

В. С. Кулабухов, канд. техн. наук, доц., гл. конструктор направления, nit@mnpk.ru, kws0704@mail.ru, АО Московский научно-производственный комплекс "Авионика" им. О. В. Успенского, Москва

Синтез регуляторов для следящих систем на основе принципа изоморфности

Предложен метод синтеза регуляторов нового типа — изоморфных регуляторов. Доказана необходимость обратной связи в форме изоморфного регулятора для управляемости системы. Показано, что изоморфные регуляторы обладают свойством "предельности" как по уровню общности доказанных утверждений об управляемости для систем общего вида, так и по уровню достижимого качества переходных процессов. Приведены примеры синтеза изоморфных регуляторов для линейных систем. Обсуждены их преимущества.

Ключевые слова: принцип изоморфизма, система, объект управления, управляемость, регулятор, обратная связь, эталонная модель

Введение

В статье [1] сформулирован общий принцип изоморфности в теории систем, и на его основе введено понятие *управляемости системы с точностью до некоторой изоморфной модели*, а также доказаны теоремы об управляемости и предложены новые критерии управляемости с точностью до изоморфизма для систем общего вида, позволившие формально определить структуру соответствующих регуляторов. В настоящей статье на основе указанного принципа и теорем об управляемости рассматривается формализованный метод синтеза регуляторов нового типа — изоморфных регуляторов, имеющих простую мультипликативную форму.

Эффективность предлагаемого метода демонстрируется в приложении к линейным системам. Анализ показывает [2], что современные методы синтеза линейных регуляторов недостаточно формализованы. Это относится даже к простым линейным системам с одним входом и одним выходом (класса SISO), имеющим важное практическое значение. Для обеспечения требуемого качества переходных процессов в контурах управления такими системами часто используются эвристические приемы. В связи с этим исследования в области линейных систем не потеряли актуальности. Высокое качество отработки произвольно изменяющихся задающих воздействий в условиях параметрических возмущений достигается сочетанием различных методов [3], в том числе основанных на использовании экзогенных (внешних) эталонных моделей [4], больших коэффициентов усиления [5—7] и др. Для поиска общего решения указанной проблемы часто используют аппарат современной алгебры [1, 8, 9].

В данной работе предлагается вариант решения проблем синтеза регуляторов для систем общего

вида и линейных систем, сочетающий алгебраический подход, основанный на общем принципе изоморфности [1], эталонные модели, формализующие цели управления, а также метод больших коэффициентов усиления, обеспечивающий повышение робастности. Приведены методики и примеры синтеза изоморфных регуляторов для управления линейными объектами. Показано, что изоморфные регуляторы обладают в определенном смысле свойством "предельности" как по уровню общности доказанных утверждений об управляемости систем, так и по уровню достижимого качества переходных процессов в контурах управления.

Управляемость систем с точностью до изоморфизма

Рассмотрим систему $\Sigma = (X_0, s, X)$ с отображением-структурой $s: X_0 \rightarrow X$, $X_0 \subset R^n$, $X \subset R^n$ и действующим на ее входе отображением $\beta: U \rightarrow X_0$, $U \subset R^m$. В работе [1] на основе введенного принципа изоморфности показано, что при наложении некоторых условий на пару (s, β) композиция этих отображений позволяет коммутировать (замкнуть) диаграмму, показанную на рис. 1, некоторым регулятором — обратной связью S_R^{-1} и тем самым обеспечить управляемость системы. Указанные условия опреде-

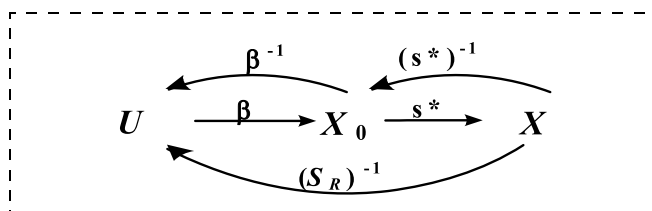


Рис. 1. Коммутативная диаграмма отображений управляемой системы

ляются приведенной в работе [1] теоремой об управляемости с точностью до изоморфизма. Здесь дадим без доказательств некоторые варианты формулировки теоремы.

Теорема 1⁰ об управляемости (с точностью до изоморфизма)

Пусть (s, β) — пара отображений, характеризующих модель системы, где $s \equiv s^*: X_0 \rightarrow X$ — изоморфное в обычном смысле (обратимое вне коммутативной диаграммы) отображение, $\beta: U \rightarrow X_0$ — отображение, характеризующее непосредственное воздействие управлений $U \subset R^m$ на входы $X_0 \subset R^n$. Сформируем на U множество отсчетов в моменты $t_0, t_0 + 1\Delta, t_0 + 2\Delta, \dots, t_0 + (i-1)\Delta, \dots, t_0 + (k-1)\Delta$, где Δ — малый интервал (дискрет) времени, $i = 1, k, t_0 + (k-1)\Delta = t$. В те же моменты зафиксируем соответствующие отсчеты на входах X_0 и выходах X . Тогда, если на указанных множествах отсчетов, в общем случае при $k \geq n$, β является эпиморфным отображением U на X_0 , то существует композиция $s^*\beta$ и коммутирующее ее эпиморфное отображение-регулятор $S_R: U \rightarrow X$, обеспечивающее однозначное, точное и полное управление выходами X с точностью до изоморфизма s^* , т. е. имеющее в рассматриваемой коммутативной диаграмме такое обратное отображение $S_R^{-1}: X \rightarrow U$, которое позволяет однозначно, точно и полно, с точностью до изоморфизма s^* , сопоставить желаемым выходам X потребные управления U .

При выполнении условий теоремы 1⁰ систему $\Sigma = (X_0, s^*, X)$ вместе с действующим на ее входе отображением β и, соответственно, пару отображений (s^*, β) назовем управляемыми с точностью до изоморфной модели s^* . Теорема позволяет проверить управляемость нелинейных систем, дифференциальные уравнения которых преобразуются в разностную форму для $k \geq n$ шагов (например, методом Эйлера). Если при $k \geq n$ правые части уравнений для всех элементов вектора X зависят от элементов вектора U , то система управляема.

