УДК 531.3, 629 DOI: 10.17587/mau.18.435-446

Ю. Н. Челноков, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. лаб., ChelnokovYuN@gmail.com,
Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов

Теория кинематического управления движением твердого тела

Представлен обзор работ по теории кинематического управления вращательным движением твердого тела и пространственным движением свободного твердого тела. Теория основана на использовании кватернионных и бикватернионных кинематических моделей движения твердого тела. Также приводится обзор работ, посвященных построению оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела, сообщение которого твердому телу обеспечивает его оптимальный перевод из произвольного начального углового положения в требуемое конечное угловое положение.

Ключевые слова: *кинематическое управление, твердое тело, вращательное (угловое) движение, поступательное (траекторное) движение, кватернион, бикватернион*

Введение

В механике материальной точки и твердого тела существуют геометрические задачи (включающие рассмотрение различных способов задания и описания геометрии положения и движения тела, различных способов перепроектирования векторов и винтов из одних систем координат в другие, а также теорию сложения конечных поворотов и перемещений твердого тела), кинематические и динамические задачи.

Аналогично, в теории управления движением материальной точки и твердого тела существуют геометрические задачи (к ним может быть отнесена, в частности, знаменитая задача о брахистохроне (И. Бернулли, 1696 г.), положившая начало вариационному исчислению, задачи построения с геометрических точек зрения требуемых (желаемых) траекторий движения), а также кинематические и динамические задачи управления движением.

В кинематических задачах управления движением твердого тела в качестве математических моделей движения тела рассматриваются кинематические уравнения вращательного (углового) и (или) поступательного (траекторного) движения тела, а в качестве управлений — векторы угловой и (или) поступательной скоростей тела или кинематические винты.

Цель кинематического управления — перевод твердого тела (или той или иной выбранной системы координат) из его (ее) заданного начального положения (углового положения в случае рассмотрения углового (вращательного) перемещения или углового и линейного положения в случае рассмотрения общего пространственного перемещения) в требуемое конечное положение за счет сообщения телу (выбранной системе координат) требуемой угловой скорости или требуемых угловой и линейной скоростей. Такая задача решается в классе задач построения программных (в частности, оптимальных) траекторий движения и программных управлений движением твердого тела (выбранной системы координат).

Также целью кинематического управления может быть перевод твердого тела (или выбранной системы координат) из его (ее) заданного начального положения на любую выбранную программную траекторию углового (вращательного) или общего программного пространственного движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение по программной траектории с требуемой программной угловой скоростью в случае рассмотрения углового движения или с требуемыми программными угловой и линейной скоростями в случае рассмотрения общего пространственного движения за счет сообщения телу (выбранной системе координат) требуемой стабилизирующей угловой скорости или требуемых стабилизирующих угловой и линейной скоростей. Такая задача решается в классе задач построения стабилизирующих (в частности, оптимальных стабилизирующих) траекторий движения и управлений движением твердого тела (выбранной системы координат).

При решении кинематических задач управления движением твердого тела в качестве минимизируемых (оптимизируемых) функционалов используются следующие функционалы качества:

1) время управляемого движения тела (время перевода твердого тела из его начального положения в требуемое конечное положение), т.е. решаются задачи быстродействия;

2) интеграл от суммы квадратов проекций вектора угловой скорости твердого тела (т.е. интеграл от суммы квадратов управлений) в задаче оптимального программного разворота твердого тела из заданного начального углового положения тела в требуемое конечное угловое положение при заданном или фиксированном времени разворота, которое определяется в ходе решения задачи оптимизации;

3) интеграл от суммы квадратов проекций угловой и линейной скоростей свободного твердого тела или интеграл от

суммы квадратов дуальных ортогональных проекций кинематического винта свободного твердого тела (т.е. интеграл от суммы квадратов вещественных или дуальных управлений) в задаче оптимального программного перемещения свободного твердого тела из заданного начального углового и линейного положения в требуемое конечное положение при заданном или фиксированном времени перемещения, которое определяется в ходе решения задачи оптимизации;

4) интеграл от взвешенной суммы квадратов компонент кинематического стабилизирующего винта скоростей (компонент дуального стабилизирующего управления) и суммы квадратичных отклонений параметров движения свободного твердого тела от их программных значений за бесконечное время управления (задача Н-бесконечность оптимизации) в кинематической задаче оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела;

5) интеграл от модуля вектора программной или стабилизирующей угловой скорости твердого тела (т.е. интеграл от модуля вектора программного или стабилизирующего управления) в задаче оптимального программного или стабилизирующего управления угловым движением твердого тела;

6) интеграл от модуля программного или стабилизирующего кинематического винта свободного твердого тела (т.е. интеграл от модуля программного или стабилизирующего винта управления) в задачах оптимального программного или стабилизирующего управления движением свободного твердого тела.

Кинематические задачи быстродействия имеют ясный физический смысл. Использование в качестве минимизируемых функционалов качества интеграла от суммы квадратов проекций вектора угловой скорости твердого тела и интеграла от суммы квадратов дуальных ортогональных проекций кинематического винта свободного твердого тела является естественным, так как в теории управления наиболее часто используются интегральные квадратичные функционалы качества, содержащие под знаком минимизируемого интеграла суммы квадратов управлений, а в кинематических задачах управления роль управлений играют компоненты векторов угловой и линейной скоростей твердого тела или компоненты кинематического винта свободного твердого тела.

Подчеркнем, что используемые интегральные функционалы качества имеют ясный физический смысл, поскольку управлениями в кинематических задачах управления являются основные кинематические величины (фундаментальные физические величины) — векторы угловой и линейной скоростей или кинематический винт твердого тела. Отметим также, что минимизация интегрального квадратичного функционала качества (интеграла от суммы квадратов проекций векторов угловой и линейной скоростей твердого тела или интеграла от суммы квадратов дуальных ортогональных проекций кинематического винта свободного твердого тела) имеет и другой ясный физический смысл: фактически минимизируются затраты кинетической энергии твердого тела на управление движением тела.

Кинематические задачи управления играют важную роль в теории управления движением твердого тела в силу следующих причин. Во-первых, они, в отличие от динамических задач управления, во многих случаях имеют аналитические решения, которые часто используются при построении программных траекторий и управлений движением твердого тела или движущегося объекта, рассматриваемого как твердое тело. Во-вторых, использование аналитических решений кинематических задач управления в сочетании с методом решения обратных задач динамики позволяет в ряде случаев построить эффективные законы управления движением твердого тела, учитывающие его динамику.

Отметим также, что задачи управления в кинематической постановке рассматриваются в теории дифференциальных игр, бесплатформенных инерциальных навигационных системах (БИНС), в механике космического полета, механике роботов-манипуляторов, при решении задач наведения, анимации (оживления) пространственных образов на экранах ЭВМ и в других прикладных задачах.

В данной статье дается обзор работ по теории кинематического управления вращательным (угловым) движением твердого тела и управления пространственным движением свободного твердого тела, использующей кватернионы Гамильтона и параболические бикватернионы Клиффорда для описания движения. В основе теории лежит использование кватернионных и бикватернионных кинематических моделей движения твердого тела. Также приводится обзор работ, посвященных задачам построения оптимальных законов изменения вектора кинетического момента динамически симметричного твердого тела и твердого тела с произвольным распределением масс, сообщение которого твердому телу обеспечивает его оптимальный перевод из произвольного начального углового положения в требуемое конечное угловое положение. Эти задачи занимают промежуточное положение между кинематическими и динамическими задачами управления вращательным движением твердого тела и играют важную роль в теории управления ориентацией космических аппаратов с помощью вращающихся маховиков.

Теория кинематического управления движением твердого тела имеет следующие актуальные приложения в механике космического полета, инерциальной навигации, механике роботов-манипуляторов: двухконтурное управление вращательным движением твердого тела (космического аппарата) с использованием БИНС; бесплатформенные корректируемые системы ориентации и навигации движущихся объектов; оптимальная переориентация орбиты, плоскости орбиты и коррекция угловых элементов орбиты космического аппарата посредством реактивного ускорения, ортогонального плоскости орбиты аппарата; управление движением платформенного комплекса "ТСП-Аргус" космического проекта "Марс-94"; решение обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием бикватернионной теории кинематического управления, кинематическое управление в механике роботов-манипуляторов (независимое программное управление движением по скорости).

