

А. В. Фомичев, канд. техн. наук, доц., a.v.fomichev@bmstu.ru,

Е. К. Ли, аспирант, elen.k.lee@student.bmstu.ru,

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Аналитический алгоритм терминального управления пространственным движением КА при посадке на поверхность Луны*

Получено аналитическое решение задачи терминального управления пространственным движением космического аппарата при наведении в заданную точку окололунного пространства. На основании полученного решения предложен алгоритм терминального управления движением космического аппарата. Приведены результаты математического моделирования процесса наведения космического аппарата.

Ключевые слова: управление и контроль движения космического аппарата, посадка на Луну, траектория постоянного ускорения, 3D-терминальное управление

Введение

Задача мягкой посадки на поверхность Луны как задача приведения космического аппарата (КА) в заданную точку лунной поверхности или окололунного пространства при наличии ограничений на параметры состояния в конечный момент времени является задачей терминального управления. В настоящей работе рассматривается задача пространственного управления движением КА при наличии терминальных условий по координатам и компонентам вектора скорости КА в момент завершения процесса наведения.

Ввиду наличия погрешностей выведения КА в расчетную точку начала торможения и действия ряда возмущающих факторов использование концепции "невозмущенного-возмущенного" движения для ее решения является нерациональным, и возникает необходимость использования принципа "гибких" траекторий, предполагающего реализацию обновляемой программы управления, обеспечивающей выполнение терминальных условий из текущего состояния, соответствующего моменту обновления программы управления [1, 2].

В данной работе получено аналитическое решение задачи терминального наведения КА в заданную точку окололунного пространства при постоянном тормозном ускорении. Решение получено относительно шести параметров наведения (тормозного ускорения, времени торможения, начальных значений углов ориентации и скоростей их изменения) в виде функций краевых условий. Аналогичный прием был использован в работе [3], однако

аналитические соотношения для пяти параметров наведения были получены в виде функции краевых условий и времени торможения, которое предлагалось оценивать численно. Предлагаемое в настоящей работе аналитическое решение отличается вычислительной простотой.

На основании полученного решения предложен аналитический алгоритм терминального управления пространственным движением КА, совершающего посадку на поверхность Луны. В отличие от работ [2, 4], в предлагаемом алгоритме учитываются ограничения на управление и параметры траектории, время торможения определяется в результате решения задачи терминального управления, а не фиксируется. Для предстоящих программ посадки на Луну фиксация терминального момента времени не является рациональной. Предлагаемый алгоритм имеет вычислительное преимущество перед алгоритмами, рассмотренными в работах [3, 4], поскольку не использует численных методов прогноза параметров управления. Алгоритм также имеет вычислительное преимущество перед предложенной в работе [5], поскольку в его работе отсутствует процедура оптимизации. В то же время известно, что линейная программа изменения углов ориентации является близкой к оптимальной с точки зрения расхода топлива. В отличие от работ [6, 7], в работе алгоритма отсутствует этап формирования опорной траектории, поскольку аналитическое решение получено непосредственно для параметров управления вектором тяги. Предлагаемый алгоритм, в отличие от предложенного в работе [6], обеспечивает наведение КА в конкретную точку окололунного пространства, что является необходимым требованием предстоящих лунных программ. Программа управления, обеспечивающая выпол-

* Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00046).

нение терминальных условий, в отличие от рассмотренной в работе [7], многократно обновляется в процессе полета, что соответствует принципу "гибких" траекторий.

Постановка задачи автоматической посадки на поверхность Луны

▲ Уравнения движения

Рассмотрим посадочную систему координат, связанную с терминальной точкой (ПтСК): ось OZ направлена по местной вертикали, OX — на север по касательной к меридиану в точке посадки, OY дополняет систему до правой.

Вектор состояния КА в ПтСК представим в следующем виде: $\mathbf{X} = [\mathbf{r} \ \mathbf{V}]^T$, где $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$ — радиус-вектор КА в ПтСК, $\mathbf{V} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ — вектор скорости КА в проекциях на оси ПтСК.

Рассмотрим упрощенную модель управляемого движения КА в ПтСК. Ориентация вектора реактивной тяги $\mathbf{P}$ определяется мгновенными значениями углов тангажа ϑ и рыскания ψ (рис. 1). Пренебрегая возмущающим влиянием атмосферы и считая ускорение свободного падения на протяжении всего процесса наведения постоянным, уравнения движения КА при постоянном тормозном ускорении можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \dot{W} \cos \vartheta(t) \cos \psi(t); \\ \ddot{y}(t) &= \dot{W} \cos \vartheta(t) \sin \psi(t); \\ \ddot{z}(t) &= \dot{W} \sin \vartheta(t) - g,\end{aligned}\quad (1)$$

где $\psi(t)$, $\vartheta(t)$ — мгновенные значения углов рыскания и тангажа; $\dot{W}$ — тормозное ускорение; $g = 1,62$ м/с² — ускорение силы тяжести у поверхности Луны.

▲ Начальные условия наведения

Пусть в результате решения задачи навигации в начальный момент времени t_0 (момент очередного

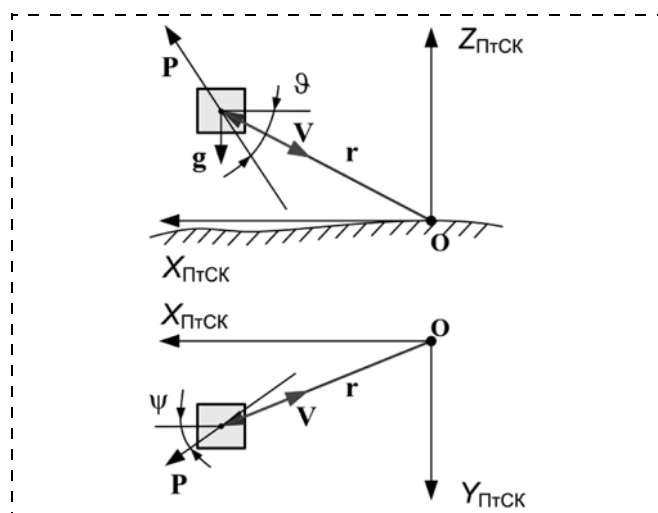


Рис. 1. Фазовые координаты КА

запуска алгоритма наведения) определен вектор состояния КА:

$$\mathbf{X}_0 = [\mathbf{r}_0 \ \mathbf{V}_0]^T = [x_0 \ y_0 \ z_0 \ \dot{x}_0 \ \dot{y}_0 \ \dot{z}_0]^T. \quad (2)$$