Как видно из рис. 1, для регулятора S_R , удовлетворяющего условиям теоремы, справедливы равенства $S_R = s^*\beta$, $S_R^{-1} = \beta^{-1}(s^*)^{-1}$, где β^{-1} и S_R^{-1} — обратные в смысле [1] к β и S_R с точностью до изоморфизма s^* отображения. Такие регуляторы назовем изоморфными. Отображение $S_R^{-1}: X \rightarrow U$ назовем обратной связью. По сути, теорема доказывает необходимость и достаточность существования обратной связи в форме изоморфного регулятора S_R^{-1} для обеспечения управляемости системы, а также определяет структуру этого регулятора. Ранее необходимость обратной связи для синтеза регуляторов, как правило, постулировалась.

В силу эпиморфности β при заданных β и s^* регулятор S_R , удовлетворяющий условиям теоремы, не единственен. Однако при фиксации конкретного S_R из множества возможных обратное S_R^{-1} (и все другие обратные) в рамках рассматриваемой коммутативной диаграммы будет единственным, что отвечает основной лемме и принципу изоморф-

ности [1]. При выборе другого отображения β для системы с фиксированной структурой s^* необходимо определять и другое множество регуляторов S_R . В случае, если β таково, что осуществляется непосредственное воздействие $U \subset R^m$ не на один, а на два, три и большее (вплоть до n) число элементов-входов из $X_0 \subset R^n$, то для проверки эпиморфности отображения β нужно формировать, соответственно, множества отсчетов U, X_0 и X для $k \geq n-1, k \geq n-2, k \geq n-3$ и т.д. моментов времени.

Теорема 2⁰ об управляемости (с точностью до изоморфизма)

Необходимым и достаточным условием полной непосредственной управляемости системы $\Sigma = (X_0, s, X)$ с мономорфной структурой $s: X_0 \rightarrow X$ по всему множеству входов X_0 и управляемости по множеству выходов X с точностью до изоморфного в обычном смысле входного отображения $\beta^*: U \rightarrow X_0$ является существование композиции $s\beta^*$.

Пару (s, β^*) в этом случае назовем полностью непосредственно управляемой по входам и управляемой по выходам с точностью до изоморфизма β^* . Для регулятора S_R , удовлетворяющего теореме 2⁰, справедливы равенства (рис. 1) $S_R = s\beta^*$, $S_R^{-1} = (\beta^*)^{-1}s^{-1}$.

Для линейных систем теореме 2⁰ эквивалентна теорема 3⁰ об управляемости (с точностью до изоморфизма): если размер вектора U равен размеру или меньше размера вектора X_0 и модель системы $\Sigma = (X_0, s, X)$ вместе с действующим на ее входе отображением β^* приводима к форме, в которой существует композиция $s\beta^*$, где β^* — изоморфизм размера вектора U , то с точностью до этого изоморфизма она управляема. Теорема 3⁰ содержит и методику аналитической проверки управляемости линейной системы путем последовательного понижения порядка ее модели до размера вектора U .

Теоремы 1⁰, 2⁰ и 3⁰ составляют общую теорему об управляемости. Возможен и тривиальный случай, когда изоморфны в обычном смысле (вне коммутативной диаграммы) оба отображения $s \equiv s^*$ и $\beta \equiv \beta^*$. Тогда, если существует композиция $s^*\beta^*$, то обязательно существует коммутирующее ее, в данном случае единственное, изоморфное в обычном смысле отображение-регулятор $S_R^* = s^*\beta^*$. Как следует из теорем, управляемость является внутренним свойством структуры системы, характеризуемой отображениями s и β . Показано [1], что управляемость по Калману является частным случаем управляемости с точностью до изоморфизма. Применительно к линейным системам возможно получение конечных формул для изоморфных регуляторов.

Линейные изоморфные регуляторы

Рассматривается система

$$\dot{X} = A(t)X + B(t)U, X \in R^n, U \in R^m, \quad (1)$$

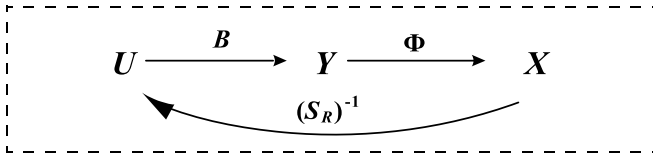


Рис. 2. Коммутативная диаграмма линейной системы

которую в форме Лапласа при нулевых начальных условиях преобразуем из аддитивной к мультипликативной форме $X(p) = (pI - A)^{-1}BU(p) = \Phi(p)Y(p)$, или

$$\begin{cases} Y(p) = BU(p); \\ X(p) = \Phi(p)Y(p), \end{cases} \quad (2)$$

где $\Phi(p) = (pI - A(p))^{-1}$ — фундаментальная матрица, I — единичная матрица, $Y(p) = B(p)U(p)$ — некоторая переменная, характеризующая "внутреннее" состояние системы. Коммутативная диаграмма системы (2) представлена на рис. 2.

Перед синтезом регулятора нужно определить, управляем ли объект (1), (2) в принципе. Фундаментальная матрица Φ всегда обратима и является изоморфизмом, поэтому критерием управляемости линейных систем является существование композиции ΦB . Как следует из теорем 1⁰ и 2⁰, в зависимости от соотношения m и n в выражении (1) управляемость можно установить с точностью до изоморфизма Φ либо с точностью до изоморфизма B^* , если B обратима в обычном смысле. Оказывается, композиция ΦB существует не всегда даже для заведомо управляемых систем в форме (1): при $m < n$ (что часто встречается на практике) указанная композиция не существует (не выполняются условия на существование обратных B^{-1} и S_R^{-1}), так как изоморфизм Φ не может коммутировать ("измерить") отображения меньшего размера, чем он сам. В этом случае применяется теорема 3⁰: путем последовательного выражения компонент $X(t)$ через непосредственно управляемые компоненты этого вектора уравнение (1) приводится к форме с некоторыми другими, обратимыми матрицами-изоморфизмами B_1^* и Φ_1 размера $m \times m$, удовлетворяющими условиям управляемости и существования регулятора $S_R = \Phi_1 B_1^*$. Если же такое преобразование неосуществимо (например, обнаружится "разрыв" преобразования — некоторые компоненты вектора $X(t)$ не выражаются через непосредственно управляемые компоненты), то система (1) неуправляема. Таким образом, управляемая линейная система всегда приводима к форме (1), в которой $m \geq n$.