1. Кинематические задачи управления вращательным движением твердого тела

В кватернионной постановке кинематические задачи управления вращательным движением твердого тела впервые рассматривались В. Н. Бранцем и И. П. Шмыглевским [1—3, 1972, 1973], а затем П. К. Плотниковым, А. Н. Сергеевым и Ю. Н. Челноковым [4, 1991], В. Н. Бранцем и И. П. Шмыглевским [5, 1992], А. А. Панковым и Ю. Н. Челноковым [6, 1995], А. В. Молоденковым [7, 1995], В. Г. Бирюковым и Ю. Н. Челноковым [8, 2002], В. В. Маланиным и Н. А. Стрелковой [9, 2004], Ю. Н. Челноковым [10, 2006; 11, 2011].

В работах [3, 9] изучалась задача кинематического оптимального (в смысле быстродействия) пространственного разворота твердого тела (задача построения кватерниона оптимальной программной ориентации тела и его оптимальной программной угловой скорости). В этой задаче (а также в других кинематических задачах управления вращательным движением твердого тела) роль управления играет вектор угловой скорости твердого тела. Фазовой переменной является нормированный кватернион ориентации твердого тела, на него накладываются граничные условия. Математическая модель движения имеет вид классического кватернионного кинематического уравнения вращательного (углового) движения твердого тела [3, 5, 10]:

$$2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_X; \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2 + \lambda_3\mathbf{i}_3,$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_1\mathbf{i}_1 + \dot{\lambda}_2\mathbf{i}_2 + \dot{\lambda}_3\mathbf{i}_3,$$

$$\boldsymbol{\omega}_X = \omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3.$$

В этом уравнении фазовой переменной служит классический кватернион поворота Гамильтона $\boldsymbol{\lambda}$, характеризующий ориентацию твердого тела в опорной системе координат ξ (норма этого кватерниона равна единице), компоненты λ_j (j = 0, 1, 2, 3) кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ являются параметрами Родрига—Гамильтона (Эйлера); управлением является кватернион $\boldsymbol{\omega}_X$ с нулевой скалярной частью, его компоненты ω_i — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости вращения твердого тела относительно опорной системы координат ξ на оси связанной с твердым телом системы координат X (кватернион $\boldsymbol{\omega}_X$ называется отображением вектора угловой скорости на связанный базис X); $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — векторные мнимые единицы Гамильтона; $\circ$ — символ кватернионного произведения, верхняя точка означает производную по времени t, дифференцирование выполняется в предположении неизменности величин $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$.

Кватернионное уравнение (1) эквивалентно векторным уравнениям

$$2\dot{\lambda}_0 = -\boldsymbol{\lambda}_v \cdot \boldsymbol{\omega}_X,\ 2\dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = \lambda_0\boldsymbol{\omega}_X + \boldsymbol{\lambda}_v \times \boldsymbol{\omega}_X;$$

$$\boldsymbol{\lambda}_v = \lambda_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2 + \lambda_3\mathbf{i}_3,$$

где центральная точка — символ скалярного произведения векторов, $\times$ — символ векторного произведения; $\boldsymbol{\lambda}_v$ — векторная часть кватернион $\boldsymbol{\lambda}$.

Кватернионное уравнение (1) также эквивалентно четырем скалярным дифференциальным уравнениям

$$2\dot{\lambda}_0 = -\omega_1\lambda_1 - \omega_2\lambda_2 - \omega_3\lambda_3,$$

$$2\dot{\lambda}_1 = \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3,$$

$$2\dot{\lambda}_2 = \omega_2\lambda_0 - \omega_3\lambda_1 + \omega_1\lambda_3,$$

$$2\dot{\lambda}_3 = \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2.$$

Задача кинематического оптимального пространственного разворота твердого тела для интегрального квадратичного (в отношении проекций вектора абсолютной угловой скорости твердого тела) функционала качества изучалась в работе [7].

В работах [1—6] рассматривались кинематические задачи управления ориентацией твердого тела в рамках теории нелинейной стабилизации с использованием кватернионных кинематических уравнений возмущенного углового движения твердого тела (уравнений в отклонениях) и управления (вектора угловой скорости тела), построенного по принципу нелинейной обратной связи, реализующей асимптотически устойчивую позиционную, или интегральную, или интегрально-позиционную коррекцию углового положения тела. Использованные кватернионные кинематические уравнения возмущенного углового движения твердого тела в нормированных кватернионах ориентации имеют вид [3, 4, 10]:

$$2\dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_{\kappa X} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathrm{o}}(t) =$$

$$= \boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{o}}(t) \circ \boldsymbol{\omega}_{\kappa X} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathrm{o}}(t) = \boldsymbol{\omega}_{\kappa\xi} \circ \boldsymbol{\mu} \qquad (2)$$

или

$$2\dot{\boldsymbol{\mu}}^* = \boldsymbol{\mu}^* \circ \boldsymbol{\omega}_{\kappa X} + \boldsymbol{\mu}^* \circ \overset{\mathrm{o}}{\boldsymbol{\omega}}_Z(t) - \overset{\mathrm{o}}{\boldsymbol{\omega}}_Z(t) \circ \boldsymbol{\mu}^*. \qquad (3)$$

Здесь, по-прежнему, $\boldsymbol{\lambda}$ — кватернион поворота, характеризующий ориентацию твердого тела в опорной системе координат ξ; $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{o}}(t)$ и $\overset{\mathrm{o}}{\boldsymbol{\omega}}_Z(t)$ — кватернионы, характеризующие программную ориентацию и программную угловую скорость вращения тела в опорной системе координат ξ (известные функции времени), кватернион $\overset{\mathrm{o}}{\boldsymbol{\omega}}_Z$ определен своими компонентами в программной системе координат Z; $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\mu}^*$ — кватернионы ориентации твердого тела в программной системе координат Z, определенные своими компонетами в системах координат ξ и X соответственно (кватернионы рассогласования (ошибки ориентации тела)); $\boldsymbol{\omega}_{\kappa X}$ и $\boldsymbol{\omega}_{\kappa\xi}$ — кватернионы угловой скорости коррекции углового движения тела (управления, определенные в системах координат X и ξ соответственно); верхняя черта означает сопряженный кватернион.

Кватернион рассогласования $\boldsymbol{\mu}$ может быть определен своими компонентами либо в опорном базисе ξ, либо в связанном базисе X (а следовательно, и в программном базисе Z). В первом случае

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{o}},\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathrm{o}};$$

во втором случае

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{o}} \circ \boldsymbol{\mu}^*,\ \boldsymbol{\mu}^* = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathrm{o}} \circ \boldsymbol{\lambda}.$$

Видно, что если в уравнение ошибок (2) входит (при задании угловой скорости коррекции в связанном базисе) кватернион $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{o}} = \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{o}}(t)$, характеризующий программную ориентацию твердого тела, то в уравнение ошибок (3) входит программное управление $\boldsymbol{\omega}_Z^{\mathrm{o}}(t)$ (угловая скорость программного вращения твердого тела).

В статье [4] (см. также работу [10]) рассмотрена в кватернионной кинематической постановке поставленная в работе [3] задача приведения связанной с твердым телом системы координат к опорной системе координат, вращающейся с заданной (программной) абсолютной угловой скоростью. В качестве исходных использованы кинематические уравнения углового движения твердого тела в ненормированных кватернионах, предложенные в работе [3]. Для построения корректирующего управления использованы кинематические уравнения возмущенного углового движения твердого тела в ненормированных кватернионах, а в качестве управлений — проекции абсолютной угловой скорости вращения тела на связанные с ним оси (в математической постановке задачи и в ее решении использован кватернион угловой скорости с ненулевой компонентой, т.е. не трехмерное кинематическое управление, а четырехмерное управление).