▲ Терминальные условия наведения

Пусть задан требуемый вектор состояния КА в момент времени окончания процесса наведения:

$$\mathbf{X}_T^* = [\mathbf{r}_T^* \ \mathbf{V}_T^*]^T = [x_T^* \ y_T^* \ z_T^* \ \dot{x}_T^* \ \dot{y}_T^* \ \dot{z}_T^*]^T. \quad (3)$$

▲ Параметры наведения

Рассмотрим вектор управления $\mathbf{u}$, обеспечивающий перевод КА из известного начального положения $\mathbf{X}_0$ в заданное терминальное положение $\mathbf{X}_T^*$:

$$\mathbf{u} = [\psi_0 \ \dot{\psi} \ \vartheta_0 \ \dot{\vartheta} \ \dot{W} \ T_H]^T,$$

где ψ_0 , ϑ_0 — программные значения углов рыскания и тангажа в момент времени t_0 ; $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$ — программные значения скоростей изменения углов рыскания и тангажа; $\dot{W} = \frac{P}{m}$ — требуемое кажущееся ускорение; P — текущая требуемая реактивная тяга двигателя; m — текущая масса КА; T_H — время, оставшееся до окончания процесса наведения.

Компоненты вектора $\mathbf{u}$ будем называть параметрами наведения.

Наведение осуществляется с постоянным тормозным ускорением. Программа управления по углам рыскания ψ и тангажа ϑ задана в виде линейных функций времени:

$$\psi_{\text{пр}}(t - t_0) = \psi_0 + \dot{\psi}(t - t_0);$$

$$\vartheta_{\text{пр}}(t - t_0) = \vartheta_0 + \dot{\vartheta}(t - t_0).$$

Предположим также, что система управления ориентацией и стабилизации КА в любой момент времени обеспечивает соответствие фактических значений углов рыскания и тангажа их программным значениям:

$$\psi(t) = \psi_{\text{пр}}(t), \quad \vartheta(t) = \vartheta_{\text{пр}}(t).$$

Имеются следующие ограничения на параметры наведения:

$$(\vartheta_0 + \dot{\vartheta}(T_H - t_0)) \in (-\pi/2, 0];$$

$$(\psi_0 + \dot{\psi}(T_H - t_0)) \in (-\pi/2, \pi/2);$$

$$\dot{W} \in [\dot{W}_{\min}, \dot{W}_{\max}] = [P_{\min}/m, P_{\max}/m], \quad (4)$$

где $\dot{W}_{\min} = P_{\min}/m$, $\dot{W}_{\max} = P_{\max}/m$.

$P_{\min}$, $P_{\max}$ — нижняя и верхняя границы диапазона дросселирования тяги реактивного двигателя.

▲ Постановка задачи наведения

При заданных математической модели объекта управления (1), начальных условиях (2) и ограничениях (4) требуется определить параметры наведе-

дения, обеспечивающие перевод КА в заданное терминальное положение (3):

- программные значения углов рыскания ψ_0 и тангажа ϑ_0 на момент запуска алгоритма наведения и скоростей их изменения $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$;
- требуемое кажущееся ускорение $\dot{W}$;
- время T_H , оставшееся до окончания процесса наведения.

Решение задачи терминального наведения в заданную точку околорунного пространства

Полагая, что изменения углов рыскания ψ и тангажа ϑ за время T_H , оставшееся до окончания процесса наведения, малы (что допускает линеаризацию соответствующих тригонометрических функций углов ориентации), при интегрировании системы уравнений (1) получим следующую систему нелинейных уравнений относительно параметров наведения ψ_0 , $\dot{\psi}$, ϑ_0 , $\dot{\vartheta}$, $\dot{W}$, T_H :

$$\begin{aligned} \dot{W} \left(\cos \vartheta_0 \cos \psi_0 T_H - (\dot{\psi} \cos \vartheta_0 \sin \psi_0 + \dot{\vartheta} \sin \vartheta_0 \cos \psi_0) \frac{T_H^2}{2} \right) &= A_x; \\ \dot{W} \left(\cos \vartheta_0 \cos \psi_0 \frac{T_H^2}{2} - (\dot{\psi} \cos \vartheta_0 \sin \psi_0 + \dot{\vartheta} \sin \vartheta_0 \cos \psi_0) \frac{T_H^3}{6} \right) &= B_x; \\ \dot{W} \left(\cos \vartheta_0 \sin \psi_0 T_H + (\dot{\psi} \cos \vartheta_0 \cos \psi_0 - \dot{\vartheta} \sin \vartheta_0 \sin \psi_0) \frac{T_H^2}{2} \right) &= A_y; \\ \dot{W} \left(\cos \vartheta_0 \sin \psi_0 \frac{T_H^2}{2} + (\dot{\psi} \cos \vartheta_0 \cos \psi_0 - \dot{\vartheta} \sin \vartheta_0 \sin \psi_0) \frac{T_H^3}{6} \right) &= B_y; \\ \dot{W} \left(\sin \vartheta_0 T_H + \dot{\vartheta} \cos \vartheta_0 \frac{T_H^2}{2} \right) &= A_z; \\ \dot{W} \left(\sin \vartheta_0 \frac{T_H^2}{2} + \dot{\vartheta} \cos \vartheta_0 \frac{T_H^3}{6} \right) &= B_z, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A_x &= \dot{x}_T^* - \dot{x}_0, \quad A_y = \dot{y}_T^* - \dot{y}_0, \quad A_z = \dot{z}_T^* - \dot{z}_0 + g T_H; \\ B_x &= x_T^* - x_0 - \dot{x}_0 T_H; \quad B_y = y_T^* - y_0 - \dot{y}_0 T_H; \\ B_z &= z_T^* - z_0 + \left(\frac{g T_H}{2} - \dot{z}_0 \right) T_H. \end{aligned}$$

Рассмотрим способ решения системы (5), основанный на первоначальном сведении ее к одному уравнению относительно параметра наведения T_H . Аналогичный прием был использован в работе [3].