Пусть система управляема. Потребуем, чтобы текущее значение вектора X отслеживало задаваемое извне произвольное желаемое значение $X_{\text{ж}}$ в соответствии с движением эталонной модели (ЭМ), характеризующей отображением (передаточной функцией) $W_{\text{ЭМ}}$. Такие задачи синтеза по прототипу носят универсальный характер [4, 8]. С учетом

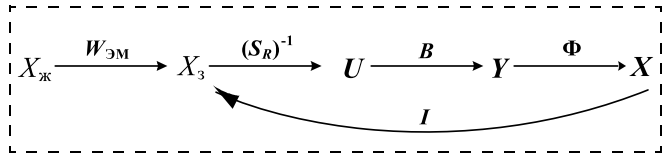


Рис. 3. Композиция отображений для слежения за эталонной моделью

уравнения ЭМ уравнение (1) управляемой системы приобретет вид

$$\dot{X} = AX + BU, X(t_0) = X_0; \quad (3)$$

$$\dot{X}_3 = CX_3 + DX_{\text{ж}}, X_{30} = X_0, \quad (4)$$

где X_3 — "мгновенное" заданное значение, которому должен в точности соответствовать выход X . ЭМ (4) отвечает передаточная функция $W_{\text{ЭМ}} = (pI - C)^{-1}D$. В соответствии с выражениями (3), (4) коммутативная диаграмма, представленная на рис. 2, преобразуется к виду, показанному на рис. 3.

Как следует из рис. 3 и уравнений (3), (4), регулятор имеет вид

$$\begin{aligned} S_R^{-1} &= B^{-1}(p)\Phi^{-1}(p)I = B^{-1}(p)\Phi^{-1}(p) = \\ &= B^{-1}(p)(pI - A(p)), S_R = \Phi(p)B(p), \end{aligned} \quad (5)$$

где S_R^{-1} , B^{-1} — обратные с точностью до изоморфизма Φ матрицы (т. е. обратные внутри коммутативной диаграммы), удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} I_x^{\text{прав}} &= S_R S_R^{-1}, I_x^{\text{лев}} = \Phi \Phi^{-1}, I_x^{\text{лев}} = I_x^{\text{прав}} = I, \\ I_U^{\text{лев}} &= S_R^{-1} S_R, I_U^{\text{прав}} = B^{-1} B, I_U^{\text{лев}} = I_U^{\text{прав}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $I_x^{\text{лев}}$, $I_x^{\text{прав}}$ — левая и правая единицы на $X_3 = X$; $I_U^{\text{лев}}$, $I_U^{\text{прав}}$ — левая и правая единицы на U . В силу обратимости в обычном смысле матрицы Φ единица на X_3 равна единичной матрице I . В общем случае (при $m > n$) $I_U^{\text{лев}}$ и $I_U^{\text{прав}}$ могут быть неединичными в обычном смысле матрицами, но такими, что $I_U^{\text{лев}} = I_U^{\text{прав}} = I_U = (I_U)^{-1}$. Показано [1], что для управляемого объекта внутри коммутативной диаграммы всегда существуют обратные матрицы S_R^{-1} и B^{-1} , даже если исходные матрицы вне диаграммы необратимы. Соотношения (5) и (6), образующие систему алгебраических уравнений, как раз и позволяют определить матрицы S_R^{-1} и B^{-1} с точностью до изоморфизма Φ и, соответственно, регулятор для объекта (3) в мультипликативной форме (2). Такие регуляторы будем называть изоморфными мультипликативными регуляторами, или просто изоморфными регуляторами.

Если модель (3) точно соответствует объекту управления (ОУ), контур управления с точностью до этой модели и с обратной связью (ОС) в виде регулятора S_R^{-1} , показанный на рис. 3, приобретает простую мультипликативную, "линейную" форму без видимых "циклов" (обратных связей), приведенную на рис. 4 и, с учетом (5), на рис. 5.

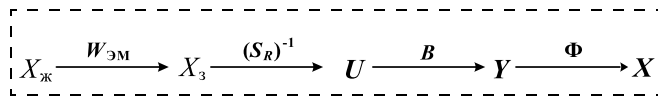


Рис. 4. "Линейный" контур с изоморфным мультипликативным регулятором

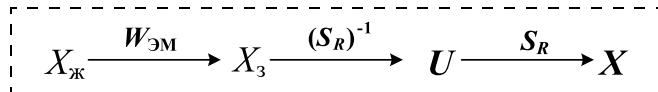


Рис. 5. Контур с предельно достижимым качеством управления

Такой "линейный" контур реализует условие $S_R S_R^{-1} = I$ точного слежения $X = X_3$ в любой момент времени. "Линейность" контура не означает, что в нем отсутствует ОС от X к U . Наличие и структура ОС "зашифрованы" в отображении S_R^{-1} , характеризующем структуру изоморфного регулятора. Как видно из рис. 5, при правильно синтезированном изоморфном регуляторе и отсутствии ограничений на управление движение ОУ будет полностью и с абсолютной точностью определяться движением ЭМ даже в таком "линейном", разомкнутом по реальному выходу X , контуре. В этом смысле *изоморфный регулятор является предельным по достижимому качеству переходных процессов*.

Так как любой реальный объект обладает определенной инерцией (динамикой), а также органами управления ограниченной мощности, это должно учитываться при выборе передаточной функции $W_{ЭМ} = (pI - C)^{-1}D$ для ЭМ (4). При этом $X_{ж}$ может содержать несколько или все компоненты из X .

Выполнив синтез регулятора в соответствии с условиями (5) и (6), нужно проверить "линейный" контур на робастность путем моделирования, задавая из практических соображений вариации параметров отображений Φ и B . Нужно также проверить контур на устойчивость к воздействию шумов во входных сигналах $X_{ж}$. Если результат окажется удовлетворительным, синтез регулятора можно считать законченным и в дальнейшем непосредственно использовать "линейный" контур (см. рис. 4) в виде, представленном на рис. 6.