В этой статье предложены два вида коррекции (стабилизации), являющиеся кватернионными аналогами позиционной и интегральной коррекций, и композиция позиционной и интегральной коррекций. Показано, что для предлагаемых видов коррекции получаются линейные (без линеаризации) дифференциальные уравнения ошибок системы управления ориентацией и уравнения движения замкнутой системы управления. Установлено, что полученное кватернионное уравнение ошибок для кватерниона рассогласования, определенного своими компонентами в инерциальном базисе, не только линейно, но и стационарно и инвариантно относительно любого выбранного программного движения опорного базиса. Построено общее решение уравнений замкнутой системы управления движением, установлены условия асимптотической устойчивости программного движения, приведено одно из возможных решений задачи синтеза оптимальных значений коэффициентов коррекции.

В книге [5] рассмотрены различные аспекты кинематической задачи приведения связанного с твердым телом координатного базиса к опорному базису, называемому приборным базисом: общие законы кинематического управления, обеспечивающие приведение связанного базиса к неподвижному или подвижному приборному базису, и устойчивость процесса приведения. При этом рассмотрены как нелинейные законы управления, использующие информацию о компонентах кватерниона ориентации связанного базиса (точнее, информацию о скалярной и векторной частях кватерниона ориентации), так и нелинейные законы управления, использующие указанную информацию, а также интегральную информацию (интеграл от произведения некоторой скалярной функции, зависящей от скалярной части кватерниона ориентации связанного базиса, и некоторой векторной функции, зависящей от векторной части кватерниона ориентации связанного базиса). Последние законы управления названы интегральными.

В книге [5] также подробно рассмотрена задача коррекции приборного базиса по сигналам датчиков углового положения, когда прямая информация о взаимном положении связанного и приборного базисов отсутствует.

В работах [8, 10] кинематическая задача управления ориентацией твердого тела решалась в рамках теории оптимальной нелинейной стабилизации.

Подчеркнем, что использование кватернионных кинематических уравнений углового движения твердого тела позволило построить аналитические решения всех указанных кинематических задач управления вращательным движением твердого тела в нелинейных постановках.

2. Кинематические задачи управления пространственным движением свободного твердого тела

2.1. Бикватернионное кинематическое уравнение движения свободного твердого тела и кинематическая задача быстродействия. Как известно, произвольное пространственное перемещение свободного твердого тела эквивалентно винтовому перемещению (теорема Шаля). Поэтому мгновенное пространственное движение свободного твердого тела представляет собой мгновенное винтовое движение. Кинематическая задача построения оптимального в смысле быстродействия винтового перемещения свободного твердого тела из заданного начального положения в требуемое конечное в бикватернионной постановке изучалась Н. А. Стрелковой [12, 1982], В. В. Маланиным и Н. А. Стрелковой [9, 2004]. Для получения аналитического решения задачи было использовано бикватернионное кинематическое уравнение винтового движения свободного твердого тела, предложенное Ю. Н. Челноковым [13, 1980; 14, 1981] и имеющее вид

$$2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{U}_X, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i}_1 + \Lambda_2\mathbf{i}_2 + \Lambda_3\mathbf{i}_3,\ \mathbf{U}_X = U_1\mathbf{i}_1 + U_2\mathbf{i}_2 + U_3\mathbf{i}_3,$$

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \dot{\Lambda}_0 + \dot{\Lambda}_1\mathbf{i}_1 + \dot{\Lambda}_2\mathbf{i}_2 + \dot{\Lambda}_3\mathbf{i}_3.$$

Здесь бикватернионная переменная $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0$, имеющая дуальные компоненты $\Lambda_j = \lambda_j + s\lambda_j^0$

(j = 0, 1, 2, 3), описывает собой движение свободного твердого тела (т.е. винтовое движение связанной с телом системы координат X) относительно опорной системы координат ξ; $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$ — кватернионы Гамильтона, описывающие угловое (вращательное) и поступательное (траекторное) движение твердого тела в системе координат ξ; бикватернионный коэффициент $\mathbf{U}_X = \boldsymbol{\omega}_X + s\mathbf{v}_X$, имеющий дуальные компоненты $U_i = \omega_i + sv_i$ (i = 1, 2, 3), — отображение мгновенного винта скоростей $\mathbf{U} = \boldsymbol{\omega} + s\mathbf{v}$ твердого тела на оси связанной системы координат X ($\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$ — векторы мгновенной угловой и линейной скоростей твердого тела, ω_i и v_i — проекции этих векторов на оси системы координат X); s — комплексность Клиффорда, обладающая свойством $s^2 = 0$.

Отметим, что бикватернионная переменная $\boldsymbol{\Lambda}$ является параболическим бикватернионом Клиффорда, ее дуальные компоненты $\Lambda_j = \lambda_j + s\lambda_j^0$ (j = 0, 1, 2, 3) являются дуальными параметрами Родрига—Гамильтона (Эйлера), компоненты $U_i = \omega_i + sv_i$ (i = 1, 2, 3) бикватерниона $\mathbf{U}_X = \boldsymbol{\omega}_X + s\mathbf{v}_X$ являются в кинематической задаче управления пространственным движением свободного твердого тела дуальными управлениями и представляют собой композиции вещественных управлений ω_i и v_i (i = 1, 2, 3).

Отметим также, что проекции x_i и ξ_i радиуса-вектора $\mathbf{r}$, проводимого из начала опорной системы координат ξ в начало связанной системы координат X, на оси систем координат X и ξ соответственно связаны с параметрами λ_j, λ_j^0 винтового движения тела кватернионными соотношениями [13, 14, 10]

$$\mathbf{r}_X = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3 = 2\bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0;$$
$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i}_1 + \xi_2\mathbf{i}_2 + \xi_3\mathbf{i}_3 = 2\boldsymbol{\lambda}^0 \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}};$$
$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2 + \lambda_3\mathbf{i}_3;$$
$$\boldsymbol{\lambda}^0 = \lambda_0{}^0 + \lambda_1{}^0\mathbf{i}_1 + \lambda_2{}^0\mathbf{i}_2 + \lambda_3{}^0\mathbf{i}_3.$$

В них величины x_i и ξ_i характеризуют местоположение тела в опорной системе координат ξ (ξ_i — декартовые координаты тела в этой системе координат).

Бикватернионное уравнение (4) эквивалентно двум кватернионным дифференциальным уравнениям

$$2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_X,\ 2\dot{\boldsymbol{\lambda}}^0 = \boldsymbol{\lambda}^0 \circ \boldsymbol{\omega}_X + \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{v}_X;$$
$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_1\mathbf{i}_1 + \dot{\lambda}_2\mathbf{i}_2 + \dot{\lambda}_3\mathbf{i}_3;$$
$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^0 = \dot{\lambda}_0^0 + \dot{\lambda}_1^0\mathbf{i}_1 + \dot{\lambda}_2^0\mathbf{i}_2 + \dot{\lambda}_3^0\mathbf{i}_3;$$
$$\boldsymbol{\omega}_X = \omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3,\ \mathbf{v}_X = v_1\mathbf{i}_1 + v_2\mathbf{i}_2 + v_3\mathbf{i}_3,$$

в которых $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$ (с точки зрения теории управления) — кватернионные фазовые переменные, а $\boldsymbol{\omega}_X$ и $\mathbf{v}_X$ — кватернионные управления.

Использование бикватернионного уравнения (4) в теории кинематического управления движением свободного твердого тела позволяет применить мощный принцип перенесения Котельникова—Штуди [10], в соответствии с которым все результаты, полученные в задачах кинематического управления вращательным движением твердого тела с использованием кватернионного кинематического уравнения (1), могут быть формально перенесены на более общие задачи кинематического управления движением свободного твердого тела, если в кватернионных уравнениях и соотношениях, полученных при решении задач управления вращательным движением, кватернионные величины заменить на соответствующие бикватернионные величины, используемые в задачах кинематического управления движением свободного твердого тела.