Разрешим полученные уравнения относительно времени T_H и тормозного ускорения $\dot{W}$. Возводя в квадрат и последовательно складывая левые и правые части первого, третьего и пятого уравнений системы (5), с учетом принятых допущений получим

$$\begin{aligned} \dot{W}^2 \left(T_H^2 - \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \cos^2 \psi_0 \frac{T_H^3}{2} - \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \psi_0 \frac{T_H^3}{2} + \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \frac{T_H^3}{2} \right) &= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2; \\ \dot{W}^2 \left(T_H^2 - \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \frac{T_H^3}{2} + \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \frac{T_H^3}{2} \right) &= \\ = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2; \\ \dot{W}^2 T_H^2 &= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \Rightarrow \\ \dot{W} &= \frac{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}{T_H}. \end{aligned} \quad (6)$$

Возводя в квадрат и последовательно складывая левые и правые части второго, четвертого и шестого уравнений системы (5), получим

$$\begin{aligned} \dot{W}^2 \left(\frac{T_H^4}{4} - \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \cos^2 \psi_0 \frac{T_H^5}{12} - \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \psi_0 \frac{T_H^5}{12} + \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \frac{T_H^5}{12} \right) &= B_x^2 + B_y^2 + B_z^2; \\ \dot{W}^2 \frac{T_H^4}{4} &= B_x^2 + B_y^2 + B_z^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Выполнив подстановку выражения (6) в уравнение (7), получим следующее уравнение относительно времени T :

$$(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) T_H^2 = 4(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2). \quad (8.1)$$

Выполнив подстановки, получим уравнение 3-го порядка относительно параметра T_H :

$$f_0(T_H) = a_1 T_H^3 + a_2 T_H^2 + a_3 T_H + a_4 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 2g(\dot{z}_T^* + \dot{z}_0); \\ a_2 &= (\dot{x}_T^* - \dot{x}_0) + (\dot{y}_T^* - \dot{y}_0)^2 + (\dot{z}_T^* - \dot{z}_0)^2 - \\ &- 4(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 + (z_T^* - z_0)g); \\ a_3 &= 8((x_T^* - x_0)\dot{x}_0 + (y_T^* - y_0)\dot{y}_0 + (z_T^* - z_0)\dot{z}_0); \\ a_4 &= -4((x_T^* - x_0)^2 + (y_T^* - y_0)^2 + (z_T^* - z_0)^2). \end{aligned}$$

Заметим, что $a_1 \ll a_2$, поэтому предлагается искать решение относительно параметра T_H из решения следующего квадратного уравнения:

$$f(T_H) = a_2 T_H^2 + a_3 T_H + a_4 = 0. \quad (8.2)$$

Корни уравнения (8.2) имеют следующий вид:

$$T_{H1} = \frac{-a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_2a_4}}{2a_2}; \quad (9.1)$$

$$T_{H2} = \frac{-a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_2a_4}}{2a_2}. \quad (9.2)$$

Очевидно, что если для заданных начальных и терминальных условий наведения существует такое $T_H \in \mathbf{R}$ вида (9.1)–(9.2), удовлетворяющее следующему ограничению:

$$\dot{W}_{\min}(t_0 + T_H) \leq \frac{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}{T_H} \leq \dot{W}_{\max}(t_0), \quad (10)$$

где $\dot{W}_{\max}(t_0) = P_{\max}/m(t_0)$ — максимальное располагаемое тормозное ускорение в момент времени очередного запуска алгоритма наведения;

$\dot{W}_{\min}(t_0 + T_H) = P_{\min}/m(t_0 + T_H)$ — минимальное располагаемое тормозное ускорение в момент времени окончания процесса наведения;

в соответствии с формулой Циолковского $m(t_0 + T_H) = m(t_0)e^{-\frac{|\Delta V|}{I_{уд}}}$ — масса КА в момент окончания процесса наведения;

$|\Delta V| = \dot{W}T_H = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ — характеристическая скорость маневра;

$I_{уд}$ — удельный импульс реактивного двигателя, то задача терминального управления имеет решение, т. е. можно определить такие параметры наведения ($\vartheta_0, \dot{\vartheta}, \psi_0, \dot{\psi}, \dot{W}, T_H$), которые обеспечат перевод КА из текущего положения в пространстве состояний в заданное терминальное положение.