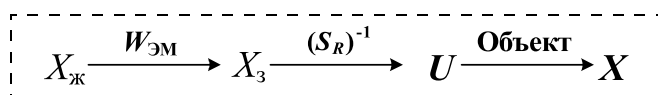


Рис. 6. "Линейный" контур управления объектом

Если по каким-либо причинам реальный ОУ существенно отличается от модели (3), использованной при синтезе регулятора S_R^{-1} , "линейный" контур может оказаться недостаточно робастным. Тогда его следует охватить дополнительной ОС, как показано на рис. 7. В этом случае под $W_{ЭМ} = (pI - C)^{-1}D$ следует понимать обобщенную передаточную функцию, выполняющую как функцию задатчика желаемого движения (т. е. исходной ЭМ, см. рис. 6), так и функцию корректирующего устройства — "предкомпенсатора", компенсирующего несоответствие модели объекту и обеспечивающего необходимую степень астатизма, робастности и устойчивости контура к шумам. В данном случае ЭМ-предкомпенсатор по смыслу отличается от "предкомпенсаторов", рассматриваемых, например, в работе [8], где "эквивалентные предкомпенсаторы" вводятся для "компенсации" (исключения) ОС в контурах управления. Здесь, наоборот, предкомпенсатор необходим только при введении дополнительной ОС, "компенсирующей" неадекватность модели объекту. Если модель аналогична ОУ, достаточно основной ОС, реализуемой регулятором в "линейном" контуре, и необходимость в дополнительной ОС и в "предкомпенсаторе" отпадает. При совпадении модели и ОУ в робастном контуре (см. рис. 5, 7) передаточная функция "регулятор—объект" от X_3 к X близка к единичной и замкнутому контуру (рис. 8) будет отвечать передаточная функция $W = W_{ЭМ}(I + W_{ЭМ})^{-1}$.

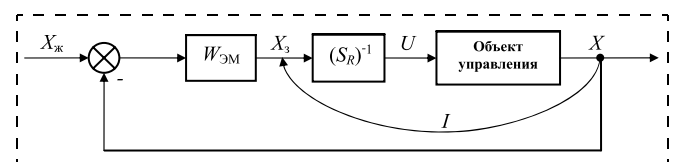


Рис. 7. Робастный контур управления

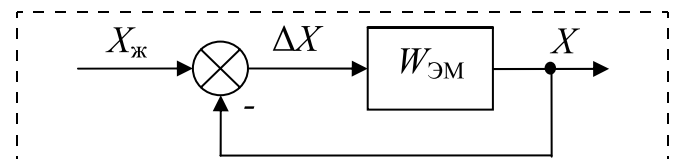


Рис. 8. Робастный контур при совпадении модели и объекта

Таким образом, важный вывод состоит в том, что характеристики робастного контура, как и "линейного", в рамках рассматриваемого метода определяются лишь структурой ЭМ. В общем случае синтез ЭМ по заданным требованиям является нетривиальной задачей, но для многих объектов некоторые требования к ЭМ могут быть существенно смягчены (например, по порядку астатизма и т.д.). Это позволяет использовать относительно простые ЭМ.

Далее рассмотрим ОУ "один вход — один выход" (класса SISO), допускающий, например, использование в "линейном" контуре ЭМ $W_{ЭМ} = (T_M p + 1)^{-1}$.

Тогда при $W_{ЭМ} = k_M(T_M p + 1)^{-1}$ передаточная функция робастного контура

$$W = \frac{k_M}{T_M p + 1 + k_M} = \frac{k_M}{(1 + k_M) \left[\frac{T_M}{(1 + k_M)} p + 1 \right]} \approx \frac{1}{T_M^* p + 1}, \quad (7)$$

где $T_M^* = \frac{T_M}{(1 + k_M)}$, при достаточно большом k_M обеспе-

чивает астатизм по управляемой координате. При этом T_M^* в соотношении (7) становится в $(1 + k_M)$ раз меньше T_M , и время переходного процесса резко сокращается в сравнении с "линейным" контуром, что может снизить устойчивость и потребовать весьма больших расходов органов управления. Для обеспечения прежнего времени переходного процесса одновременно с увеличением коэффициента усиления в k_M раз нужно в $(1 + k_M)$ раз увеличить и T_M . Тогда для робастного контура нужно назначить $W_{ЭМ} = k_M(T_M(1 + k_M)p + 1)^{-1}$, где T_M — прежняя (до введения дополнительной ОС) постоянная времени. Передаточная функция робастного контура, показанного на рис. 8, приобретет вид

$$W = \frac{k_M}{T_M(1 + k_M)p + 1 + k_M} = \frac{k_M}{(1 + k_M)(T_M p + 1)} \approx \frac{1}{T_M p + 1} \quad (8)$$

и при достаточно большом k_M будет практически точно соответствовать передаточной функции исходного "линейного" контура.

Примеры

Пример 1. Зададимся видом матриц A и B в модели (3):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ и конкретно} \\ A = \begin{bmatrix} -4 & -1,14 \\ 1 & -0,62 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -7,5 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

При определении управляемости ОУ (1)–(3) с матрицами (9) можно убедиться, что в диаграмме на рис. 2 не существует матрицы B^{-1} , удовлетворяющей условиям (5) и (6). Значит, система не управляема? Вместе с тем, из выражений (9) и (3) видно, что система управляема. Из этого следует, что относительно изоморфизма Φ композиция ΦB не выполняется и диаграмма на рис. 2 не коммутруется. Следовательно, существует другой изоморфизм, относительно которого диаграмма замы-

кается. Для его определения воспользуемся теоремой 3⁰ и запишем выражение (3) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1; \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases} \quad (10)$$

