science and Technology*, December 2009, vol. 14, no. S2.

12. **Zheng-Hua Luo, Bao-Zhu Guo.** Shear Force Feedback Control of a Single-Link Flexible Robot with a Revolute Joint, *IEEE Transaction On Automatic Control*, January 1997, vol. 42, no. 1.

13. **Mohsen Dadfarnia, Nader Jalili, Bin Xian, Darren M. Dawson.** A Lyapunov-Based Piezoelectric Controller for Flexible Cartesian Robot Manipulators, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, June 2004, vol. 126/347.

14. **Krasnosel'skij M. A., Pokrovskij A. V.** *Sistemy s gisterezisom* (Systems with hysteresis), Moscow, Nauka, 1983 (in Russian).

15. **Godunov S. K., Rjaben'kij V. S.** *Raznostnye shemy* (Difference schemes), Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).

16. **Attetkov A. V., Galkin S. V., Zarubin V. S.** *Metody optimizacii* (Optimization methods), Moscow, Publishing house of Bauman Moscow State Technical University, 2003 (in Russian).

УДК 004.94:519.711.3

DOI: 10.17587/mau.18.525-531

В. И. Потапов, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой,
Омский государственный технический университет

Постановка и решение игровой задачи противоборства аппаратно-избыточной динамической системы с атакующим противником, действующим в условиях неполной информации в процессе конфликта

Поставлена и решена численно-аналитическим методом игровая задача противоборства атакуемой аппаратно-избыточной динамической системы с атакующим противником, действующим в условиях неполной информации о поведении атакуемой системы в процессе конфликта.

Дифференциальная модель игры сводится к многошаговой матричной модели с заданными вероятностями состояний атакующего противника. Приведены численные алгоритмы для вычисления вектора резервирования атакуемой системы, максимизирующего вероятность ее безотказной работы к моменту окончания игры, и для решения рассматриваемой игровой задачи в виде, удобном для реализации на персональном компьютере.

Ключевые слова: игровая задача, противоборство, конфликтная ситуация, математическая модель, динамическая система, аппаратная избыточность, вероятность безотказной работы, численные алгоритмы

Введение

Исследованиям в области постановки и решения задач противоборства в конфликтных ситуациях динамических систем различной природы, в том числе проблемно ориентированным игровым задачам, посвящено большое число научных работ,

наиболее близкими из которых по содержанию к проблемам, рассматриваемым в данной статье, являются работы [1–12]. В указанных выше работах прямо или косвенно полагалось, что противоборствующие стороны в процессе конфликта имеют полную информацию о поведении противника и