Предположим, что такое решение существует. В таком случае можно разрешить уравнения системы (5) относительно параметров наведения ($\psi_0, \dot{\psi}$), определяющих программное движение в канале рыскания.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi &= \dot{\psi} \operatorname{tg} \psi_0 + \dot{\vartheta} \operatorname{tg} \vartheta_0; \\ \varepsilon &= \dot{\psi} \frac{1}{\operatorname{tg} \psi_0} - \dot{\vartheta} \operatorname{tg} \vartheta_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя первое и второе уравнения системы (5), получим

$$\frac{2\left(1 - \xi \frac{T_H}{2}\right)}{T\left(1 - \xi \frac{T_H}{3}\right)} = \frac{A_x}{B_x}; \quad (12)$$

$$\xi = -\frac{3}{T_H} \frac{A_x T_H - 2B_x}{A_x T_H - 3B_x}.$$

Используя третье и четвертое уравнения системы (5), получим

$$\frac{2\left(1 + \varepsilon \frac{T_H}{2}\right)}{T\left(1 + \varepsilon \frac{T_H}{3}\right)} = \frac{A_y}{B_y}; \quad (13)$$

$$\xi = \frac{3}{T_H} \frac{A_y T_H - 2B_y}{A_y T_H - 3B_y}.$$

Используя первое и третье уравнение системы (5), получим

$$\frac{\left(1 - \xi \frac{T_H}{2}\right)}{\operatorname{tg} \psi_0 \left(1 + \varepsilon \frac{T_H}{2}\right)} = \frac{A_x}{A_y}; \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{A_y}{A_x} \frac{2 - \xi T_H}{2 + \varepsilon T_H}.$$

Выполнив подстановку (12), (13) в уравнение (14), получим следующее соотношение для определения значения параметра ψ_0 :

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{A_y T_H - 3B_y}{A_x T_H - 3B_x}. \quad (15)$$

Используя уравнения (11) и (15), получим следующее соотношение для определения значения параметра $\dot{\psi}$:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= (\xi + \varepsilon) \left(\operatorname{tg} \psi_0 + \frac{1}{\operatorname{tg} \psi_0} \right)^{-1}; \\ \dot{\psi} &= \frac{-3(A_x B_y - A_y B_x)}{(A_x T_H - 3B_x)^2 + (A_y T_H - 3B_y)^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Разрешим также уравнения системы (5) относительно параметров наведения ($\vartheta_0, \dot{\vartheta}$), определяющих программное движение в канале тангажа.

Введем следующие обозначения:

$$\chi = \dot{\vartheta} \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta_0}. \quad (17)$$

Используя пятое и шестое уравнения системы (5), получим

$$\frac{2\left(1 + \chi \frac{T_H}{2}\right)}{T_H\left(1 + \chi \frac{T_H}{3}\right)} = \frac{A_z}{B_z}; \quad (18)$$

$$\chi = -\frac{3}{T_H} \frac{A_z T_H - 2B_z}{A_z T_H - 3B_z}.$$

Значение параметра ϑ_0 можно определить, используя пятое уравнение системы (5):

$$\sin \vartheta_0 = \frac{A_z}{\dot{W} T_H} \left(1 + \chi \frac{T_H}{2}\right)^{-1};$$

$$\sin \vartheta_0 = \frac{2}{\dot{W} T_H^2} (A_z T_H - 3B_z). \quad (19)$$

При условии, что значение параметра ψ_0 мало (это возможно в том случае, если подлет к терминальной точке осуществляется по полярной орбите, долгота восходящего узла которой такова, что селенографическая долгота КА в процессе наведения близка к селенографической долготе терминальной точки), значение параметра ϑ_0 можно определить также по соотношению, аналогичному (15) для определения параметра ψ_0 .

Используя первое и пятое уравнения системы (5), получим

$$\frac{\left(1 - \xi \frac{T_H}{2}\right)}{\operatorname{tg} \vartheta_0 \left(1 + \chi \frac{T_H}{2}\right)} = \frac{A_x}{A_z}; \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{A_z}{A_x} \frac{2 - \xi T_H}{2 + \chi T_H}.$$

Выполнив подстановку соотношений (12), (18) в уравнение (20), получим следующее выражение для определения параметра ϑ_0 :

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{A_z T_H - 3B_z}{A_x T_H - 3B_x}. \quad (21)$$

Используя уравнения (18) и (21), получим следующее соотношение для определения параметра ϑ :

$$\dot{\vartheta} = \chi \operatorname{tg} \vartheta_0;$$

$$\dot{\vartheta} = -\frac{3}{T} \frac{A_z T_H - 2B_z}{A_x T_H - 3B_x}. \quad (22)$$

Анализ полученного аналитического решения

Покажем, что только одно из решений (9.1), (9.2) уравнения (8) относительно параметра T_H является решением поставленной задачи терминаль-

ного наведения КА в заданную точку окололунного пространства. В качестве метода исследования используем метод математического моделирования.

Предлагаемый алгоритм расчета параметров наведения был реализован авторами программно в среде *MATLAB*. Математическое моделирование процесса терминального наведения реализовано посредством следующей циклической процедуры:

- 1) проверка условия завершения наведения;
- 2) запуск алгоритма расчета параметров наведения в ПтСК;
- 3) интегрирование уравнений движения в ПтСК.

За заданное время Δt_{ϕ} перед подлетом к терминальной точке расчетные параметры наведения ψ_0 , $\dot{\psi}$, ϑ_0 , $\dot{\vartheta}$, $\dot{W}$, T_H фиксируются. В качестве условия завершения наведения выбрано следующее: $T_H < h$, где h — шаг интегрирования уравнений движения. В качестве метода интегрирования был использован метод Рунге—Кутты 4-го порядка точности.

Начальные условия наведения:

$$x_0 = 7 \cdot 10^4 \text{ м}, y_0 = -7 \cdot 10^4 \text{ м}, z_0 = 1 \cdot 10^4 \text{ м},$$

$$\dot{x}_0 = -700 \text{ м/с}, \dot{y}_0 = 700 \text{ м/с}, \dot{z}_0 = -50 \text{ м/с}.$$

Терминальные условия наведения:

$$x_T^* = 0 \text{ м}, y_T^* = 0 \text{ м}, z_T^* = 2 \cdot 10^3 \text{ м},$$

$$\dot{x}_T^* = 0 \text{ м/с}, \dot{y}_T^* = 0 \text{ м/с}, \dot{z}_T^* = 0 \text{ м/с}.$$

Иными словами, номинально процесс наведения должен закончиться на высоте 2 км над планируемой точкой посадки, при этом горизонтальная и вертикальная составляющие скорости КА должны обратиться в ноль.