2.2. Кинематическое бикватернионное логарифмическое управление движением свободного твердого тела по принципу обратной связи. Кинематическое управление движением свободного твердого тела рассматривалось с использованием дуальных кватернионов (параболических бикватернионов) Dapeng Han, Qing Wei и Zexiang Li [15, 2008]. В этой работе используется понятие логарифма кватерниона, введенное M. J. Kim, M. S. Kim и S. Y. Shin [16, 1996]: логарифм кватерниона — это трехмерный вектор, равный половинному эйлерову углу поворота, умноженному на единичный вектор эйлеровой оси конечного поворота твердого тела (т.е. это половинный классический эйлеров вектор конечного поворота твердого тела).

Отметим, что такое логарифмическое представление кватерниона поворота известно в отечественной литературе. Так, в книге Ю. Н. Челнокова [10, 2006] показывается, что четырехмерная ортогональная кватернионная матрица поворота равна матричной экспоненте от трехмерной кососимметрической матрицы, элементы которой — проекции половинного эйлерова вектора конечного поворота, а классический кватернион поворота Гамильтона равен кватернионной экспоненте от половинного эйлерова вектора конечного поворота. Отсюда непосредственно следует, что логарифм кватерниона равен половинному эйлерову вектору конечного поворота. В статье [15, 2008] приводится также логарифмическое представление дуального кватерниона (параболического бикватерниона) перемещения твердого тела в виде половинного винта конечного перемещения, соответствующего описанию Шала винтового конечного перемещения свободного твердого тела. Введенное логарифмическое представление дуального кватерниона используется Dapeng Han, Qing Wei и Zexiang Li для построения кинематического логарифмического закона управления движением свободного твердого тела по принципу обратной связи.

В статье Dapeng Han, Qing Wei и Zexiang Li [15, 2008] вводится (формулы (8), (9) статьи) как известное (без приведения ссылок или вывода) дуальное (бикватернионное) кинематическое уравнение движения свободного твердого тела в форме, использующей (в наших терминах) отображение кинематического винта твердого тела на "неподвижный" (опорный) базис. Отметим, что это уравнение было получено ранее Ю. Н. Челноковым [14, 1981] (см. также бикватернионные кинематические уравнения (6.29), (6.15) книги Ю. Н. Челнокова [10, 2006] и уравнение (3.64) книги В. Н. Бранца и И. П. Шмыглевского [5, 1992]). В статье Ю. Н. Челнокова [14, 1981] и в его книге [10, 2006] отмечается, что дуальные ортогональные проекции кинематического винта твердого тела на оси "неподвижной" (опорной) системы координат, входящие в обсуждаемое бикватернионное кинематическое уравнение, содержат не только проекции векторов угловой и линейной скоростей тела (точнее, линейной скорости точки тела, выбранной в качестве полюса) на оси опорной системы координат, но и проекции радиус-вектора выбранного полюса тела на опорные координатные оси. Это затрудняет использование такой бикватернионной формы кинематических уравнений движения свободного твердого тела (в силу их сложности). Указанного недостатка не имеет другая форма бикватернионного кинематического уравнения движения свободного твердого тела (4), также предложенная Ю. Н. Челноковым [13, 1980; 14, 1981]. В ней в качестве коэффициентов бикватернионного уравнения выступают только дуальные ортогональные проекции кинематического винта твердого тела на оси системы координат, связанной с телом, представляющие собой комплексные (в смысле Клиффорда) композиции проекций векторов угловой и линейной скоростей тела на связанные с ним координатные оси. Именно такое бикватернионное кинематическое уравнение движения свободного твердого тела было использовано Н. А. Стрелковой и В. В. Маланиным [12, 1982; 9, 2004] при решении кинематической задачи оптимального в смысле быстродействия винтового перемещения свободного твердого тела из заданного начального положения в требуемое конечное положение. В случае, когда необходимо знание проекций найденного оптимального винта скоростей твердого тела не на связанные с телом координатные оси, а на оси "неподвижной" (опорной) системы координат (как, например, в задачах робототехники), необходимо воспользоваться операцией перепроектирования дуальных ортогональных проекций кинематического винта из связанной системы координат в опорную.

В статье Dapeng Han, Qing Wei и Zexiang Li [15, 2008] предложен кинематический бикватернионный стабилизирующий закон управления движением свободного твердого тела, имеющий вид логарифмической обратной связи. Кинематический винт свободного твердого тела, определенный своими дуальными ортогональными проекциями в "неподвижной" (основной) системе координат, предлагается формировать по принципу отрицательной обратной связи в виде логарифма дуального кватерниона, характеризующего положение тела в пространстве, умноженного на отрицательный коэффициент пропорциональности (коэффициент усиления обратной связи). С помощью функций Ляпунова доказывается, что такое управление гарантирует стабилизацию (асимптотическую устойчивость) любого первоначального положения твердого тела. В статье также приводится бикватернионное логарифмическое стабилизирующее управление программным (рекомендованным) движением при наличии программного и стабилизирующего управлений, предназначенное для вывода тела на рекомендованную траекторию из произвольного начального положения и отслеживания рекомендованной траектории движения тела, а также приводятся примеры управления плоским движением твердого тела (омниробота). Отметим, однако, что в статье нет строгой постановки задач кинематического управления движением твердого тела и нет рекомендаций по выбору коэффициентов усиления предлагаемых логарифмических отрицательных обратных связей, обоснованный выбор которых осложняется нелинейностью дифференциальных уравнений движения свободного твердого тела, замкнутых законами управления, построенными в виде логарифмической обратной связи.

Работы тех же авторов Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li, Weimeng Sun [17, 2008] и Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li [18, 2008] также посвящены решению кинематических задач управления движением механических систем и свободного твердого тела с использованием дуальных кватернионов и законов управления, построенных с использованием отрицательной бикватернионной логарифмической обратной связи.

В недавней работе E. Ozgur, Y. Mezouar [19, 2016] рассмотрено управление движением руки робота с использованием дуальных кватернионов и кинематического бикватернионного стабилизирующего закона управления, предложенного Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li [15, 2008] и имеющего вид отрицательной бикватернионной логарифмической обратной связи.

2.3. Построение стабилизирующих бикватернионных законов управления движением свободного твердого тела. В работе Ю. Н. Челнокова [20, 2013] рассматривается задача построения с использованием принципа обратной связи кинематического винта скоростей, сообщение которого свободному твердому телу обеспечивает его асимптотически устойчивый перевод из произвольного начального положения на любую выбранную программную траекторию винтового движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение по этой траектории с заданным (программным) кинематическим винтом скоростей. Изучаемая в работе [20] задача относится к классу кинематических задач управления движением твердого тела и является обобщением исследованной в работах [4, 6, 10] задачи построения вектора угловой скорости, сообщение которого твердому телу обеспечивает его асимптотически устойчивый перевод из произвольного начального углового положения на произвольно выбранную программную траекторию углового движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение по этой траектории с заданной (программной) угловой скоростью. В изучаемой кинематической задаче управления движением свободного твердого тела роль управления играет кинематический винт твердого тела, фазовой переменной является нормированный или ненормированный бикватернион конечного перемещения твердого тела, исходная математическая модель движения имеет вид бикватернионного кинематического уравнения движения свободного твердого тела (4) [13, 1980; 14, 1981].

В статье [20] приводится решение задачи в двух постановках: с использованием бикватернионных кинематических уравнений движения в нормированных и ненормированных бикватернионных переменных. При этом в первом случае в качестве управления выступает трехмерный винт управления (точнее, бикватернион кинематического винта с нулевой скалярной частью), а во-втором — четырехмерный бикватернион управления с ненулевой дуальной скалярной частью, которая отвечает за изменение нормы бикватерниона конечного перемещения твердого тела (точнее, отвечает за управление нормой этого бикватерниона). Показывается, что использование ненормированных бикватернионных переменных позволяет построить регулярные законы управления, не содержащие особых точек, в то время как использование нормированных бикватернионных переменных приводит к законам управления, содержащим особые точки, в которых эйлеров угол поворота тела равен π или 2π радиан.