В форме Лапласа, понижая порядок (10) до меньшего размера B в (9), с учетом $x_2 = a_{21}(p - a_{22})^{-1}x_1 = ax_1$, где $a = a_{21}(p - a_{22})^{-1}$, получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = bu_1, \\ \dot{x}_2 = ax_1, \end{cases}$$

$$\text{где } b = \frac{b_{11}}{p - a_{11} - a_{12}a}. \quad (11)$$

Для системы (11) диаграмма на рис. 2, с учетом $B = b$, $\Phi = a$, коммутруется, и выражение для передаточной функции ОУ W_o и регулятора принимает вид

$$W_o = s_r = ab = \frac{b_{11}a_{21}}{p^2 - (a_{11} + a_{22})p + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}. \quad (12)$$

Таким образом, если при проверке управляемости линейной системы не выполняются условия теоремы 1⁰ для исходной пары (Φ, B) , то необходимо преобразовать задачу к условиям теоремы 2⁰ или 3⁰. Если такое преобразование осуществимо и получена новая пара отображений (Φ_1, B_1^*) , характеризующих ОУ и реализующих композицию $\Phi_1 B_1^*$, то эта пара полностью непосредственно управляема по входам и управляема по выходам с точностью до изоморфизма B_1^* , что влечет соответствующую управляемость объекта и в исходной форме.

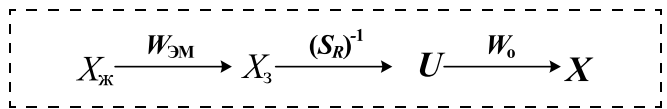


Рис. 9. "Линейный" контур для объекта с передаточной функцией W_o

Если же сразу известна передаточная функция ОУ $W_o = s_r$, то из рис. 4 и рис. 6 получаем "линейный" контур в виде, показанном на рис. 9, из которого, с учетом (12), следует, что в скалярном случае (SISO) синтез регулятора обратной связи сводится к обращению передаточной функции ОУ, т. е.

$$S_R^{-1} = W_o^{-1}. \quad (13)$$

Моделирование¹ идеального контура (рис. 9) для ОУ (1), (2), (3) с матрицами (9), регулятором (12) и ЭМ $W_{ЭМ} = k(Tp + 1)^{-1}$ при $k = 1$ и $T = 0,4$ показало, что x_2 абсолютно точно отслеживает задавае-

¹ Моделирование всех примеров выполнено к.т.н. В. В. Булгаковым.

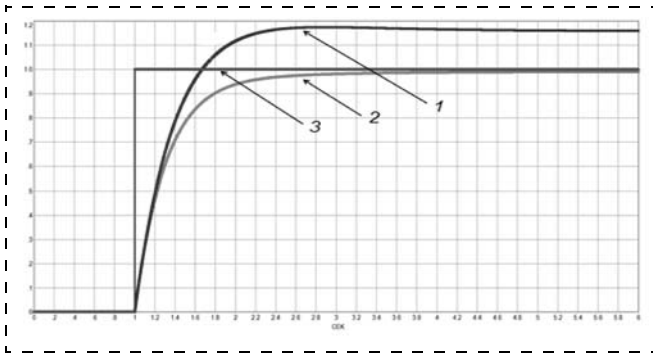


Рис. 10. Моделирование контуров управления ОУ (9), (10) при варьировании a_{ij}

мое ЭМ движение. При неточном знании элементов a_{ij} в выражении (9) в "линейном" контуре появляется ошибка отработки x_2 порядка ошибки задания a_{ij} . Так, на рис. 10 качественно отражен вид переходного процесса (график 1) при $a_{21} = 1,25$ (+25 %). Замыкание контура дополнительной ОС (см. рис. 7, 8) наделяет контур свойством робастности: на рис. 10 график 2 показывает, что при увеличении коэффициента усиления до $k = 99$ с одновременным увеличением T в $(1 + k)$ раз в соответствии с выражением (8) даже при увеличении параметра a_{21} на 25 % переходный процесс практически совпадает с процессом в идеальном контуре. Задающее воздействие показано на графике 3. По оси абсцисс отложено время, по оси ординат — амплитуда сигналов в относительных единицах. Аналогичные результаты получены и при варьировании других элементов матриц (9). Моделирование показало, что "линейный" контур обладает приемлемой и достаточно прогнозируемой робастностью, а для контура с дополнительной ОС диапазон варьирования элементов матриц (9), при условии сохранения качества переходных процессов, может составлять десятки процентов.

Пример 2. Рассматривается ОУ с передаточной функцией [2]

$$W_o = \frac{e^{-\Delta_o p}}{T_o p + 1} \frac{1}{T p + 1} \frac{g}{p^2}. \quad (14)$$

Контур управления ОУ (14) для идеального случая показан на рис. 9. Решается задача точного слежения x за заданным значением $x_{\text{зад}}$, формируемым на выходе ЭМ с передаточной функцией $W_{\text{ЭМ}}$. В этом случае

$$\begin{aligned} S_R^{-1} = W_o^{-1} &= \frac{p^2(1 + T_o p)(1 + T p)}{g e^{-\Delta_o p}} \approx \\ &\approx \frac{p^2(1 + T_o p)(1 + T p)(1 + \Delta_o p)}{g}. \end{aligned} \quad (15)$$

Результаты моделирования "линейного" (см. рис. 9) и робастного (см. рис. 7 и рис. 8) контуров с ЭМ

$$W_{\text{ЭМ}} = \frac{1}{0,4p + 1} \cdot \frac{1}{1,5p + 1}$$

(для "линейного" контура) и

$$W_{\text{ЭМ}} = \frac{1}{0,4p + 1} \cdot \frac{99}{1,5 \cdot 100p + 1}$$

(для замкнутого робастного контура)

качественно показаны на рис. 11 (см. вторую сторону обложки) для ступенчатого и синусоидального входных сигналов: графики 1 — для "линейного" контура, графики 2 — для робастного контура, графики 3 — задающие воздействия.

На рис. 12 (см. вторую сторону обложки) приведен качественный вид графиков для процессов в "линейном" контуре (график 1) и в робастном контуре (график 2), когда на вход ЭМ подавался зашумленный нормальным белым шумом синусоидальный сигнал (график 3). Амплитуда шума составляла 10 % от амплитуды полезного сигнала. Одновременно с шумом в ОУ (14) вводилось искажение параметра $T = 1,25$ с (+25 %). Видно, что качество процессов в "линейном" контуре мало отличается от качества процессов в контуре с дополнительной ОС. При этом ЭМ обеспечивает высокое качество фильтрации шумов. Таким образом, "линейный" контур даже для сложных ОУ при наличии существенных отклонений параметров от принятых в модели и при наличии шумов является достаточно робастным и в определенном смысле "предельным" по достижимому качеству переходных процессов. Очевидно, что дополнительная ОС необходима лишь в случае значительных (на десятки процентов) отклонений параметров ОУ от принятых в модели.