Пусть тяга реактивного двигателя может меняться в диапазоне от 3500 Н до 4800 Н, а начальная масса КА составляет 900 кг.

Ниже представлены результаты исследования динамики процесса терминального наведения при использовании полученных решений $T_H = T_{H1}$ (9.1) и $T_H = T_{H2}$ (9.2) относительно времени, оставшегося до окончания наведения. Результаты теоретического исследования без учета ограничений на параметры управления при использовании решения $T_H = T_{H1}$ (9.1) приведены на рис. 2—4. Анализ полученных результатов показал более стремительный характер гашения скорости КА (рис. 2, б, см. вторую сторону обложки) по сравнению с рассогласованием по положению КА в ПтСК (рис. 2, а, см. вторую сторону обложки), что обеспечивает асимптотическую сходимость параметров вектора состояния КА к желаемым терминальным параметрам. При этом по мере приближения к терминальной точке в силу асимптотического характера исследуемого процесса увеличивается расчетное время наведения (рис. 3, а, см. вторую сторону обложки) по обоим решениям (9.1), (9.2), а программное значение угла тангажа стремится к $\pi/2$ (рис. 4). Более того, требуемое кажущееся ускорение не является

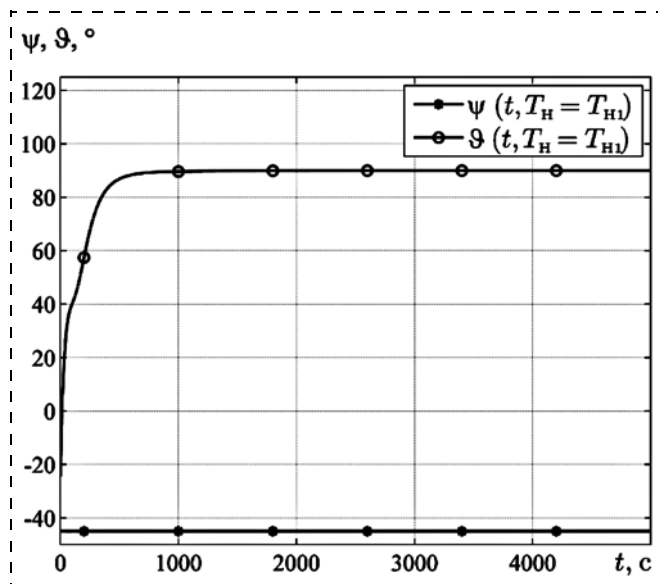


Рис. 4. Программные значения углов рыскания и тангажа в процессе наведения с использованием "ложного" решения $T_H = T_{H1}$ (9.1)

постоянным и изменяется в широких пределах от величины, существенно превышающей максимальное допустимое ускорение в момент времени начала наведения, до ускорения силы тяжести g по мере приближения к терминальной точке (см. рис. 3, б). С математической точки зрения формируемое управляющее воздействие будет компенсировать вектор ускорения силы тяжести и стремиться удерживать объект управления в окрестности терминальной точки бесконечно долго. Очевидно, что описанный процесс физически нереализуем. Таким образом, решение $T_H = T_{H1}$ (9.1) уравнения (8) будем считать "ложным".

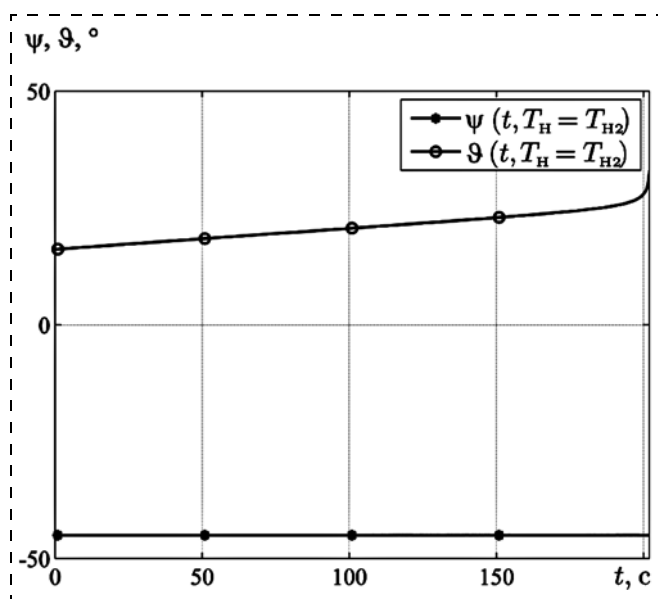


Рис. 7. Программные значения углов рыскания и тангажа в процессе наведения с использованием решения $T_H = T_{H2}$ (9.2)

Результаты аналогичного исследования при использовании решения $T_H = T_{H2}$ (9.2) приведены на рис. 5–7. Процессы изменения положения и скорости КА в ПтСК представлены на рис. 5, а и 5, б (см. третью сторону обложки) соответственно. Время, оставшееся до окончания процесса наведения при использовании данного решения уменьшается по линейному закону (рис. 6, а, см. третью сторону обложки). Требуемое кажущееся ускорение в процессе наведения близко к постоянному значению и находится в пределах заданных ограничений на параметры управления (рис. 6, б, см. третью сторону обложки). На рис. 7 представлены графики изменения программных значений углов ориентации. Закон изменения программных значений углов рыскания и тангажа, как и предполагалось, близок к линейному.

На рис. 8, а, б приведены графики функций $f_0(T_H)$ (8.1) и $f(T_H)$ (8.2) соответственно на начальный момент времени и момент за 10 с до окончания процесса наведения. Анализ рисунков показывает, что "нули" функций, соответствующие решениям T_{H1} и T_{H2} для расчетного параметра наведения T_H , совпадают с приемлемой точностью, что подтверждает возможность поиска решения относительно времени T_H в виде (9.2).