Основное внимание в работе [20] уделяется задаче построения стабилизирующего (корректирующего) управления. Стабилизирующее управление формируется по принципу обратной связи в виде нелинейной бикватернионной функции компонент бикватерниона ошибки по местоположению твердого тела (угловому и линейному) так, чтобы нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного движения свободного твердого тела, замкнутые построенными законами управления, принимали эталонный вид, инвариантный относительно любого выбранного программного движения — вид дуальных линейных стационарных дифференциальных уравнений первого или второго порядка относительно бикватернионной переменной, характеризующей конечную ошибку по местоположению твердого тела. Постоянные коэффициенты (скалярные, матричные, бикватернионные) этих (эталонных) уравнений имеют смысл коэффициентов усиления нелинейных обратных связей по местоположению тела, реализуемых системой управления движением твердого тела, а сами уравнения описывают эталонную динамику переходных процессов. Это позволяет аналитически точно определять коэффициенты усиления нелинейных обратных связей исходя из желаемых качественных и количественных характеристик переходного процесса.

Центральную роль в теории, построенной в работе [20], играют нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного движения свободного твердого тела в нормированных и ненормированных бикватернионных переменных. Использование бикватернионов конечных перемещений позволяет получить компактные и наглядные уравнения возмущенного движения твердого тела, удобные для построения асимптотически устойчивых в большом или в целом управлений движением твердого тела. В работе [20] рассматриваются два бикватернионных способа описания ошибки по местоположению твердого тела: с помощью бикватерниона ошибки положения, определенного своими компонентами в основной (опорной) системе координат, и с помощью бикватерниона ошибки положения, определенного своими компонентами в связанной с твердым телом системе координат (с помощью собственного бикватерниона ошибки положения). Кроме этого, рассматриваются два способа формирования полного управления: 1) винтовой, когда это управление формируется в виде винтовой суммы стабилизирующего и программного управлений (кинематических винтов); 2) формальный, когда дуальные ортогональные проекции полного управления на оси связанной системы координат формируются в виде суммы дуальных ортогональных проекций программного и стабилизирующего управлений (кинематических винтов) на оси программной и связанной систем координат соответственно (т.е. на оси разных систем координат). Полученные с помощью этих способов дифференциальные уравнения возмущенного движения различаются как по форме, так и по смыслу используемых переменных, что приводит к разным законам формирования управления.

Две использованные в работе [20] компактные формы дифференциальных уравнений возмущенного движения свободного твердого тела в нормированных бикватернионных переменных, построенные в строгой нелинейной постановке, имеют, соответственно, вид

$$2\dot{\mathbf{M}} = \delta\mathbf{U}_{\xi} \circ \mathbf{M}, \tag{5}$$

$$2\dot{\mathbf{M}}^* = \mathbf{M}^* \circ \Delta\mathbf{U}_X. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{M}$ — бикватернион ошибки местоположения свободного твердого тела (бикватернион рассогласования, характеризующий отклонение действительного положения (углового и линейного) связанной с твердым телом системы координат X от ее требуемого программного положения Z), определенный своими компонентами $M_j = \mu_j + s\mu_j^0$

($j = 0, 1, 2, 3$) в опорной (основной) системе координат ξ; $\mathbf{M}^*$ — собственный бикватернион ошибки местоположения твердого тела, определенный своими компонентами $M_j^* = \mu_j^* + s\mu_j^{0*}$ ($j = 0, 1, 2, 3$) в связанном базисе X; $\delta\mathbf{U}_\xi$ и $\Delta\mathbf{U}_X$ — бикватернионные стабилизирующие управления, определенные своими дуальными компонентами $\delta U_{\xi i}$ и ΔU_i ($i = 1, 2, 3$) в опорной и связанной системах координат соответственно.

Полное управление $\mathbf{U}$ (мгновенный винт скоростей свободного твердого тела) складывается из программного $\mathbf{U}^{pr}(t)$ и стабилизирующего $\delta\mathbf{U}$ управлений и формируется с помощью бикватернионных формул

$$\mathbf{U}_X = \mathbf{U}_Z^{pr}(t) + \delta\mathbf{U}_X = (U_1^{pr}(t) + \delta U_1)\mathbf{i}_1 + (U_2^{pr}(t) + \delta U_2)\mathbf{i}_2 + (U_3^{pr}(t) + \delta U_3)\mathbf{i}_3,$$

$$\delta\mathbf{U}_X = \overline{\mathbf{\Lambda}} \circ \delta\mathbf{U}_\xi \circ \mathbf{\Lambda},\ \mathbf{\Lambda} = \mathbf{M} \circ \mathbf{N}(t), \tag{7}$$

или

$$\mathbf{U}_X = \mathbf{U}_X^{pr} + \Delta\mathbf{U}_X = \overline{\mathbf{M}}^* \circ \mathbf{U}_Z^{pr}(t) \circ \mathbf{M}^* + \Delta\mathbf{U}_X = \overline{\mathbf{M}}^* \circ (U_1^{pr}(t)\mathbf{i}_1 + U_2^{pr}(t)\mathbf{i}_2 + U_3^{pr}(t)\mathbf{i}_3) \circ \mathbf{M}^* + \Delta U_1\mathbf{i}_1 + \Delta U_2\mathbf{i}_2 + \Delta U_3\mathbf{i}_3. \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{U}_X$ — отображение мгновенного винта скоростей твердого тела $\mathbf{U}$ (полного управления) на связанный базис X; $\mathbf{U}_Z^{pr}(t)$ — отображение программного винта скоростей тела на оси программной системы координат Z (программное управление), являющееся известной функцией времени t; $\mathbf{N}(t)$ — бикватернион, характеризующий программное движение свободного твердого тела (известная функция времени); верхняя черта означает сопряженный бикватернион.

Для решения кинематической задачи стабилизирующего управления движением свободного твердого тела с использованием ненормированных бикватернионов в работе [20] в качестве исходного уравнения движения тела использовано бикватернионное кинематическое уравнение

$$2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ (U_0 + \mathbf{U}_X),\ \mathbf{U}_X = U_1\mathbf{i}_1 + U_2\mathbf{i}_2 + U_3\mathbf{i}_3,$$

где, по-прежнему, $U_i = \omega_i + sv_i$ ($i = 1, 2, 3$) — полные дуальные управления, а $U_0 = \omega_0 + sv_0$ — произвольная дуальная функция, связанная с нормой $\|\mathbf{\Lambda}\|$ бикватерниона $\mathbf{\Lambda}$ дифференциальными соотношениями

$$\frac{d}{dt}(\|\mathbf{\Lambda}\|) = U_0\|\mathbf{\Lambda}\|,\ U_0 = \frac{d}{dt}(\ln\|\mathbf{\Lambda}\|).$$

Величина U_0 рассматривается в качестве четвертого дуального управления и отвечает за изменение нормы бикватерниона $\mathbf{\Lambda}$ в процессе управляемого движения твердого тела. Полное управление $\mathbf{U}$ формируется в соответствии с соотношениями (7) или (8), в которых сопряженные бикватернионы заменяются на обратные.

На основе бикватернионных дифференциальных уравнений возмущенного движения в нормированных и ненормированных бикватернионах в работе [20] построены две группы законов управления, использующих различные кинематические параметры движения твердого тела: винтовые части нормированных бикватернионов перемещений и ненормированные бикватернионы перемещений. Использование нормированных бикватернионов перемещений в теории и практике управления движением твердого тела и роботов-манипуляторов стало достаточно распространенным, поскольку они являются наиболее компактным и удобным средством математического описания винтового движения твердого тела (движения свободного твердого тела). Использование (при синтезе второй группы законов управления) ненормированных бикватернионов перемещений приводит к необходимости введения расширенного (четырехмерного) бикватерниона управления вместо обычно используемого трехмерного винта управления. Роль переменной состояния твердого тела играет в этом случае ненормированный бикватернион перемещения твердого тела, а роль управления — бикватернион кинематического винта с ненулевой скалярной частью. Такое введение дуального вектора состояния и дуального вектора управления позволяет провести синтез четырехмерного стабилизирующего управления в бикватернионном виде без разделения бикватернионных уравнений движения на скалярную и винтовую части. Выделение скалярной и винтовой частей, необходимое для построения кинематического винта твердого тела (управления), проводится на конечной стадии (в конечных соотношениях).

