

В. Ф. Петрицев, д-р техн. наук, вед. научн. сотр., mail@samspace.ru,
АО "Ракетно-космический центр "Прогресс", г. Самара

Энергосберегающий алгоритм управления переориентацией космического аппарата по зашумленным измерениям

Разработан оптимальный по энергозатратам алгоритм дискретного управления переориентацией космического аппарата из произвольного начального в заданное конечное положение по зашумленным измерениям. Приведены результаты математического моделирования разработанного алгоритма на примере космического аппарата "Ресурс-П", управляемого с использованием инерциальных исполнительных органов (гиросинов). Результаты моделирования подтвердили эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: алгоритм, гироскоп, динамика, качество, ковариация, момент, прецессия, система, состояние, управление

Введение

Задача периодической смены ориентации (переориентации) космического аппарата (КА) ставится практически перед каждым КА. Но наиболее динамичным является КА дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ). Он реализует большую номенклатуру поворотов, в том числе: из произвольного положения при наблюдении поверхности Земли в положение, при котором нормаль к плоскости фоточувствительных элементов солнечных батарей направлена на Солнце для обеспечения подзаряда буферных батарей бортовой системы электропитания, и обратно; повороты оси маршевого двигателя в целях выдачи импульса поддержания заданных параметров рабочей орбиты, и обратно. Но наибольшее число поворотов КА ДЗЗ связано с необходимостью динамичного перенацеливания оптической оси бортового оптико-электронного комплекса для проведения съемки заданных участков поверхности Земли.

Традиционно задача переориентации КА связывается с задачей построения оптимальной программы управления, обеспечивающей перевод КА из одного заданного углового положения в другое заданное положение за заданное время и при заданном показателе качества. Решению этой задачи посвящено большое число работ. Одной из первых является работа [1]. В ней и в последующих работах задача решалась преимущественно с использованием принципа максимума Л. С. Понтрягина. Большинство решений соответствует вращению КА относительно неподвижной оси (оси Эйлера). Достаточно полная библиография работ по данной проблеме приведена в работе [2]. В ней отмечено, что *"наиболее детально задача оптимального управления угловым движением КА решена лишь для двух частных случаев — плоских вращений КА вокруг одной из главных центральных осей инерции и простран-*

венного вращения сферически симметричного КА. Вопросы создания эффективных режимов и алгоритмов управления ориентацией КА остаются актуальными и сегодня".

Примером применения полученных решений является алгоритм управления переориентацией КА "Ресурс-П" [3]. В целом алгоритм реализует программное вращение относительно оси Эйлера. Весь заданный интервал поворота состоит из трех участков: "разгона", движения с постоянной угловой скоростью и "торможения". Участки "разгона" и "торможения", в свою очередь, разбиты каждый на три промежутка. В первом из них движение совершается с линейно нарастающим (по модулю) ускорением, во втором ускорение постоянно, в третьем оно уменьшается (по модулю) до нуля. Непременным условием построения оптимальной программы управления угловым движением КА при переориентации является решение двухточечной краевой задачи.

Результаты синтеза дискретных систем управления, полученные в теории управления [4] с использованием как классического вариационного исчисления, так и принципа максимума, однозначно указывают на то, что для получения оптимальной траектории, переводящей систему из произвольного начального положения в начало координат, необходимо располагать набором некоторых дополнительных параметров, число которых равно размерности вектора состояния заданной системы. Эти параметры связаны с заданной системой и обладают определенной динамикой изменения вдоль траектории ее движения. Так, в случае применения метода синтеза на основе классического вариационного исчисления используют множители Лагранжа с сопряженными уравнениями Эйлера—Лагранжа для описания их динамики. В принципе максимума вводятся параметры сопряженной системы, динамика поведения которых описывается канониче-

скими уравнениями Гамильтона. Именно для определения этих вспомогательных параметров необходимо решать двухточечную краевую задачу.

Чтобы исключить необходимость решения двухточечной краевой задачи и построить замкнутую систему управления движением КА при переориентации в форме обратной связи, в настоящей работе поставлена и решена задача синтеза линейной по состоянию и управлению дискретной системы на основе разработанного автором и изложенного в работе [5] энергосберегающего алгоритма управления. Согласно этому алгоритму показателем качества системы выбран минимум следа ковариационной матрицы управления на каждом шаге. Необходимые вспомогательные параметры структурированы в форме вспомогательной системы. Совместно со структурой оптимального регулятора они задаются при постановке задачи. Энергосберегающий алгоритм управления оказался весьма конструктивным, поскольку заданный показатель качества системы является в то же время положительно определенной функцией Ляпунова, доставляющей системе условие асимптотической устойчивости в целом.

Проведено математическое моделирование синтезированной оптимальной замкнутой дискретной системы управления переориентацией на примере КА "Ресурс-П", в результате которого подтверждена эффективность предложенного метода. Для наглядности угловое положение КА задается углами вращения относительно связанных осей, а не кватернионами.

1. Постановка задачи оптимального управления

Пусть задана линейная по состоянию и управлению дискретная полностью управляемая система:

$$X_{i+1} = A_i X_i + B_i U_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (1.1)$$

где $X_i \in R^n$ — вектор состояния системы в n -мерном евклидовом пространстве в момент времени, соответствующий i ; $U_i \in R^r$ — вектор управлений в r -мерном евклидовом пространстве в тот же момент времени; A_i — матрица состояния системы, которая имеет размерность $n \times n$ и зависит от X_i ; B_i — матрица управлений, которая имеет размерность $n \times r$ и также зависит от X_i . Полагаем, что вектор состояния системы X_i обладает полной степенью наблюдаемости. Пусть также известно начальное состояние системы $X_0 \neq 0$.

Требуется найти регулятор, вырабатывающий последовательность управлений $U_0, U_1, U_2, \dots, U_i, U_{i+1}, \dots$, на значения которых не наложены ограничения, переводящую систему из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние (начало координат) $X = 0$ за неограниченное число шагов и при этом минимизирующую заданный ниже показатель качества системы.

Пусть в нашем распоряжении имеется линейная по состоянию и управлению система, уравнение движения которой нам также известно:

$$\xi_{i+1} = C_i \xi_i + D_i U_i, \quad (1.2)$$

где $\xi_i \in R^n$ — вектор состояния системы также принадлежит n -мерному евклидовому пространству. Матрицы C_i и D_i имеют размерности матриц A_i и B_i соответственно и в общем случае могут зависеть от ξ_i . Назовем эту систему вспомогательной. Вспомогательная система управляется тем же вектором U_i , что и заданная система. Кроме того, потребуем, чтобы начальное состояние вспомогательной системы совпадало с начальным состоянием заданной системы: $\xi_0 = X_0$.