Сравнение предлагаемого метода синтеза регулятора для объекта (14) с методами, приведенными в работе [2], показало преимущества рассматриваемого метода как по уровню формализации процедур синтеза и исключения эвристических приемов, так и по качеству переходных процессов и робастности контура.

Важной проблемой является выбор ЭМ, формализующих *цель управления* и полностью определяющих качество переходных процессов в контурах с изоморфным регулятором. В рамках рассматриваемого метода назначение ЭМ является отдельной задачей, практически не связанной с процедурой синтеза регулятора. Действительно, контур, показанный на рис. 9, может быть представлен и в ином виде (рис. 13). Здесь ЭМ $W_{\text{ЭМ}}$: $x_{\text{ж}} \rightarrow x$ в явном виде связывает x и $x_{\text{ж}}$ с точностью до изоморфизма W_o , относительно которого коммутируются все отображения внутри коммутативной диаграммы (контура управления).

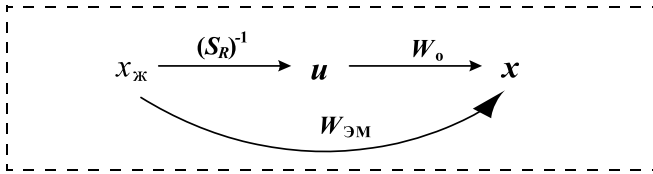


Рис. 13. Контур управления объектом (14) с ЭМ в коммутативной диаграмме

Как видно из рис. 13, в этом случае

$$W_{ЭМ} = W_0 S_R^{-1},$$

$$S_R^{-1} = W_0^{-1} W_{ЭМ} = \frac{p^2(1 + T_0 p)(1 + T p)}{g e^{-\Delta_0 p}} \cdot W_{ЭМ} \approx$$

$$\approx \frac{p^2(1 + T_0 p)(1 + T p)(1 + \Delta_0 p)}{g} \cdot W_{ЭМ}, \quad (16)$$

т. е., в отличие от (15), регулятор включает в свою структуру $W_{ЭМ}$. Тем не менее, из рис. 9 и рис. 13 и выражений (15) и (16) следует, что передаточная функция от $x_{ж}$ к x в обоих случаях равна передаточной функции $W_{ЭМ}$, т. е. контуры эквивалентны. Следует иметь в виду, что в качестве изоморфизма, относительно которого синтезируется регулятор, может использоваться не только передаточная функция объекта (см. рис. 13) или отображение B (см. рис. 3) в соответствии с условиями теорем 2⁰ и 3⁰, но и любое другое отображение-изоморфизм, входящее в коммутативную диаграмму управляемой системы, например, отображение-изоморфизм $W_{ЭМ}$ на рис. 13, характеризующее структуру изоморфной ЭМ, или отображение $I: X \rightarrow X_3$ на рис. 3, фактически являющееся ЭМ точного соответствия X заданному значению X_3 .

Смысл диаграммы, показанной на рис. 13, заключается в том, что она доказывает существование факторизации (разложения) изоморфного отображения $W_0 = W_{ЭМ} S_R$, т. е. композиции отображений S_R^{-1} и $W_{ЭМ}$, реализующей принцип суперпозиции: каждое из отображений локализует свою группу свойств контура управления, а в целом в контуре реализуются обе группы свойств. При этом для управляемого объекта такая факторизация W_0 обязательно существует (в общем случае и для нелинейных ОУ). При этом отображение-регулятор $S_R^{-1}: x_{ж} \rightarrow u$ и при любом $W_{ЭМ}$ является средством реализации и локализации свойства управляемости (каждому $x_{ж}$ однозначно ставит в соответствие требуемое управление u), а отображение $W_{ЭМ}: x_{ж} \rightarrow x$ для данного S_R^{-1} формализует и локализует цель управления — свойство обеспечения требуемого качества управления. Таким образом, S_R^{-1} и $W_{ЭМ}$ можно синтезировать независимо. Для скалярного объекта это осуществляется весьма просто. Для многосвязных систем ($m > 1$) регулятор, как пра-

вило, не единственен. Не единственна и цель управления, формализуемая в виде ЭМ. Возникает задача оптимизации, выходящая за рамки статьи. Вывод же состоит в том, что если существует средство управления в форме регулятора S_R^{-1} , то достижима любая цель управления в форме ЭМ $W_{ЭМ}$ (назначаемая с учетом ограничений на ресурсы ОУ в форме W_0).

Таким образом, ЭМ может не входить (см. рис. 3, рис. 9 и формулу (15)), либо входить (см. рис. 13 и формулу (16)) в качестве самостоятельной части в структуру синтезируемого регулятора. В обоих случаях передаточная функция "линейного" контура одна и та же и равна $W_{ЭМ}$. Хотя проблема назначения ЭМ является самостоятельной, тем не менее, при выборе ЭМ должны учитываться особенности ОУ и регулятора (например, с точки зрения его физической реализуемости в совокупности с ЭМ). В целом проблема синтеза ЭМ является нетривиальной и "внешней" по отношению к синтезу изоморфных регуляторов, как и вообще "внешней" является цель по отношению к разрабатываемой системе [10]. Главное, чтобы цель была достижимой и реализуемой при ограничениях на ресурсы ОУ. Методы решения проблемы синтеза ЭМ интенсивно развиваются. Выбор ЭМ может быть осуществлен, например, по инженерным критериям качества, а также по методикам, рассмотренным в работах [2, 4, 9, 11] и в других работах. В данной статье упор делался на рассмотрение методики синтеза изоморфных регуляторов и демонстрацию их работоспособности, а в качестве ЭМ выбирались простые передаточные функции, назначаемые по инженерным критериям качества. Полученные результаты имеют важное значение для практики с учетом высокой актуальности решения задач синтеза линейных регуляторов для промышленных систем [2, 4, 9, 11–15].