Таким образом, если для заданных начальных и терминальных условий наведения существует такое $T_H \in \mathbf{R}$ вида (9.2), удовлетворяющее ограничению (10), то рассматриваемая задача терминального управления имеет следующее решение относительно параметров наведения $\psi_0, \dot{\psi}, \vartheta_0, \dot{\vartheta}, \dot{W}, T_H$:

$$\begin{aligned} T_H &= \frac{-a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_2a_4}}{2a_2}; \\ \dot{W} &= \frac{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}{T_H}; \\ \psi_0 &= \arctg \frac{A_y T_H - 3B_y}{A_x T_H - 3B_x}; \\ \dot{\psi} &= \frac{-3(A_x B_y - A_y B_x)}{(A_x T_H - 3B_x)^2 + (A_y T_H - 3B_y)^2}; \\ \vartheta_0 &= \arctg \frac{A_z T_H - 3B_z}{A_x T_H - 3B_x}; \\ \dot{\vartheta} &= -\frac{3}{T_H} \frac{A_z T_H - 2B_z}{A_x T_H - 3B_x}. \end{aligned} \quad (23)$$

Полученное аналитическое решение задачи терминального управления позволяет рассчитать значения шести параметров наведения для приведения СА из начального состояния $\mathbf{X}_0$ в заданное терминальное состояние $\mathbf{X}_T^*$. Управление значением тормозного ускорения и ориентацией вектора тяги, сформированное на основании полученных значений параметров наведения для фиксированного

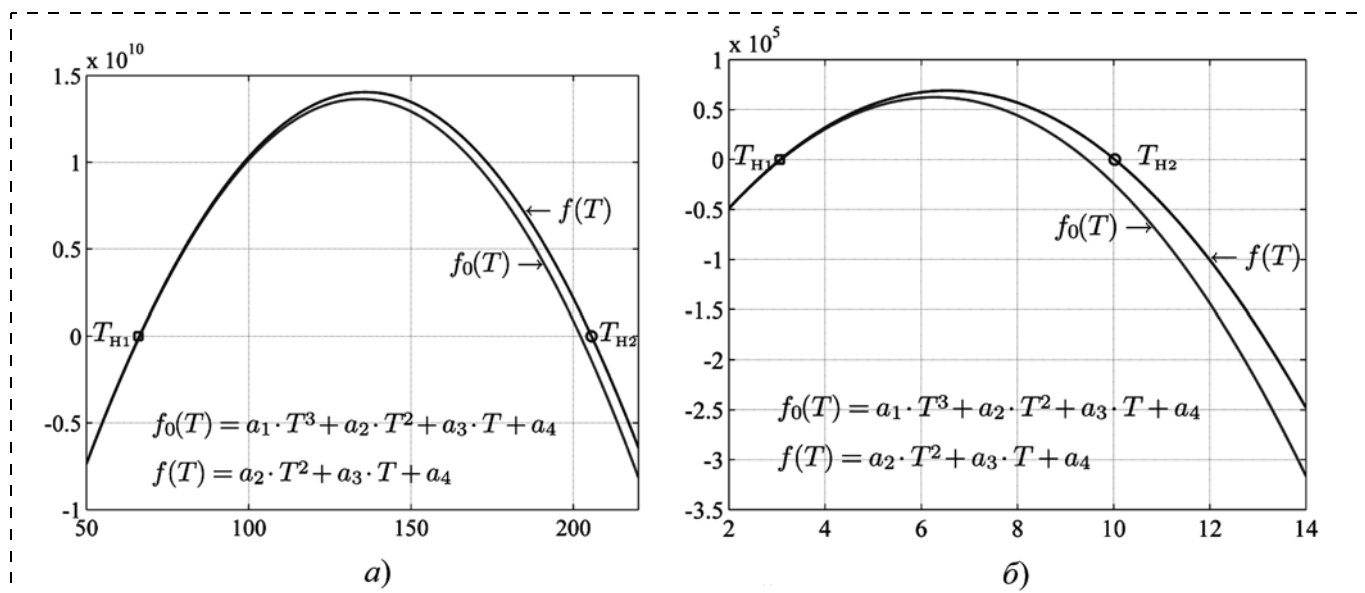


Рис. 8. Графики функций времени, оставшегося до окончания наведения:

а — в момент времени начала процесса наведения; б — за 10 с до окончания процесса наведения

начального вектора состояния $\mathbf{X}_0$, реализует управление объектом по разомкнутому циклу. Однако предлагаемое аналитическое решение может быть использовано в рамках концепции программно-позиционного управления, впервые предложенной Дрейфусом в виде идеи "размыкаемых обратных связей" [1], или концепции позиционного управления. Следуя принципу "размораживания" начальных условий, т. е. замены начальных условий текущими в программном решении задачи, получим соотношения для параметров наведения в виде функций текущего состояния, что соответствует управлению по принципу обратной связи:

$$T_H = T_H(\mathbf{X}, \mathbf{X}_T^*),$$

$$\dot{W} = \dot{W}(T_H, \mathbf{X}, \mathbf{X}_T^*),$$

$$\vartheta = \vartheta(T_H, \mathbf{X}, \mathbf{X}_T^*),$$

$$\psi = \psi(T_H, \mathbf{X}, \mathbf{X}_T^*).$$

В соответствии с предлагаемым решением, реализующим гибкую стратегию управления, обновляемые на каждом такте программные значения углов ориентации вектора тяги будут соответствовать функциям времени, близким к линейным, а обновляемое программное значение требуемого тормозного ускорения будет близко к постоянному значению.

Алгоритм терминального управления пространственным движением КА при посадке на поверхность Луны

При постановке задачи терминального наведения был принят ряд допущений, и в качестве модели движения объекта были использованы упро-

щенные уравнения движения КА вблизи лунной поверхности. Полученное решение является приближенным, однако при реализации принципа "гибких" траекторий в силу многократного обновления программы управления по мере приближения к терминальной точке погрешность наведения будет уменьшаться. Предполагается, что алгоритм терминального управления на основе данного решения можно использовать при переводе КА с окололунной предпосадочной орбиты в заданную точку окололунного пространства.