От матрицы C_i потребуем, чтобы невозмущенное движение вспомогательной системы было асимптотически устойчиво в целом. Порядок выбора матриц C_i и D_i изложен далее.

Закон управления с обратной связью выберем в линейной форме:

$$U_{i+1} = U_i + P_{i+1}(\tilde{X}_{i+1} - \xi_{i+1}), \quad (1.3)$$

т. е. управление на текущем шаге определяется в виде алгебраической суммы управления на предыдущем шаге и взвешенной разности векторов состояния заданной и вспомогательной систем на текущем шаге. Здесь P_{i+1} — весовая матрица, оптимальным образом взвешивающая разность между векторами состояний заданной и вспомогательной систем. Вектор состояния заданной системы определяется в результате измерений:

$$\tilde{X}_i = X_i + \varepsilon_i, \quad (1.4)$$

где X_i — истинное значение вектора состояния, ε_i — вектор случайных аддитивных погрешностей измерений типа центрированного дискретного белого шума:

$$M(\varepsilon_i) = 0; \quad M(\varepsilon_i \varepsilon_i^T) = K_\varepsilon; \quad M(\varepsilon_i \varepsilon_j^T) = 0. \quad (1.5)$$

Здесь M — знак математического ожидания; T — знак операции транспонирования; K_ε — ковариационная матрица погрешностей измерений, представляющая собой постоянную диагональную матрицу, диагональные элементы которой суть дисперсии погрешностей измерений компонент вектора состояния заданной системы.

Полагаем также, что выполняются равенства

$$M(\varepsilon_i X_i^T) = 0; \quad M(\varepsilon_i \xi_i^T) = 0. \quad (1.6)$$

Определим ковариационную матрицу управления на текущем шаге управления:

$$K_{U, i+1} = M(U_{i+1} U_{i+1}^T). \quad (1.7)$$

Критерием (показателем) качества, как следует из названия алгоритма, является минимум энергозатрат на управление на каждом шаге. Определим его через след ковариационной матрицы управления (сумму квадратов ее диагональных элементов), являющийся в соответствии с выражением (1.3) функцией весовой матрицы P_{i+1} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(i) &= M(U_{i+1}^T U_{i+1}) = \\ &= \text{Tr}[K_{U,i+1}(P_{i+1})] \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\text{Tr}[\dots]$ — операция вычисления следа ковариационной матрицы управления $K_{U,i+1}$.

Идея предложенного подхода состоит в следующем. Если вспомогательная система благодаря выбору матрицы C_i движется в начало координат, то траектория движения заданной системы не будет значительно отклоняться от траектории движения вспомогательной системы благодаря весовой матрице P_{i+1} и, следовательно, также будет направлена в начало координат. При возрастании отклонения вектор управления будет возрастать и компенсировать это возросшее отклонение.

Матрица C_i определяется экспериментально путем подбора ее элементов для каждой конкретной задачи. В этой матрице заложена программа движения и его длительность. Регулярного алгоритма определения матрицы C_i пока не найдено.

Вспомогательная система играет роль ведущей системы, а заданная система — ведомой.

Таким образом, задача синтеза оптимального управления (1.3) в такой постановке сводится к отысканию оптимального выражения для весовой матрицы P_{i+1} системы.

2. Синтез оптимального управления

Оптимальное значение весовой матрицы P_{i+1} может быть найдено из необходимого условия минимума показателя качества (1.8), состоящего в том, что частная производная от следа ковариационной матрицы управления по искомой матрице P_{i+1} должна быть равна нулю:

$$\frac{\partial \text{Tr}[K_{U,i+1}(P_{i+1})]}{\partial P_{i+1}} = 0. \quad (2.1)$$

Вычислим ковариационную матрицу управления. Умножая текущий вектор управления U_{i+1} (1.3) в соответствии с (1.7) справа на его транспонированное значение с использованием выражений (1.1) и (1.2) и определив математическое ожидание, получим

$$\begin{aligned} K_{U,i+1} &= P_{i+1} A_i K_{X,i} A_i^T P_{i+1}^T + \\ &+ P_{i+1} C_i K_{\xi,i} C_i^T P_{i+1}^T + [P_{i+1}(B_i - D_i) + E] \times \\ &\times K_{U,i} [E + (B_i - D_i)^T P_{i+1}^T] + P_{i+1} K_{\varepsilon} P_{i+1}^T, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где E — единичная матрица; $K_{U,i}$ — значение ковариационной матрицы управления на предыдущем шаге. Выражение (2.2) получено в предположении, что все взаимно ковариационные матрицы векторов состояния и управления равны нулю:

$$M(X_i \xi_i^T) = 0; M(X_i U_i^T) = 0; M(\xi_i U_i^T) = 0.$$

Строго говоря, эти матрицы отличны от нулевых матриц, поэтому в результате такого синтеза может быть получено субоптимальное (приближенно оптимальное) решение. Однако, поскольку всякое оптимальное решение по определению есть приближенное решение (хотя бы в силу приближенности моделей движения) и введенные предположения лишь несколько увеличивают возможную погрешность оптимального решения, мы сохраним за полученным решением термин "оптимальное".

Полагаем также, что на основании весовой матрицы управления и ковариационной матрицы погрешностей измерений K_{ε} могут быть рассчитаны или заданы ковариационные матрицы состояний заданной и вспомогательной систем:

$$K_{X,i} = M(X_i X_i^T), K_{\xi,i} = M(\xi_i \xi_i^T). \quad (2.3)$$

Воспользовавшись правилами [6] дифференцирования следа матрицы по матрице, с использованием соотношения (2.2) получаем выражение для оптимальной весовой матрицы P_{i+1} :

$$\begin{aligned} P_{i+1} &= -K_{U,i} (B_i - D_i)^T [A_i K_{X,i} A_i^T + C_i K_{\xi,i} C_i^T + \\ &+ (B_i - D_i) K_{U,i} (B_i - D_i)^T + K_{\varepsilon}]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь показатель степени (-1) обозначает операцию обращения матрицы.