Заключение

Рассмотрены метод и правила синтеза изоморфных регуляторов на основе теории [1]. Показано, что изоморфные регуляторы являются простыми мультипликативными, а процедура их синтеза для ОУ с одним входом и одним выходом максимально формализована и сводится к обращению передаточной функции ОУ. При этом требуемое качество переходных процессов полностью определяется и обеспечивается выбором ЭМ. В этом смысле изоморфные регуляторы обладают свойством "предельности" по уровню достижимого качества переходных процессов: задача синтеза декомпозируется в соответствии с принципом суперпозиции — обеспечение управляемости ОУ локализуется в регуляторе, а обеспечение требуемого качества управления — в ЭМ. Соответственно, регулятор и ЭМ можно синтезировать независимо, но с учетом структуры ОУ.

Приведенные примеры подтверждают указанные свойства изоморфных регуляторов и их робастность в отношении значительных параметрических и шумовых возмущений в структуре ОУ и в контурах управления.

К выявленным преимуществам изоморфных регуляторов относятся:

- простая формализованная процедура синтеза для линейных ОУ и, особенно, для систем класса SISO, исключающая применение эвристических приемов;
- локализация всех требований к качеству управления в ЭМ;
- обеспечение предельно достижимого (формализуемого в виде ЭМ) качества управления не только в задачах стабилизации, но и в задачах слежения за заранее неизвестными задающими воздействиями (при условии адекватности модели управляемому объекту);
- отсутствие необходимости измерения управляемой координаты и высокая предсказуемость ее значений по задающему воздействию при условии адекватности модели ОУ;
- простой контроль соответствия параметров модели, заложенной в структуру регулятора, реальным параметрам ОУ по принципу "канал—модель" путем сравнения выхода ЭМ с выходом "канала", т. е. с измерениями управляемой координаты (при ее доступности для измерений);
- высокая надежность и предсказуемость результатов управления непосредственно не измеряемыми координатами объекта (при условии адекватности модели ОУ);
- приемлемая и предсказуемая робастность простого "линейного" контура с изоморфным регулятором при малом отличии параметров модели, заложенной в его структуру, от реальных параметров ОУ;
- достаточно простая (например, путем охвата "линейного" контура ОС с большим коэффициентом усиления) реализация робастного контура с требуемым качеством управления в случае существенного отличия параметров модели, заложенной в структуру регулятора, от реальных параметров ОУ;
- требование физической реализуемости изоморфного регулятора существенно смягчается за счет выбора ЭМ, исключающей использование производных высоких порядков. Если же они необходимы, то могут быть сформированы в результате обработки достаточно гладких сигналов, формируемых на выходе ЭМ, а не путем дифференцирования зашумленных сигналов, поступающих с выходов ОУ;
- возможность существенного сглаживания и фильтрации шумов в задающем воздействии посредством ЭМ.

К недостаткам, на наш взгляд, относятся:

- достаточно высокая сложность формализованного синтеза изоморфных регуляторов и выбора ЭМ для многосвязных систем;
- относительно низкий уровень унификации структур изоморфных регуляторов в сравнении, например, с ПИД регуляторами в силу уникальности передаточных функций ОУ (отчасти компенсируемый отсутствием необходимости подбора структур и параметров регулятора). Вместе с тем, для многих классов ОУ, имеющих типовые передаточные функции, структура изоморфных регуляторов и ЭМ может быть унифицирована.

Список литературы

1. Кулабухов В. С. Принцип изоморфности в задаче реализации и его приложения к анализу свойств систем управления // В сборнике: XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. 2014. С. 438—448. URL: <http://vspu2014.ipu.ru/prcdngs>
2. Булгаков В. В., Кулабухов В. С. Сравнительный анализ формализованных методов синтеза регулятора для следящей системы // Приборы. 2013. № 1 (151). С. 39—44.
3. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987.
4. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Синтез следящих систем на основе аппарата линейно-квадратичной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 12. С. 795—800.
5. Мееров М. В. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М.: Наука, 1967. 424 с.
6. Гайдук А. Р. Синтез систем управления при слабо обусловленной полноте объектов // Изв. РАН Автоматика и телемеханика. 1997. № 4. С. 133—144
7. Тютиков В. В., Вершинин И. В., Соколов А. Б. Метод больших коэффициентов при синтезе параметрически грубых систем модального управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 12. С. 801—808.
8. Буков В. Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Издательство научной литературы Н. Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.
9. Ким Д. П. Алгебраический метод синтеза линейных непрерывных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 9—15.
10. Кулабухов В. С. Федеративно-интегрированная распределенная модульная авионика // Авиакосмическое приборостроение. 2015. № 12. С. 11—31.
11. Синтез законов управления в технических системах: Учеб. пособие. Ч. I. Инженерные методы синтеза законов управления в технических системах по эталонным математическим моделям / Нейдорф Р. А., Иванов Б. А., Обухов П. С. и др.; Под общ. ред. Р. А. Нейдорфа, З. Х. Ягубова. Ухта: УГТУ, 2000. 168 с. URL: http://lib.ugtu.net/sites/default/files/books/2000/sintez_zakonov_upravleniya_v_tekhnicheskikh_sistemah_2000.pdf
12. Younkin G. W. Industrial Servo Control Systems: Fundamentals and Applikations. Marcel Dekker. NY, 2003.
13. Nakamura M., Goto S., Kyura N. Mechatronic Servo System Control: Problems in Industries and their Theoretical Solutions. Spriger-Verlag. NY, 2004.
14. Bhattacharyya S. P., Datta A., Keel L. H. Linear Control Theory: Structure, Robustness, and Optimization. CRC Press LLC. NY, 2009.
15. Feuer A., Morse A. S. Adaptive control of single-input, single-output linear systems // IEEE Trans. On Automat. Control. 1978. V. AC-23. N. 4. P. 557—569.