Решение задачи синтеза стабилизирующего управления на основе бикватернионных моделей возмущенного винтового движения твердого тела, использующих нормированные бикватернионы перемещений и бикватернионы кинематических винтов с нулевыми скалярными частями, требует разделения уравнений возмущенного движения на скалярную и винтовую части в рамках самой процедуры синтеза, что приводит к более сложному решению задачи синтеза. Кроме того, законы управления, построенные на основе этих моделей, как уже отмечалось, вырождаются при определенном положении твердого тела в пространстве, в то время как использование при синтезе "четырехмерных" бикватернионов угловых и линейных скоростей позволяет построить невырождающиеся законы управления.

Отметим, что использование бикватернионов конечных перемещений приводит к необходимым и достаточным условиям асимптотической устойчивости установившегося движения свободного твердого тела по уравнениям первого приближения, отличающимся от традиционно используемых. Эти условия для позиционно-интегральной коррекции заключаются в требовании отрицательности скалярных главных частей двух корней бикватернионного квадратного характеристического уравнения вместо требования отрицательности вещественных частей двенадцати корней обычного характеристического уравнения в случае использования для описания движения свободного твердого тела углов Эйлера—Крылова и прямоугольных декартовых координат. Это оказывается полезным при исследовании устойчивости и управления движением свободного твердого тела.

Отметим также, что в диссертации Е. И. Нелаевой (Ломовцевой) [Нелаева Е. И. Развитие бикватернионной теории кинематического управления и ее приложение к решению обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов. Автореф. дис. канд. техн. наук; 05.13.01. Саратов, 2016. 19 с.] предложены алгоритмы формирования двух вышеуказанных стабилизирующих бикватернионных законов управления движением свободного твердого тела в нормированных и ненормированных бикватернионах, построенных по принципу обратной связи, а также предложены алгоритмы формирования полных бикватернионных кинематических управлений, включающих оптимальные программное и стабилизирующее управления. Эти алгоритмы применены Е. И. Нелаевой для численного решения обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием бикватернионной теории кинематического управления движением свободного твердого тела.

2.4. Построение программного перемещения свободного твердого тела, оптимального в смысле минимизации затрат на управление, для заданного времени переходного процесса. В диссертации Е. И. Нелаевой (Ломовцевой) рассмотрена в бикватернионной нелинейной кинематической постановке задача построения программного перемещения свободного твердого тела, оптимального в смысле минимизации затрат на управление, при наличии ограничений на модуль управления и заданном времени переходного процесса. Полагается, что управление движением осуществляется за счет сообщения твердому телу программного мгновенного винта скоростей. Эта задача является обобщением задачи оптимального кинематического программного разворота твердого тела, ранее рассмотренной А. В. Молоденковым [7, 1995] в кватернионной постановке.

Е. И. Нелаевой получен оптимальный программный бикватернионный кинематический закон управления движением свободного твердого тела, минимизирующий интеграл от суммы квадратов дуальных ортогональных проекций кинематического винта свободного твердого тела (интеграл от суммы квадратов управлений); найден в явном виде оптимальный программный бикватернионный закон перемещения тела за фиксированное время из заданного начального положения в любое требуемое конечное положение под действием построенного оптимального управления. Закон управления движением свободного твердого тела построен с помощью применения принципа перенесения Котельникова—Штуди.

2.5. Аналитическое бикватернионное решение кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела. В работах Ю. Н. Челнокова и Е. И. Нелаевой [21, 2015; 22, 2016] получено аналитическое решение в кинематической бикватернионной постановке задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела. В качестве математических моделей движения используются бикватернионные кинематические уравнения возмущенного движения свободного твердого тела в нормированных бикватернионах конечных перемещений, а в качестве управлений — дуальные ортогональные проекции мгновенного винта скоростей движения тела на связанные с ним координатные оси или на оси инерциальной системы координат. Каждый из двух минимизируемых функционалов характеризует собой интегральную величину затрат на управление и квадратичных отклонений параметров движения свободного твердого тела от их программных значений, взятых в определенной пропорции, определяемой значениями весовых коэффициентов (т.е. минимизируется интеграл от взвешенной суммы квадратов компонент кинематического винта (управления) и суммы квадратичных отклонений параметров движения свободного твердого тела от их программных значений).

С помощью принципа максимума Понтрягина построены законы оптимального управления и дифференциальные уравнения задачи оптимизации. Найдено аналитическое решение этой задачи в бикватернионной и кватернионной формах. Оптимальное движение свободного твердого тела в текущий момент времени представляет собой асимптотически устойчивое мгновенное винтовое движение вдоль оси, имеющей в инерциальной (опорной) системе координат направление, противоположное направлению мгновенного винта ошибки ориентации и местоположения твердого тела в этой системе координат. В законы оптимального управления входят в явном виде коэффициенты функционала минимизации, управление может быть реализовано по принципу обратной связи.

Рассмотренная в работах [21, 22] кинематическая задача оптимального управления движением свободного твердого тел является обобщением кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного углового (вращательного) движения твердого тела, изученной в работах [8, 10] в кватернионной постановке.

3. Задачи построения оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела и законов оптимальных разворотов твердого тела

Промежуточное положение между кинематическими и динамическими задачами управления вращательным движением твердого тела занимают задачи построения оптимальных законов изменения вектора кинетического момента динамически симметричного твердого тела и твердого тела с произвольным распределением масс, сообщение которого твердому телу обеспечивает его перевод из произвольного начального углового положения в требуемое конечное угловое положение. Решения этих задач в кватернионных постановках даны в работах В. Г. Бирюкова, А. В. Молоденкова, Ю. Н. Челнокова [23, 2004], О. В. Зелепукиной, Ю. Н. Челнокова [24, 2011] и В. Г. Бирюкова, Ю. Н. Челнокова [25, 2014].

3.1. Построение оптимальных программных законов изменения ограниченного по модулю вектора кинетического момента динамически симметричного твердого тела. В работе [24] рассматривается задача построения оптимальных законов изменения вектора кинетического момента динамически симметричного твердого тела, сообщение которого твердому телу обеспечивает его перевод из произвольного начального углового положения в требуемое конечное угловое положение. В качестве минимизируемых функционалов используются комбинированные функционалы качества, один из которых характеризует в заданной пропорции расход времени и импульса квадрата модуля вектора кинетического момента, а другой — расход времени и импульса модуля вектора кинетического момента на переориентацию твердого тела. Управление (вектор кинетического момента твердого тела) полагается ограниченным по модулю. Решение задачи проводится с помощью принципа максимума Понтрягина и кватернионного дифференциального уравнения, связывающего вектор кинетического момента динамически симметричного твердого тела с кватернионом ориентации системы координат, вращающейся относительно твердого тела вокруг его оси динамической симметрии с угловой скоростью, пропорциональной проекции вектора кинетического момента тела на эту ось. Использование такой модели вращательного движения, предложенной Ю. Н. Челноковым, приводит к задаче оптимального управления с подвижным правым концом траектории и существенно упрощает аналитическое рассмотрение задачи построения оптимальных законов изменения вектора кинетического момента, поскольку в этой модели вместо кватерниона абсолютной угловой скорости твердого тела фигурирует в явном виде кватернион кинетического момента тела (управление).

В работе [24] построены общие аналитические решения дифференциальных уравнений краевых задач, образующих системы девяти нелинейных дифференциальных уравнений. Показано, что решение дифференциальных краевых задач сводится к решению двух скалярных алгебраических трансцендентных уравнений. Получены как явные функции времени зависимости для кватерниона ориентации, вектора абсолютной угловой скорости и вектора кинетического момента твердого тела, описывающие программное оптимальное управляемое движение твердого тела. Построены соответствующие им законы изменения программных управляющих моментов для твердого тела — космического аппарата. Даны геометрические интерпретации управляемого углового движения твердого тела.