Наконец, подставив это оптимальное выражение в соотношение (2.2), получим далее выражение для ковариационной матрицы управления, уточненное на текущем шаге с учетом полученного оптимального значения весовой матрицы на этом шаге:

$$K_{U,i+1} = [P_{i+1}(B_i - D_i) + E] K_{U,i} \quad (2.5)$$

Получением уравнений (2.4) и (2.5) исчерпывается решение задачи синтеза оптимального управления линейной по состоянию и управлению дискретной системой.

В работе [5] показано, что для выполнения необходимого условия асимптотической устойчивости в целом расширенной системы, включающей рассматриваемую и вспомогательную системы, должно выполняться условие отрицательного значения следа приращения ковариационной матрицы управления на каждом шаге:

$$\text{Tr}[\Delta r_{U,i+1}] = \text{Tr}[P_{i+1}(B_i - D_i) K_{U,i}] < 0. \quad (2.6)$$

Выполнение условия (2.6) можно контролировать в ходе самого процесса управления.

Значение начального вектора управления U_0 определяется из условий решаемой задачи. Как правило, оно выбирается равным нулю. В работе [5], посвященной задаче оптимального подъема геофизической ракеты В-2А на максимальную высоту, начальный вектор управления (тяга двигателя) должен быть достаточным для отрыва ракеты от стартового стола.

3. Уравнения невозмущенного углового движения КА "Ресурс-П"

Невозмущенное угловое движение КА как твердого тела относительно центра масс O в связанной системе координат (ССК) $Oxuz$, оси которой в общем случае не совпадают с главными центральными осями инерции, описывается динамическим уравнением Эйлера в векторной форме:

$$\frac{dK}{dt} + \omega \times K = 0, \quad (3.1)$$

где K — вектор кинетического момента КА с установленными на нем гироскопами; ω — вектор угловой скорости КА, знак \times обозначает операцию векторного произведения векторов. Вектор кинетического момента K равен сумме кинетических моментов КА и гироскопов:

$$K = K_{KA} + K_G = J\omega + \sum_{k=1}^m K_{Gk}, \quad (3.2)$$

где J — известный тензор инерции КА; K_{Gk} — вектор кинетического момента k -го гироскопа из комплекта m гироскопов. Для его производной по времени, равной управляющему моменту M_k , развиваемому k -м гироскопом, справедливо соотношение

$$\frac{dK_{Gk}}{dt} = -M_k. \quad (3.3)$$

Здесь знак "минус" учитывает тот факт, что за счет реакции опор приращение кинетического момента КА по какой-либо оси противоположно по знаку приращению проекции кинетического момента гироскопа на ту же ось, вызванному управляющим моментом гироскопа.

Значение K_{KA} кинетического момента КА определяется произведением тензора инерции J КА на вектор ω его угловой скорости. Значение момента M_k , развиваемого гироскопом, определяется параметрами гироскопа: кинетическим моментом ротора, положением его оси прецессии в ССК, угловым положением ротора относительно оси прецессии и угловой скоростью прецессии. Детализацию этих параметров оставим до рассмотрения примера.

В результате геометрического сложения векторы (3.3) дают суммарный вектор управления по связанным осям КА:

$$M = [M_1, M_2, M_3]^T. \quad (3.4)$$

Учитывая введенные обозначения, дифференциальное уравнение углового движения КА (3.1) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\omega}{dt} = -J^{-1}\omega \times K + J^{-1}M. \quad (3.5)$$

Определим вектор состояния системы, включающий углы поворота КА по крену, рысканию и тангажу относительно осей Ox , Oy , Oz ССК из исходного положения, заданного в некотором инерциальном базисе, и угловые скорости вращения КА относительно тех же осей:

$$X(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)]. \quad (3.6)$$

С использованием этого вектора угловое движение КА можно записать в форме линейного дифференциального уравнения в матричной форме:

$$\dot{X}(t) = R(X, t)X(t) + GM(t). \quad (3.7)$$

Ограничения на величину компонент управляющего вектора $M(t)$ не накладываются.

Представим матрицы $R(X, t)$ и G в явной форме. Для этого введем обозначения

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$R(X, t) = \begin{bmatrix} 0 & E \\ 0 & F \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1} \end{bmatrix};$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} & F_{46} \\ F_{54} & F_{55} & F_{56} \\ F_{64} & F_{65} & F_{66} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} m_{12}k_3 - m_{13} & k_2 - m_{11}k_3 + m_{13}k_1 & m_{11}k_2 - m_{12}k_1 \\ m_{22}k_3 - m_{23} & k_2 - m_{21}k_3 + m_{23}k_1 & m_{21}k_2 - m_{22}k_1 \\ m_{32}k_3 - m_{33} & k_2 - m_{31}k_3 + m_{33}k_1 & m_{31}k_2 - m_{32}k_1 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Проинтегрировав матричное уравнение (3.7) по известной формуле Коши на малом временном интервале $\Delta t = 0,1$ с от i до $i + 1$, получим уравнение углового движения КА в конечных разностях в рекуррентной линейной форме:

$$X_{i+1} = A_i X_i + B_i M_i. \quad (3.9)$$

Здесь матрицы A_i и B_i зависят от вектора состояния X_i и имеют вид:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \Delta t F_{44} & \Delta t F_{45} & \Delta t F_{46} \\ 0 & 0 & 0 & \Delta t F_{54} & 1 + \Delta t F_{55} & \Delta t F_{56} \\ 0 & 0 & 0 & \Delta t F_{64} & \Delta t F_{65} & 1 + \Delta t F_{66} \end{bmatrix}; \quad (3.10)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} (\Delta t^2/2)EJ^{-1} \\ [\Delta t E + (\Delta t^2/2)F]J^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Полученные соотношения использованы ниже для математического моделирования задачи оптимального управления угловым движением КА "Ресурс-П" при переориентации.

4. Синтез оптимальной энергосберегающей переориентации КА "Ресурс-П"

Проведен синтез оптимальной энергосберегающей переориентации КА ДЗЗ "Ресурс-П" из заданного начального углового положения в начало координат. Угловые скорости в начале и в конце поворота приняты нулевыми.

Тензор инерции КА "Ресурс-П" принят равным

$$J = \begin{bmatrix} 22 & 147 & 144 & 321 \\ 0 & 10 & 213 & 752 \\ 0 & 0 & 24 & 497 \end{bmatrix}.$$

Здесь размерность осевых и центробежных моментов инерции — $\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$.