Пусть при полете КА по окололунной орбите в некоторый момент времени запущен режим терминального наведения. При запуске режима однократно запускается процедура расчета кватерниона ориентации ПтСК относительно селенографической системы координат (СгСК) $\Lambda_{\text{ПтСК}}$.

С момента времени запуска режима терминального наведения осуществляется запуск алгоритма расчета параметров наведения, входными данными для которого являются расчетный вектор состояния $\mathbf{X}_0$ и заданный вектор $\mathbf{X}_T^*$ в ПтСК. В очередном запуске, в котором первичное решение будет найдено, выполняется инициализация процесса терминального наведения.

Алгоритм терминального управления, запускаемый с момента инициализации процесса наведения с заданной периодичностью, реализует следующую последовательность действий:

1. Проверка условия завершения процесса наведения.

В качестве условия завершения наведения выбрано следующее условие относительно времени, оставшегося до окончания процесса наведения:

$$T_H < h,$$

где h — такт работы алгоритма.

При выполнении данного условия осуществляется выдача команды на отсечку тяги реактивного двигателя.

2. Расчет вектора состояния КА в ПтСК $\mathbf{X}_0$ по информации о векторе состояния КА в СгСК, полученной от навигационной системы.

3. Расчет параметров наведения (в ПтСК).

Расчет параметров наведения в соответствии с предложенным аналитическим решением (23) с учетом краевых условий $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}_T^*$ может осуществляться не на каждом такте работы алгоритма управления, а с отдельно заданным тактом. При "промежуточных" запусках алгоритма программа управления не обновляется, при этом выполняется пересчет параметров наведения относительно соответствующих параметров на предыдущем такте с учетом заданных программ их изменения:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \psi_0 + \dot{\psi} h; \\ \vartheta_0 &= \vartheta_0 + \dot{\vartheta} h; \\ T_H &= T_H - h.\end{aligned}\quad (24)$$

Программные значения требуемого тормозного ускорения $\dot{W}$ и скоростей изменения углов ориентации $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$ в "промежуточных" запусках алгоритма не пересчитываются.

За заданное время Δt_Φ перед подлетом к терминальной точке параметры наведения ψ_0 , $\dot{\psi}$, ϑ_0 , $\dot{\vartheta}$, $\dot{W}$, T_H фиксируются и на последующих тактах до завершения наведения рассчитываются в соответствии с соотношениями (24).

4. Расчет кватерниона программной ориентации системы координат, связанной с КА (ССК), относительно СгСК $\Lambda_{ССК}^{\text{пр}}$:

$$\Lambda_{ССК}^{\text{пр}} = \Lambda_{\text{ПтСК-ССК}}^{\text{пр}} \circ \Lambda_{\text{ПтСК}}, \quad (25)$$

где $\Lambda_{\text{ПтСК-ССК}}^{\text{пр}}$ — кватернион программной ориентации ССК относительно ПтСК, определяемый параметрами наведения ψ_0 , ϑ_0 :

$$\begin{aligned}\Lambda_{\text{ПтСК-ССК}}^{\text{пр}} &= \\ &= [\cos(\vartheta_0/2) \ 0 \ \sin(\vartheta_0/2) \ 0] \circ [\cos(\psi_0/2) \ 0 \ 0 \ \sin(\psi_0/2)],\end{aligned}$$

о — символ кватернионного произведения.

5. Расчет углового рассогласования фактической и программной ориентации ССК относительно СгСК $\gamma = [\gamma_X \ \gamma_Y \ \gamma_Z]^T$ по следующим формулам [8]:

$$\begin{aligned}\gamma_X &= 2\Delta\lambda_0\Delta\lambda_1; \\ \gamma_Y &= 2\Delta\lambda_0\Delta\lambda_2; \\ \gamma_Z &= 2\Delta\lambda_0\Delta\lambda_3,\end{aligned}\quad (26)$$

где γ_i — угол рассогласования по i -й оси ССК; $\Delta\lambda_0$, $\Delta\lambda_1$, $\Delta\lambda_2$, $\Delta\lambda_3$ — элементы кватерниона рассогласования между программной и фактической ориентацией ССК $\Delta\Lambda$:

$$\Delta\Lambda = \Lambda_{ССК} \circ \tilde{\Lambda}_{ССК}^{\text{пр}},$$

$\Lambda_{ССК}$ — кватернион фактической ориентации ССК относительно СгСК, полученный по информации от навигационной системы; $\tilde{\Lambda}_{ССК}^{\text{пр}}$ — кватернион, сопряженный $\Lambda_{ССК}^{\text{пр}}$.

6. Расчет аргумента управления угловым движением КА σ в соответствии с ПД законом регулирования:

$$\sigma = \mathbf{K}_\gamma \gamma + \mathbf{K}_\omega (\omega - \omega_{\text{пр}}), \quad (27)$$

где $\mathbf{K}_\gamma$, $\mathbf{K}_\omega$ — (1×3) -матрицы коэффициентов закона управления соответственно по углу и по скорости; ω — (3×1) -вектор фактической угловой скорости КА в проекциях на оси ССК, полученный по информации от навигационной системы; $\omega_{\text{пр}}$ — (3×1) -вектор программной угловой скорости КА в проекциях на оси ССК, определяемый параметрами наведения $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$:

$$[0 \ \omega_{\text{пр}}^T] = \Lambda_{\text{ПтСК-ССК}}^{\text{пр}} \circ [0 \ 0 \ \dot{\vartheta} \ \dot{\psi}] \circ \tilde{\Lambda}_{\text{ПтСК-ССК}}^{\text{пр}}.$$

7. Расчет программной величины тяги реактивного двигателя $P_{\text{пр}}$:

$$P_{\text{пр}} = \frac{\dot{W}}{m_p}, \quad (28)$$

где m_p — расчетное значение массы КА на текущий момент времени:

$$m_p = m_{p0} - \frac{P_0}{I_{\text{уд}}} h,$$

m_{p0} , P_0 — расчетное значение массы КА и тяга реактивного двигателя на предыдущем такте запуска алгоритма.