Synthesis of Controllers for the Servo Systems on the Basis of the Isomorphism Principle

V. S. Kulabukhov, nit@mnpk.ru✉, kws0704@mail.ru,
AVIONICA Co., 127055, Moscow, Russian Federation

Corresponding author: **Kulabukhov Vladimir S.**, Chief Designer,
AVIONICA Co., Moscow, 127055, Russian Federation, nit@mnpk.ru

Received on February 02, 2017

Accepted on March 06, 2017

The aim of the research is to develop a practically implementable formalized method for synthesis of controllers for the general form systems based on the common isomorphism principle formerly offered in the theory of the systems. The research results are rigorous substantiation of the new type controllers structure — isomorphic controllers — and the formalized procedure of their synthesis. It was demonstrated that a feedback in the form of isomorphic controller is necessary and sufficient for controllability of the system in contrast to the well-known methods, first postulated the necessity of a feedback and then offered application of the procedure for controller synthesis. The feasibility of presenting a model (transfer function) of an object as a combination of an isomorphic controller and a reference model was proved, which allowed to localize the ensuring of controllability in the controller, which represents a controlling mean, and the required quality of the transient processes — in the reference model realizing a control objective. Such a localization provides a possibility to obtain extremely high quality of the transient processes in the control loop. The use of a mathematical apparatus of the modern algebra based on morphisms has provided significantly high level of generality of the proven statements about the general form systems and linear systems controllability. The advantages of isomorphic controllers, reference models and the high gains method combination for the linear systems were shown. Such a combination ensures a high control quality as well as increase of the loop robustness in respect of the parametric disturbances and noise impact. Application examples of the isomorphic controller synthesis for the linear systems, which demonstrated their features, are provided. The advantages of the isomorphic controllers were substantiated and generalized.

Keywords: isomorphism principle, system, control object, controllability, controller, feedback, reference model

For citation:

Kulabukhov V. S. Synthesis of Controllers for the Servo Systems on the Basis of the Isomorphism Principle, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 8, p. 507—515.

DOI: 10.17587/mau.18.507-515

References

1. **Kulabukhov V. S.** Princip izomorfnosti v zadache realizacii i ego prilozhenija k analizu svojstv sistem upravlenija (Isomorphic principle in the problem of implementation and its application to the analysis of the properties of control systems), *XII Vserossijskoe soveshhanie po problemam upravlenija VSPU-2014*, Institut problem upravlenija im. V. A. Trapeznikova RAN (In the book: *XII All-Russian Conference on Control VSPU 2014.*), 2014, pp. 438—448, available at <http://vspu2014.ipu.ru/prcdngs> (in Russian).
2. **Bulgakov V. V., Kulabukhov V. S.** Sravnitel'nyj analiz formalizovannyh metodov sinteza reguljatora dlja sledjashhej sistemy (Comparative analysis of the formal control synthesis methods for the tracking system), *Pribory*, 2013, no. 1 (151), pp. 39—44 (in Russian).
3. **Krasovskiy A. A.** *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravlenija* (Handbook of automatic control theory), Moscow, Nauka, 1987, 712 p. (in Russian).
4. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Sintez sledjashhih sistem na osnove apparata linejno-kvadrachnoy optimizacii (Follow up system synthesis based on a system of linear-quadratic optimization), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 12, pp. 795—800 (in Russian).
5. **Meerov M. V.** *Sintez struktur sistem avtomaticheskogo regulirovaniya vysokoj tochnosti* (Synthesis of structures of automatic control systems of high accuracy), Moscow, Nauka, 1967, 424 p. (in Russian).
6. **Gajduk A. R.** Sintez sistem upravlenija pri slabo obuslovennoj polnote obektov (Synthesis of control systems with weak due to the completeness of objects), *Avtomatika i Telemekhanika*, 1997, no. 4, pp. 133—144 (in Russian).
7. **Tjutikov V. V., Vershinin I. V., Sokolov A. B.** Metod bol'shih koeficientov pri sinteze parametricheski grubyh sistem modal'nogo upravlenija (Method for the synthesis of large coefficients parametrically rough modal control systems.), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 12, pp. 801—808 (in Russian).
8. **Bukov V. N.** *Vlozhenie sistem. Analiticheskij podhod k analizu i sintezu matrichnyh sistem* (Attachment systems. Analytical approach to the analysis and synthesis of matrix systems), Kaluga, Izdatel'stvo nauchnoj literatury N. F. Bochkarevoj, 2006, 720 p. (in Russian).
9. **Kim D. P.** Algebraicheskij metod sinteza linejnyh nepreryvnyh sistem upravlenija (Algebraic approach for the synthesis of linear continuous control systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2011, no. 1, pp. 9—15 (in Russian).
10. **Kulabukhov V. S.** Federativno-integrirovannaja raspredeljonnaja modul'naja avionika (Federated distributed integrated modular avionics), *Aviakosmicheskoe Priborostroenie*, 2015, no. 12, pp. 11—31 (in Russian).
11. **Nejdorf R. A., Ivanov B. A., Obuhov P. S., Jagubov Z. H.** i dr. *Sintez zakonov upravlenija v tehniceskix sistemah: Ucheb. posobie. Ch.1. Inzhenernye metody sinteza zakonov upravlenija v tehniceskix sistemah po jetalonnym matematicheskim modeljam* (Synthesis of control laws in technical systems: Educational aid. Part 1. Engineering methods for the synthesis of control laws in technical systems by reference to mathematical models), Uhta, UGTU, 2000, 168 p., available at http://lib.ugtu.net/sites/default/files/books/2000/sintez_zakonov_upravlenija_v_tehniceskix_sistemah_2000.pdf (in Russian).
12. **Younkin G. W.** *Industrial Servo Control Systems: Fundamentals and Applications*. Marcel Dekker. NY, 2003.
13. **Nakamura M., Goto S., Kyura N.** *Mechatronic Servo System Control: Problems in Industries and their Theoretical Solutions*. Springer-Verlag. NY, 2004.
14. **Bhattacharyya S. P., Datta A., Keel L. H.** *Linear Control Theory: Structure, Robustness, and Optimization*. CRC Press LLC. NY, 2009.
15. **Feuer A., Morse A. S.** Adaptive control of single-input, single-output linear systems, *IEEE Trans. On Automat. Control*, 1978, vol. AC-23, no. 4, pp. 557—569.