В состав системы управления движением КА "Ресурс-П" входят шесть гиродинов с кинетическим моментом ротора каждого из них $250 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Комплект из шести гиродинов образует гиросистему из трех коллинеарных пар гиродинов с расположением осей прецессии каждой пары по конусу с осью вдоль оси Oy ССК и углом α полураствора конуса 30° . Параллельность осей прецессии гиродинов в каждой паре позволяет рассматривать их векторы кинетических моментов расположенными в одной плоскости, перпендикулярной оси прецессии.

Свяжем с гиродином приборную систему координат (ПСК) $Ox_{\text{П}}y_{\text{П}}z_{\text{П}}$. Ось прецессии ротора гиродина совпадает с осью $Oy_{\text{П}}$ ПСК. Положение ПСК гиродинов относительно ССК определим двумя поворотами. Первый поворот совершается вокруг оси Oy ССК на угол ψ . Для первой пары гиродинов $\psi_{1,2} = 0^\circ$, для второй пары — $\psi_{3,4} = 120^\circ$, для третьей — $\psi_{5,6} = 240^\circ$. Второй поворот совершается вокруг оси $Oz_{\text{П}}$ на угол $\alpha = 30^\circ$ для всех пар гиродинов.

Угол прецессии роторов гиродинов обозначим β . Отсчет углов β ведется при повороте ротора от оси $Ox_{\text{П}}$. Угол положителен при повороте относи-

тельно оси прецессии против часовой стрелки и отрицателен — при повороте по часовой стрелке, если смотреть с положительного направления оси $Oy_{\text{П}}$.

Примем начальные углы β поворота роторов гиродинов равными следующим значениям:

$$\beta_{10} = 315^\circ; \beta_{20} = 225^\circ; \beta_{30} = 315^\circ; \\ \beta_{40} = 225^\circ; \beta_{50} = 315^\circ; \beta_{60} = 225^\circ.$$

Принятые углы установки гиродинов и начальные углы β удобны тем, что при этом обеспечивается высокая надежность гиросилового комплекса и при синхронной раскрутке роторов гиродинов на КА не действуют возмущающие моменты.

Расчет параметров оптимальной переориентации проводится, как уже было принято выше, из условия минимизации следа ковариационной матрицы управления. Текущее значение ковариационной матрицы управления при этом имеет вид

$$K_{M, i+1} = M(M_{i+1} M_i^T).$$

Для принятой системы гиродинов зависимость компонент вектора момента, действующего на корпус k -го гиродина, от скорости прецессии $\dot{\beta}_k$ этого гиродина можно описать соотношениями

$$M_{1k} = -H(\sin\beta_k \cos\psi_k \cos\alpha + \cos\beta_k \sin\psi_k) \dot{\beta}_k; \\ M_{2k} = -H \sin\beta_k \sin\alpha \dot{\beta}_k; \\ M_{3k} = H(\sin\beta_k \sin\psi_k \cos\alpha - \cos\beta_k \cos\psi_k) \dot{\beta}_k. \quad (4.1)$$

Записывая соотношения (4.1) в сжатой форме

$$M_{1k} = S_{1k} \dot{\beta}_k; M_{2k} = S_{2k} \dot{\beta}_k; M_{3k} = S_{3k} \dot{\beta}_k$$

и вводя шестимерный вектор скоростей прецессии роторов гиродинов

$$\dot{\beta}_i = [\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dots, \dot{\beta}_6]^T, \quad (4.2)$$

суммарный вектор управляющего момента можно представить в виде матричной функции вектора скоростей прецессии

$$M_i = S_i \dot{\beta}_i. \quad (4.3)$$

Здесь

$$S_i = \begin{bmatrix} S_{11}, S_{12}, \dots, S_{16} \\ S_{21}, S_{22}, \dots, S_{26} \\ S_{31}, S_{32}, \dots, S_{36} \end{bmatrix}_i. \quad (4.4)$$

Поскольку матрица (4.4) является прямоугольной (ее размерность 3×6), одним из вариантов определения вектора скоростей прецессии (4.2), удовлетворяющим (4.3), является использование псевдообратной матрицы \tilde{S}_i [7]:

$$\dot{\beta}_i = \tilde{S}_i M_i = S_i^T (S_i S_i^T)^{-1} M_i. \quad (4.5)$$

Определенный по этой формуле вектор скоростей прецессии гиродинов в реальной системе управле-

ния должен выдаваться в качестве управляющего параметра в систему гироскопов. Система управления обеспечивает выполнение заданного значения скорости прецессии каждого гироскопа, благодаря чему создается необходимый управляющий момент (4.3).

К этому уравнению следует добавить соотношение для учета изменения угла прецессии k -го гироскопа на одном шаге расчетов

$$\beta_{k, i+1} = \beta_{k, i} + \dot{\beta}_{k, i} \Delta t.$$

Вектор скоростей прецессии роторов гироскопов (4.5) обеспечивает формирование оптимального управляющего вектора момента, определенного в результате решения задачи оптимальной переориентации.

Для проведения численных расчетов в соответствии с полученными результатами заданы следующие исходные параметры:

- начальные значения векторов состояния заданной и вспомогательной систем

$$X_0 = \xi_0 = [110^\circ; 45^\circ; 45^\circ; 0; 0; 0];$$

- значения ковариационных матриц состояния заданной и вспомогательной систем (2.3) приближенно приняты постоянными и равными диагональным матрицам с диагональными элементами 1 и $0,01 \text{ с}^{-2}$ для углов и угловых скоростей соответственно;
- значения диагональных элементов ковариационной матрицы погрешностей измерений (2.5) приняты равными $(3 \cdot 10^{-4})^2$ и $(7 \cdot 10^{-6})^2 \text{ с}^{-2}$ также для углов и угловых скоростей соответственно;
- значения диагональных элементов начальной диагональной ковариационной матрицы управления K_{M0} (1.7) размерности 3×3 приняты равными $(5 \text{ кН} \cdot \text{м})^2$.

С учетом концепции построения замкнутой системы с обратной связью, отсчет значений векторов состояния заданной и вспомогательной систем в каждый момент времени в соотношении (1.3) ведется относительно конечного углового положения КА, принимаемого за начало координат.

Матрица состояния вспомогательной системы C_i выбрана в следующем виде:

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ -f_{1i} & 0 & 0 & 1-f_{2i} & 0 & 0 \\ 0 & -f_{1i} & 0 & 0 & 1-f_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & -f_{1i} & 0 & 0 & 1-f_{2i} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Здесь

$$f_{1i} = 2,5 \cdot 10^{-5}(1 + 5 \cdot 10^{-3}i);$$

$$f_{2i} = 0,01(1 + 2,5 \cdot 10^{-4}i)$$

— функции, зависящие от номера i шага расчета. Длительность одного шага по времени Δt принята равной 0,1 с.