3.2. Построение оптимальных программных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела, обеспечивающих перевод тела в требуемое угловое положение за фиксированное время. В работах [23, 25] рассматривается задача построения оптимальных программных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела, сообщение которого телу переводит его из произвольного начального углового положения в требуемое конечное угловое положение за фиксированное время. Минимизируется интегральный квадратичный функционал качества с подынтегральным выражением, являющимся взвешенной суммой квадратов проекций вектора кинетического момента твердого тела. С помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина установлены необходимые условия оптимальности. В случае сферически симметричного твердого тела задача имеет известное аналитическое решение. Когда тело имеет ось динамической симметрии, полученная краевая задача оптимизации сведена к решению системы двух нелинейных алгебраических уравнений. Для твердого тела с произвольным распределением масс законы оптимального управления найдены в виде эллиптических функций. Обсуждаются закономерности управляемого движения, а также использование построенных программных законов изменения вектора кинетического момента космического аппарата в системах управления его ориентацией с помощью внешних управляющих моментов или вращающихся маховиков.

3.3. Замечания о задаче построения оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела. Следует отметить, что изученная в работах [23, 24, 25] задача построения оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела отличается от кинематической задачи оптимального управления угловым движением твердого тела присутствием в уравнениях движения массово-инерционных характеристик твердого тела, т.е. его моментов инерции. В силу этого указанная задача принимает динамическую окраску, а ее решение изменяется кардинально. При условии динамической симметрии твердого тела получаемая дифференциальная краевая задача оптимизации сводится к решению системы двух скалярных алгебраических трансцендентных уравнений, а в общем случае распределения масс твердого тела приходим к дифференциальной краевой задаче, которую можно решить лишь численно. Только для сферически симметричного твердого тела решение задачи построения оптимальных законов изменения вектора кинетического момента тела практически не отличается от известного аналитического решения задачи кинематического управления.

В работе [25] с помощью теоремы об изменении кинетического момента относительного движения механической системы показывается, что построенные оптимальные законы изменения вектора кинетического момента твердого тела позволяют найти оптимальные программные законы изменения кинетического момента управляющих маховиков. Такое решение не учитывает собственную динамику управляющих маховиков, однако помогает оценивать предельные возможности систем управления угловым движением космического аппарата, использующих в качестве исполнительных органов управляющие маховики, а также дает представление о характере оптимальных программных движений космического аппарата.

Список литературы

1. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Применение кватернионов в задачах управления положением твердого тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1972. № 4. С. 24—31.

2. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Кинематическая задача ориентации во вращающейся системе координат // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1972. № 6. С. 36—43.

3. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

4. **Плотников П. К., Сергеев А. Н., Челноков Ю. Н.** Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 5. С. 9—18 (**Plotnikov P. K., Sergeev A. N., Chelnokov Yu. N.** Kinematic control problem for the orientation of a rigid body // Mechanics of Solids. 1991. Vol. 37, N. 5. P. 7—16).

5. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.

6. **Панков А. А., Челноков Ю. Н.** Исследование кватернионных законов кинематического управления ориентацией твердого тела по угловой скорости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 6. С. 3—13 (**Pankov A. A., Chelnokov Yu. N.** Investigation of quaternion laws of kinematic control of solid body orientation in angular velocity // Mechanics of Solids. 1995. Vol. 33, N. 6. P. 3—13).

7. **Молоденков А. В.** Кватернионное решение задачи оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота твердого тела // Проблемы механики и управления: Межвуз. сб. науч. трудов. Пермь: Изд-во ПГУ, 1995. С. 122—131.

8. **Бирюков В. Г., Челноков Ю. Н.** Кинематическая задача оптимальной нелинейной стабилизации углового движения твердого тела // Математика. Механика: Сб. науч. трудов. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 172—174.

9. **Маланин В. В., Стрелкова Н. А.** Оптимальное управление ориентацией и винтовым движением твердого тела. Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004. 204 с.

10. **Челноков Ю. Н.** Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.

11. **Челноков Ю. Н.** Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.

12. **Стрелкова Н. А.** Оптимальное по быстродействию кинематическое управление винтовым перемещением твердого тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1982. № 4. С. 73—76.

13. **Челноков Ю. Н.** Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // Прикладная математика и механика. 1980. Т. 44, Вып. 1. С. 32—39 (**Chelnokov Yu. N.** On integration of kinematic equations of a rigid body's screw-motion // Applied mathematics and mechanics. 1980. Vol. 44, N. 1. P. 19—23).

14. **Челноков Ю. Н.** Об одной форме уравнений инерциальной навигации // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1981. № 5. С. 20—28 (**Chelnokov Yu. N.** One form of the equations of Inertial navigation // Mechanics of Solids. 1981. Vol. 16, N. 5. Pp. 16—23).

15. **Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li.** Kinematic Control of Free Rigid Bodies Using Dual Quaternions // International Journal of Automation and Computing. July 2008. 05 (3). P. 319—324.

16. **Kim M. J., Kim M. S., Shin S. Y.** A Compact Differential Formula for the First Derivative of a Unit Quaternion Curve // Journal of Visualization and Computer Animation. 1996. Vol. 7, N. 1. P. 43—57.

17. **Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li, Weimeng Sun.** Control of Oriented Mechanical systems: A Method Based on Dual Quaternion // Proc. of the 17th World Congress the International Federation of Automatic Control. Seoul, Korea, July 6—11 2008. P. 3836—3841.

18. **Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li.** A Dual-quaternion Method for Control of Spatial Rigid Body. Networking, Sensing and Control // IEEE International Conference. 6—8 April 2008. P. 1—6.

19. **Ozgur E., Mezouar Y.** Kinematic modeling and control of a robot arm using unit dual quaternions // Robotics and Autonomous Systems. 2016. Vol. 77. P. 66—73.

20. **Челноков Ю. Н.** Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. № 1. С. 38—58 (**Chelnokov Yu. N.**, Biquaternion Solution of the Kinematic Control Problem for the Motion of a Rigid Body and Its Application to the Solution of Inverse Problems of Robot-Manipulator Kinematics // Mechanics of Solids. 2013. Vol. 48, N. 1. P. 31—46).

21. **Челноков Ю. Н., Нелаева Е. И.** Аналитическое бикватернионное решение кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела // Материалы XX Международной научной конференции "Системный анализ, управление и навигация". М.: Изд-во МАИ, 2015. С. 133—135.

22. **Челноков Ю. Н., Нелаева Е. И.** Бикватернионное решение кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, Вып. 2. С. 198—206.

23. **Бирюков В. Г., Молоденков А. В., Челноков Ю. Н.** Оптимальное управление ориентацией космического аппарата с использованием в качестве управления вектора кинетического момента // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 171—173.

24. **Зелепукина О. В., Челноков Ю. Н.** Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента динамически симметричного твердого тела // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 4. С. 31—49 (**Zelepukina O. V., Chelnokov Yu. N.** Construction of Optimal Laws of variation in Angular Momentum Vector of a Dynamically Symmetric Rigid Body // Mechanics of Solids. 2011. Vol. 46, N. 4. P. 519—533).

25. **Бирюков В. Г., Челноков Ю. Н.** Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2014. № 5. С. 3—21 (**Biryukov V. G., Chelnokov Yu. N.** Construction of Optimal Laws of Variation of the Angular Momentum Vector of a Rigid Body // Mech. Solids. 2014. Vol. 49 (5). P. 479—494).