Что касается матрицы D_i , то полагаем, что она удовлетворяет равенству: $D_i = -B_i$.

Как показано ниже, выбранные функции достаточно эффективно обеспечивают движение вспомогательной системы в начало координат. Асимптотическая устойчивость в целом невозмущенного движения вспомогательной системы с выбранной матрицей C_i подтверждена ниже численными расчетами функции Ляпунова специального вида.

Приведенные здесь значения параметров использованы при проведении математического моделирования процесса оптимальной переориентации.

5. Результаты математического моделирования оптимальной энергосберегающей переориентации КА "Ресурс-П"

При проведении расчетов начальный вектор управления принят нулевым. На рис. 1 приведены результаты расчетов, а также графики изменения углов и угловых скоростей заданной и вспомогательной систем в функции номера i шага расчета.

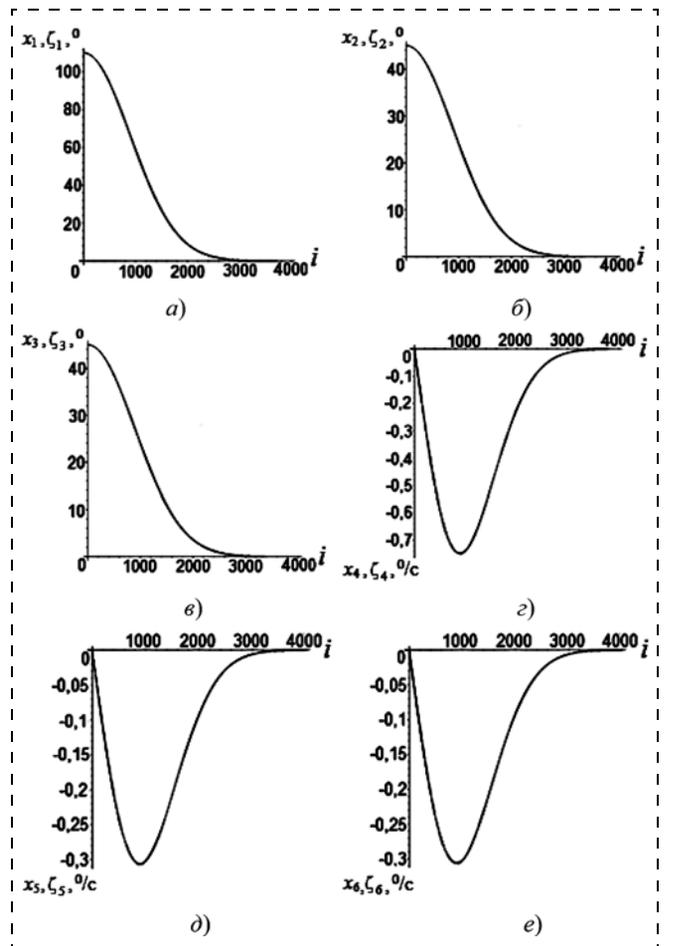


Рис. 1. Графики изменения: а — x_1 и ζ_1 ; б — x_2 и ζ_2 ; в — x_3 и ζ_3 ; г — x_4 и ζ_4 ; д — x_5 и ζ_5 ; е — x_6 и ζ_6

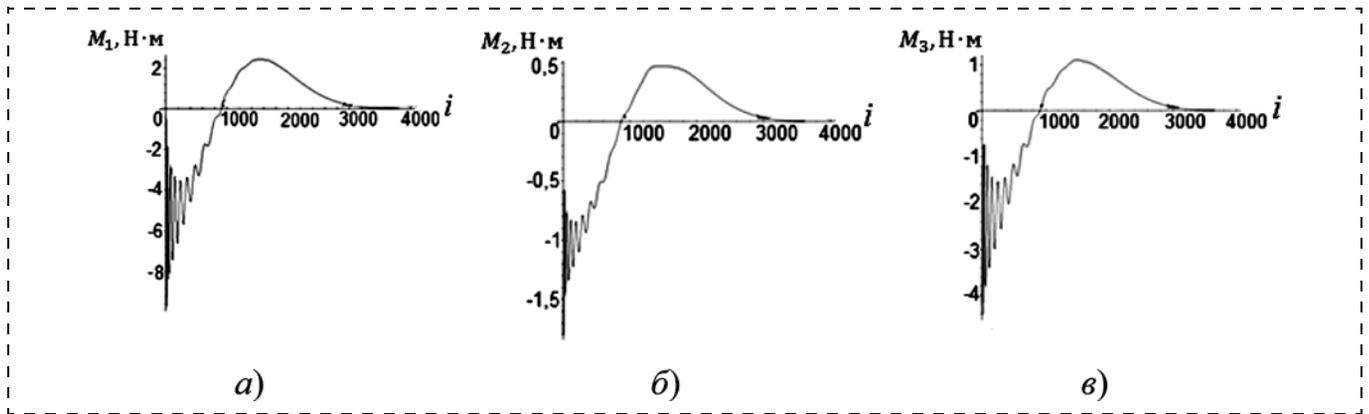


Рис. 2. Графики изменения оптимальных моментов:
a — M_1 ; *б* — M_2 ; *в* — M_3

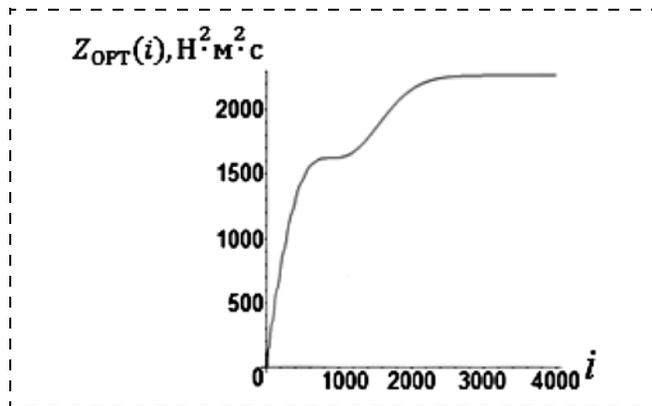


Рис. 3. График нарастания оптимального показателя качества $Z_{OPT}(i)$

Видно, что так как на момент окончания поворота погрешности по углам и по угловой скорости не должны превышать соответственно 0 , 2° и $0,02^\circ/\text{с}$, к моменту времени 300 с параметры углового движения КА соответствуют требуемым на момент окончания поворота. Отсюда следует, что длительность рассматриваемого поворота равна 300 с.

При этом движение КА достаточно точно повторяет движение вспомогательной системы, в особенности в части углов. Графики изменения соответствующих компонент векторов состояния задан-

ной и вспомогательной систем практически не отличаются друг от друга.

Графики оптимальных управляющих моментов по связанным осям КА от суммарного действия гиринов приведены на рис. 2. Обращает на себя внимание колебательный характер действия управляющих моментов на начальном этапе поворота.

Проведем оценку эффективности предложенного решения по показателю качества (1.8), использованному в процессе синтеза оптимальной системы. В соответствии с изложенным в статье методом эффективность системы определяется значением накопленного на всем временном интервале поворота показателя качества:

$$z_{OPT(N)} = \sum_{i=0}^{N-1} (M_i^T M_i \Delta t). \quad (5.1)$$

График нарастания $Z_{OPT}(i)$ в процессе оптимального поворота приведен на рис. 3. Суммарное накопленное за поворот значение показателя качества в приведенном примере составляет $2150 \text{ Н}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}$.

Для оценки эффективности предложенного оптимального метода управления при переориентации КА по сравнению с методом, реализованным на КА ДЗЗ "Ресурс-П" и названным штатным, проведено сравнение графиков управляющих моментов и значение накопленного за поворот показате-

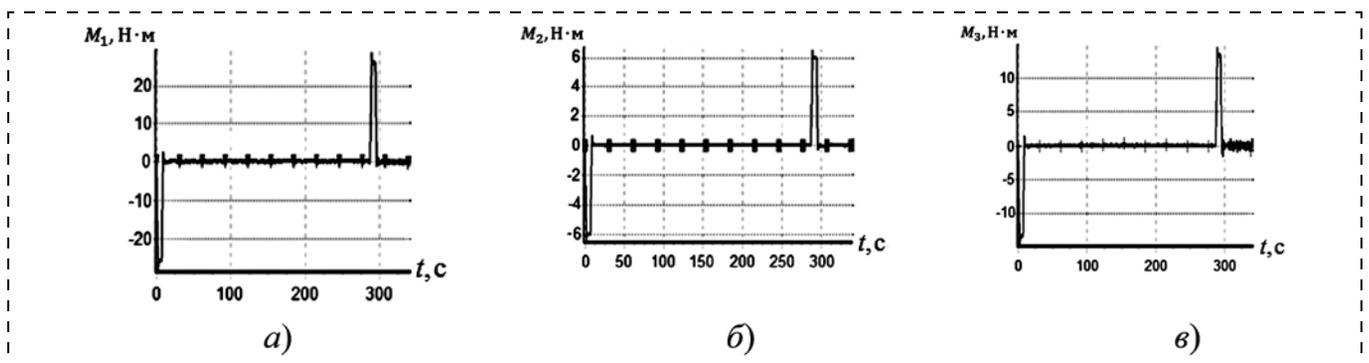


Рис. 4. Графики изменения штатных моментов:
a — M_1 ; *б* — M_2 ; *в* — M_3

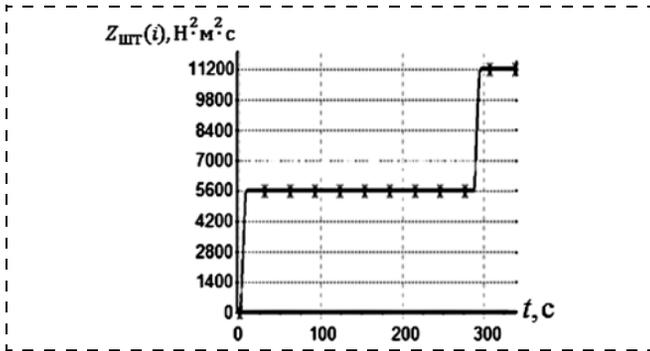


Рис. 5. График нарастания штатного показателя качества $z_{шт}(i)$

ля качества (5.1) при оптимальном управлении с соответствующими штатными графиками, приведенными на рис. 4, 5. Штатные графики получены для тех же начальных и конечных условий поворота и для заданного времени поворота 300 с. Графики подтверждают эйлеров характер штатного поворота. (Графики любезно предоставлены автору одним из разработчиков системы управления движением КА "Ресурс-П" А. А. Давыдовым.)

В соответствии с рис. 5 накопленный показатель качества за аналогичный поворот КА в штатном варианте составляет $Z_{шт} = 11\,200 \text{ Н}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}$.

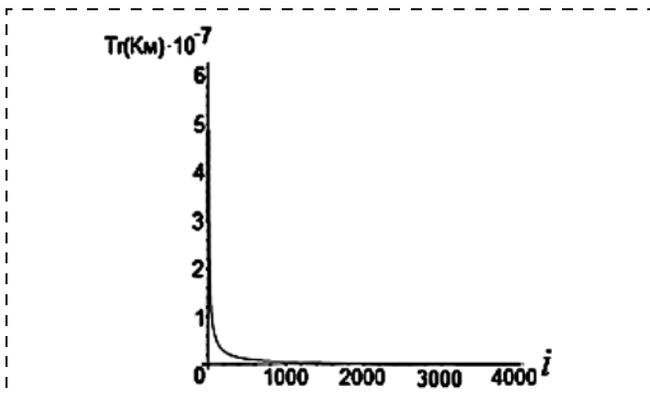


Рис. 6. График изменения следа ковариационной матрицы управления

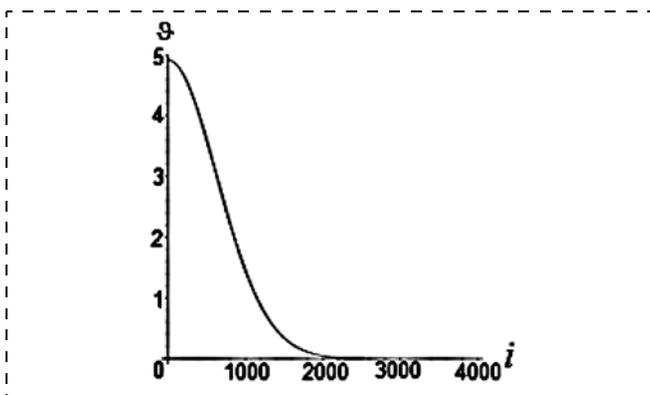


Рис. 7. График изменения функции Ляпунова ϑ

Отсюда следует, что значение накопленного показателя качества на управление КА в оптимальном варианте снижено по сравнению со штатным вариантом. Это подтверждает эффективность предложенного оптимального управления.