Theory of Kinematic Motion Control of a Rigid Body

Yu. N. Chelnokov, ChelnokovYuN@gmail.com✉,
Institute of Precision Mechanics and Control Problems, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation

Corresponding author: **Chelnokov Yury N.,** D. Sc., Head of Laboratory of Mechanics, Navigation and Motion Control, Institute of Precision Mechanics and Control Problems, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation, e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com

Received on February 13, 2017
Accepted on February 21, 2017

The authors present a review of the works on the theory of kinematic control of the rotational (angular) motion of a rigid body and spatial motion of a free rigid body, which is a composition of the rotational and translational (trajectory) movements of a rigid body. The theory is based on the use of the quaternion and biquaternion kinematic models of the rigid body motion. They also provide a review of the papers devoted to the problems of construction of the optimal laws of change of the angular momentum of a dynamically symmetric rigid body and rigid body with an arbitrary mass distribution, which ensures its optimal translation from an arbitrary initial angular position to the desired final angular position. These tasks occupy an intermediate position between the kinematic and dynamic problems of control of the rotational rigid body motion and play an important role in the theory of control of orientation of the spacecraft using the rotating flywheels. The theory of kinematic motion control has various topical applications in the space flight mechanics, inertial navigation, and mechanics of robotics.

Keywords: *kinematic control, rigid body, rotational (angular) movement, translational (trajectory) movement, quaternion, biquaternion*

For citation:

Chelnokov Yu. N. Theory of Kinematic Motion Control of a Rigid Body, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 7, pp. 435—446.

DOI: 10/17587/mau.18.435-446

References

1. **Branets V. N., Shmyglevskii I. P.** *Primenenie kvaternionov v zadachakh upravleniia polozheniem tverdogo tela* (Application of quaternions in rigid body control problems), *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1972, no. 4, pp. 24—31 (in Russian).

2. **Branets V. N., Shmyglevskii I. P.** *Kinematicheskaia zadacha orientatsii vo vrashchaiushcheisia sisteme koordinat* (Kinematic problem of orientation in the rotating coordinate system), *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1972, no. 6, pp. 36—43 (in Russian).

3. **Branets V. N., Shmyglevskii I. P.** *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* (The use of quaternions in problems of rigid body orientation.), Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).

4. **Plotnikov P. K., Sergeev A. N., Chelnokov Yu. N.** Kinematic control problem for the orientation of a rigid body, *Mechanics of Solids*, 1991, vol. 37, no. 5, pp. 7—16.

5. **Branets V. N., Shmyglevskii I. P.** *Vvedenie v teoriiu besplatformennykh inertsial'nykh navigatsionnykh system* (Introduction to the theory of strapdown inertial navigation systems), Moscow, Nauka, 1992, 280 p. (in Russian).

6. **Pankov A. A., Chelnokov Yu. N.** Investigation of quaternion laws of kinematic control of solid body orientation in angular velocity, *Mechanics of Solids*, 1995, vol. 33, no. 6, pp. 3—13.

7. **Molodenkov A. V.** *Kvaternionnoe reshenie zadachi optimal'nogo v smysle minimuma energeticheskix zatrat razvorota tverdogo tela* (Quaternion solution of the problem of the minimum expenditure of energy of a rigid body rotation), *Problemy mexaniki i upravleniya. Sb. nauchn. trudov*, Perm, Publishing house of PGU, 1995, pp. 122—131.

8. **Biryukov V. G., Chelnokov Yu. N.** *Kinematicheskaia zadacha optimal'noi nelineinoi stabilizatsii uglovogo dvizheniia tverdogo tela* (Kinematic problem of optimal nonlinear stabilization of the angular motion of a rigid body), *Matematika. Mekhanika: Sb. nauch. trudov*, Saratov, Publishing house of Saratovskii university, 2002, no. 4, pp. 172—174 (in Russian).

9. **Malanin V. V., Strelkova N. A.** *Optimal'noe upravlenie orientatsiei i vintovym dvizheniem tverdogo tela* (Optimal control of orientation and screw rigid body motion), Moscow, Izhevsk, NITs "Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika", 2004, 204 p. (in Russian).

10. **Chelnokov Yu. N.** *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ikh prilozheniya. Geometriya i kinematika dvizheniya* (Quaternion and bi-quaternion models and methods of solid state mechanics and their applications. Geometry and kinematics of motion.), Moscow, Fizmatlit, 2006, 512 p. (in Russian).

11. **Chelnokov Yu. N.** *Kvaternionnye modeli i metody dinamiki, navigatsii i upravleniia dvizheniem* (Quaternion models and methods of dynamics, navigation and motion control), Moscow, Fizmatlit, 2011, 560 p. (in Russian).

12. **Strelkova N. A.** *Optimal'noe po bystrodeistviiu kinematicheskoe upravlenie vintovym peremeshcheniem tverdogo tela* (Optimal speed control screw kinematic motion of a rigid body), *Izv. AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1982, no. 4, pp. 73—76 (in Russian).

13. **Chelnokov Yu. N.** On integration of kinematic equations of a rigid body's screw-motion, *Applied Mathematics and Mechanics*, 1980, vol. 44, no. 1, pp. 19—23 (in Russian).

14. **Chelnokov Yu. N.** One form of the equations of Inertial navigation, *Mechanics of Solids*, 1981, vol. 16, no. 5, pp. 16—23.

15. **Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li.** Kinematic Control of Free Rigid Bodies Using Dual Quaternions, *International Journal of Automation and Computing*, July 2008, 05 (3), pp. 319—324.

16. **Kim M. J., Kim M. S., Shin S. Y.** A Compact Differential Formula for the First Derivative of a Unit Quaternion Curve, *Journal of Visualization and Computer Animation*, 1996, vol. 7, no. 1, pp. 43—57.

17. **Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li, Weimeng Sun.** Control of Oriented Mechanical systems: A Method Based on Dual Quaternion, *Proc. of the 17th World Congress the International Federation of Automatic Control*, Seoul, Korea, July 6—11 2008, pp. 3836—3841.

18. **Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li.** A Dual-quaternion Method for Control of Spatial Rigid Body. Networking, Sensing and Control, *IEEE International Conference*, 6—8 April 2008, pp. 1—6.

19. **E. Ozgur, Y. Mezouar.** Kinematic modeling and control of a robot arm using unit dual quaternions, *Robotics and Autonomous Systems*, 77 (2016), pp. 66—73.

20. **Chelnokov Yu. N.**, Biquaternion Solution of the Kinematic Control Problem for the Motion of a Rigid Body and Its Application to the Solution of Inverse Problems of Robot-Manipulator Kinematics, *Mechanics of Solids*, 2013, vol. 48, no. 1, pp. 31—46.

21. **Chelnokov Yu. N., Nelaeva E. I.** *Analiticheskoe bikvaternionnoe reshenie kinematicheskoi zadachi optimal'noi nelineinoi stabilizatsii proizvol'nogo programmnogo dvizheniia svobodnogo tverdogo tela* (Analytical biquaternion solution of kinematic problem of optimal nonlinear stabilization of arbitrary program motion of free rigid body), *Materialy XX mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii "Sistemnyi analiz, upravlenie i navigatsiia"*, Moscow, Publishing house of MAI, 2015, pp. 133—135 (in Russian).

22. **Chelnokov Yu. N., Nelaeva E. I.** *Bikvaternionnoe reshenie kinematicheskoi zadachi optimal'noi nelineinoi stabilizatsii proizvol'nogo programmnogo dvizheniia svobodnogo tverdogo tela* (Solving kinematic problem of optimal nonlinear stabilization of arbitrary program movement of free rigid body), *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 198—206 (in Russian).

23. **Biryukov V. G., Molodenkov A. V., Chelnokov Yu. N.** *Optimal'noe upravlenie orientatsiei kosmicheskogo apparata s ispol'zovaniem v kachestve upravleniia vektora kineticheskogo momenta* (Optimal control of spacecraft attitude using the angular momentum vector as control), *Matematika. Mekhanika: Sb. nauch. tr.,* Saratov, Publishing house of Saratovskii university, 2004, no. 6, pp. 171—173 (in Russian).

24. **O. V. Zelepukina, Yu. N. Chelnokov.** Construction of Optimal Laws of variation in Angular Momentum Vector of a Dynamically Symmetric Rigid Body, *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 4, pp. 519—533.

25. **V. G. Biryukov and Yu. N. Chelnokov.** Construction of Optimal Laws of Variation of the Angular Momentum Vector of a Rigid Body, *Mechanics of Solids*, 2014, vol. 49, no. 5, pp. 479—494.