Вместе с тем, из сопоставления графиков (см. рис. 2) осевых управляющих моментов при оптимальном повороте с соответствующими графиками (см. рис. 4) моментов при штатном повороте, совершаемом КА "Ресурс-П" в тех же условиях, следует, что значения управляющих моментов также различаются. Следовательно, характер оптимального углового движения КА отличается от характера штатного движения (вращение вокруг оси Эйлера).

На рис. 6 представлен график изменения следа ковариационной матрицы управления (1.8) в процессе рассматриваемого оптимального поворота КА "Ресурс-П". След матрицы, в чем несложно убедиться, является функцией Ляпунова для рассматриваемой системы. График представляет собой положительную, монотонно убывающую функцию. Отсюда ясно, что необходимое условие теоремы Ляпунова — отрицательное значение приращения этой функции на каждом шаге управления — выполнено. Следовательно, асимптотическая устойчивость в целом рассматриваемой системы обеспечена.

Для подтверждения асимптотической устойчивости в целом невозмущенного движения вспомогательной системы на рис. 7 представлен полученный в результате расчетов график изменения в процессе неуправляемого движения КА следующей функции Ляпунова:

$$\vartheta_i = (C_i \xi_i)^T (C_i \xi_i).$$

На основании графика и аналогичных заключений можно утверждать, что матрица C_i обеспечивает асимптотическую устойчивость в целом невозмущенного движения вспомогательной системы.

Наличие колебательного процесса в управляющих моментах в начале поворота вызвано отличием принятых нулевых значений этих моментов от необходимых оптимальных в этом случае значений и, как следствие, стремлением системы с обратной связью найти эти оптимальные значения в процессе самого движения. В конечном итоге система вырабатывает такие управляющие моменты, при которых отклонения в состояниях заданной и вспомогательной систем в процессе дальнейшего движения являются минимальными.

Для подтверждения этого утверждения достаточно провести расчет варианта работы системы со следующими начальными управляющими моментами, отличными от нулевых: $M_{10} = -5,4 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M_{20} = -1,1 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M_{30} = -2,4 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Результаты расчета этого варианта представлены на приводимых графиках на рис. 8. Видно, что колебательный характер управляющих моментов исчез почти полностью.

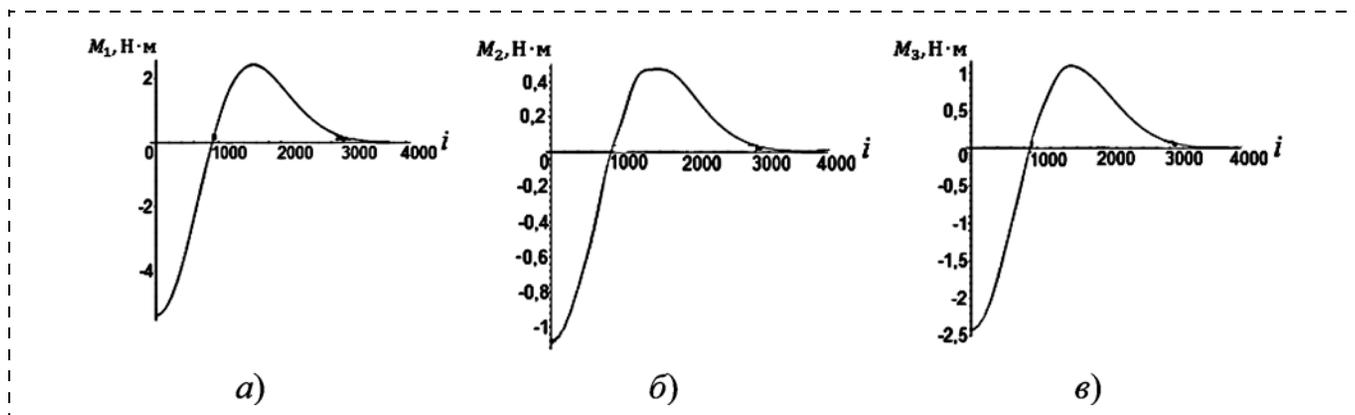


Рис. 8. Графики изменения оптимальных моментов при начальных управляющих моментах $M_{10} = -5,4 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M_{20} = -1,1 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M_{30} = -2,4 \text{ Н} \cdot \text{м}$:
 а — M_1 ; б — M_2 ; в — M_3

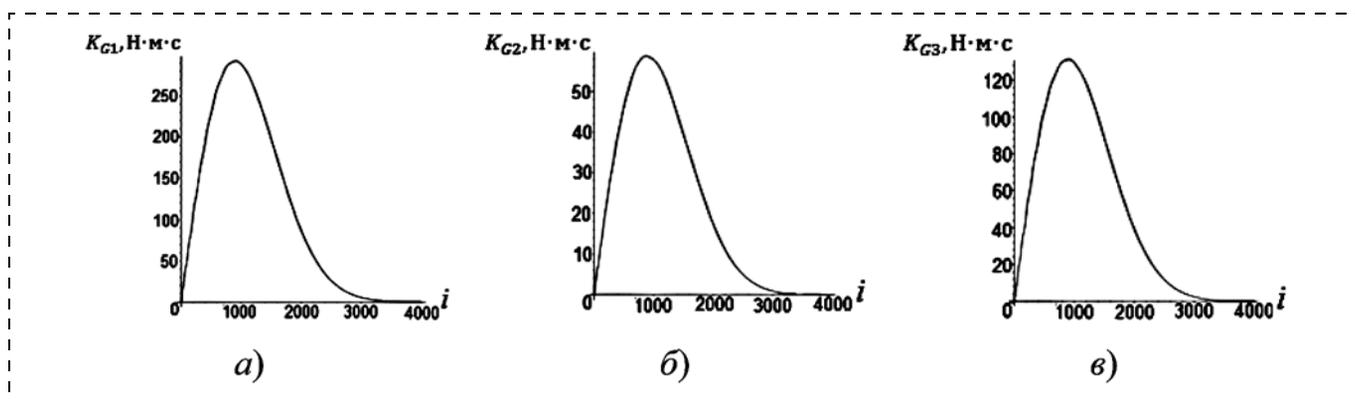


Рис. 9. Графики изменения составляющих гиринов:
 а — K_{G1} ; б — K_{G2} ; в — K_{G3}

Для подтверждения качества управления на рис. 9 приведены графики изменения в процессе поворота составляющих вектора кинетического момента системы гиринов. Из графиков следует, что по окончании поворота суммарный вектор кинетического момента гиринов возвращается после поворота к нулевому значению.

Таким образом, поставленная в статье задача решена.

Заключение

Разработан оптимальный по энергозатратам алгоритм управления линейной по состоянию и управлению дискретной системой в форме обратной связи. Алгоритм основан на применении вспомогательной системы заданной структуры с заданными свойствами, минимизации энергозатрат на каждом шаге управления и при наличии зашумленных измерений. Продолжительность процесса управления в явном виде не задана. Отсутствуют ограничения на управляющие параметры. Разработана дискретная модель невозмущенного углового движения космического аппарата, управляемого с использованием инерциальных исполнительных органов

(гиринов). Приведены результаты математического моделирования разработанного алгоритма на примере задачи пространственной переориентации космического аппарата "Ресурс-П". Результаты математического моделирования подтвердили эффективность предложенного алгоритма.

Список литературы

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
2. Левский М. В. Об одном случае оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 4. С. 115—130.
3. Юрий В. Е. Бортовые алгоритмы переориентации космических аппаратов дистанционного зондирования Земли // IV Всероссийская научно-техническая конференция "Актуальные проблемы ракетно-космической техники" (IV Козловские чтения). Матер. конф. 14—18 сентября 2015 г. Самара. Т. I. С. 418—424.
4. Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987.
5. Петрищев В. Ф. Принцип минимума управления в задаче синтеза дискретных систем // 7-я Российская мультиконференция по проблемам управления. Матер. конф. "Управление в морских и аэрокосмических системах" (УМАС-2014). 7—9 сентября 2014 г. Санкт-Петербург. С. 64—73.
6. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.

Power-Efficient Algorithm for the Spacecraft Reorientation Control by Noisy Measurements

V. F. Petrishchev, mail@samspace.ru✉,

Progress Space-Rocket Centre, Samara, Korolev Research University of Samara

Corresponding author: **Petrishchev Vladimir F.**, D. Sc. Tech., Leading Researcher of Progress Space-Rocket Centre, Samara, Professor of Department of Theoretical Mechanics, Korolev Research University of Samara, e-mail: mail@samspace.ru

Received on October 21, 2016

Accepted on November 25, 2016

Traditionally, the problem of the satellite control, its reorientation from one angular position into another, is solved, as a rule, with the use of Pontryagin maximum principle. An example of its application is the algorithm for the control reorientation of the Resurs-P satellite equipped with the inertial effectors (control momentum gyros). On the whole, the algorithm implements the programmed rotations around the Euler axis. The whole interval of the given turn consists of three phases, including "speedup", motion at a constant angular velocity and "slowdown". "Speedup" and "slowdown" phases, in their turn, are also divided into three sub-phases. At the first of them the motion goes on with acceleration, increasing linearly in the absolute terms, at the second sub-phase the acceleration is constant, and at the third one, it decreases (in absolute terms) down to zero. Solution to a two-point boundary problem is a precondition for building of the optimal program for control of a satellite's angular motion in its reorientation. In order to eliminate the necessity for solving of the two-point boundary problem and to build a closed system for the satellite motion control in its reorientation in a feedback form, the present article poses and solves the task of synthesis of a discrete system, which is linear (both in state and control) and based on the power-efficient algorithm for control by the noisy measurements, developed by the author. According to the algorithm, the spur minimum of the covariance control matrix at each step was chosen as the system's quality index. The author introduced an auxiliary dynamic system and set its parameters. The optimal closed-loop control law was chosen in a linear form — control at the current step was defined as an algebraic sum of the control at the previous step and the weighted difference of the state vectors of the specified and auxiliary systems at the current step. The measurable state vector of the set system was fully observable and comprised random measurement errors, such as a centered discrete white noise. The reorientation time was not explicitly defined. There were no limitations for the control parameters. The power-efficient control algorithm proved to be quite constructive, since the specified quality index of the system was, at the same time, a positive definite Lyapunov function, which added a condition of the asymptotic stability to the whole system. The author developed a discrete model of the undisturbed angular motion of the Resurs-P spacecraft equipped with three pairs of the control momentum gyros and mathematically modeled the power-efficient control algorithm for the spacecraft reorientation. The results of modeling confirmed the efficiency of the proposed algorithm. For simplicity reasons, the angular position of the satellite is defined by the angles of rotation around the body axes, and not by the quaternions.

Keywords: algorithm, gyroscope, dynamics, quality, covariance, moment, precession, system, state, control

For citation:

Petrishchev V. F. Power-Efficient Algorithm for the Spacecraft Reorientation Control by Noisy Measurements, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 7, pp. 474—483.

DOI: 10.17587/mau.18.474-483

References

1. **Branets V. N., Shmyglevskii, I. P.** *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* (Application of Quaternions in Problems of Solid Body Orientation), Moscow, Nauka, 1973 (in Russian).
2. **Levskii M. V.** A Special Case of Spacecraft Optimal Attitude Control, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2012, no. 4, pp. 115—130.
3. **Yurin, V. Ye.** *Bortovye algoritmy pereorientatsii kosmicheskikh apparatov distantsionnogo zondirovaniya zemli* (Onboard Algorithms of Earth Remote Sensing satellites reorientation), *Proc. of IV All-Rus-*

sian scientific and technical conference "Actual problems of rocket and space technology" (IV Kozlov readings), September 14—18, 2015, Samara, vol. I, pp. 418—424 (in Russian).

4. **Krasovskii A. A.** *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya* (Handbook on the Theory of Automatic Control), Moscow, Nauka, 1987 (in Russian).

5. **Petrishchev V. F.** *Printsip minimuma upravleniya v zadache sinteza diskretnykh sistem* (The Principle of Minimum Control in a Problem of Nonlinear Discrete System Synthesis), *7th Russian multiconference on control problems. Proc. of the 'Control in Marine and Aerospace Systems (UMAS-2014)' Conference*. September 7—9, 2014, Saint-Petersburg, pp. 64—73 (in Russian).

6. **Roytenberg Ya. N.** *Avtomaticheskoye upravlenie* (Automatic Control), Moscow, Nauka, 1978 (in Russian)

7. **Gantmakher F. R.** *Teoria matrits* (The Theory of Matrices), Moscow, Nauka, 1966 (in Russian)