Предлагаемый алгоритм допускает разделение процесса спуска и посадки КА на ряд отдельных этапов, а также допускает изменение терминальных условий наведения как до начала этапа, так и в процессе выполнения маневра.

Заключение

Предлагаемое аналитическое решение задачи терминального управления пространственным движением КА получено для постоянного тормозного ускорения, что предполагает изменение значения управляющей тяги на невозмущенной траектории. Это обстоятельство заставляет искать пути уменьшения необходимого диапазона дросселирования тяги. Одним из таких путей является выбор такого диапазона начальных условий по параметрам состояния в момент начала торможения, при которых наведение потребует среднего значения управляющей тяги, близкого к номинальному значению тяги реактивного двигателя.

Анализ результатов математического моделирования процесса терминального наведения КА в за-

данную точку окололунного пространства с использованием полученного аналитического решения показал принципиальную работоспособность предлагаемого алгоритма. Исследование точности решения задачи терминального наведения с использованием данного алгоритма является следующим этапом работы.

Список литературы

1. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Методы "гибких" траекторий в задачах терминального управления вертикальными маневрами летательных аппаратов. В кн.: Проблемы управления сложными динамическими объектами авиационной и космической техники / Под ред. акад. РАН С. Н. Васильева. М.: Машиностроение, 2015. С. 51—110.

2. **Батенко А. П.** Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984. 161 с.

3. **Разыграев А. П.** Метод терминального управления пространственным движением при мягкой посадке в заданную точку на поверхности планеты // Основы управления полетом космических аппаратов: Учеб. пособ. для вузов. М.: Машиностроение, 1990. С. 378—386.

4. **Klumpp A. R.** Apollo Lunar Descent Guidance // *Automatica*. 1974. Vol. 10, N. 2. P. 133—146.

5. **Lunghi P., Lavagna M., Armellin R.** A Semi-analytical Guidance Algorithm for Autonomous Landing // *Advances in Space Research*. 2015. Vol. 55, N. 11. P. 2719—2738.

6. **Chomel C. T., Bishop R. H.** Analytical lunar descent guidance algorithm // *Journal of guidance, control, and dynamics*. 2009. Vol. 32, N. 3. P. 915—926.

7. **Li M., Macdonald M., McInnes C. R., Jing W.** Analytical landing trajectories for embedded autonomy // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2010. 224 (11). P. 1177—1191.

8. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

Analytical 3D Terminal Guidance Algorithm for Lunar Landing

A. V. Fomichev, a.v.fomichev@bmstu.ru, **E. K. Li**, elen.k.lee@student.bmstu.ru✉, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

Corresponding author: **Li Elena K.**, Assistant Professor, Postgraduate Student, Bauman Moscow State Technical University, e-mail: elen.k.lee@student.bmstu.ru

Received on February 26, 2017

Accepted on March 06, 2017

This article presents three-dimensional (3D) terminal guidance scheme for a spacecraft lunar landing maneuver. An analytical solution to a spacecraft terminal guidance problem for achieving the desired spot in the circumlunar space is proposed. The solution is obtained for constant acceleration trajectory when thrust throttling is used to maintain uniform braking deceleration. The pitch program and the yaw program are essentially linear with time. To achieve 6 terminal conditions (position and velocity terminal vectors components) 6 guidance law parameters are used: pitch angle and pitch rate, yaw angle and yaw rate, braking deceleration and time-to-go. The solution is executed in the coordinate frame associated with the desired terminal spot. Current spacecraft position and velocity relative to this frame is supposed to be known at any time during the guidance. The simulation results of spacecraft guidance and control using proposed solution are presented. Analysis of the simulation results validates the basic performance of the proposed terminal guidance scheme. It should be noted that as the proposed scheme presuppose thrust variation on an undisturbed trajectory it makes sense to look for ways of reducing of required throttling range. The next phase of this research will be intended to carrying out terminal errors analysis and comparison of the accuracy of the proposed scheme and some other schemes.

Keywords: spacecraft guidance and control, lunar landing, constant acceleration trajectory, 3D terminal guidance

Acknowledgements: This work was supported by RFBR, project 14-11-00046.

For citation:

Fomichev A. V., Li E. K. Analytical 3D Terminal Guidance Algorithm for Lunar Landing, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 423—431.

DOI: 10.17587/mau.18.423-431

References

1. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Metody "gibkih" traektorij v zadachah terminal'nogo upravleniya vertikal'nymi manevrami letatel'nykh apparatov, In: S. N. Vasil'ev (Ed.), *Problemy upravleniya slozhnymi dinamicheskimi objektami aviacionnoj i kosmicheskoy tehniki* [Control problems of complex dynamic objects in aerospace engineering], Moscow, Mashinostroenie, 2015, pp. 51—110 (in Russian).

2. **Batenko A. P.** Sistemy terminal'nogo upravleniya [Terminal Control Systems], Moscow, Radio i svyaz', 1984, 161 p. (in Russian).

3. **Razygraev A. P.** Metod terminal'nogo upravleniya prostranstvennym dvizheniem pri mjagkoj posadke v zadannuju točku na poverhnosti planet, In: Razygraev A. P. *Osnovy upravleniya poljotom kosmicheskikh apparatov* [Fundamentals of spacecraft flight control], Moscow, Mashinostroenie, 1990, pp. 378—386 (in Russian).

4. **Klumpp A. R.** Apollo Lunar Descent Guidance, *Automatica*, 1974, vol. 10, no. 2, pp. 133—146.

5. **Lunghi P., Lavagna M., Armellin R.** A Semi-analytical Guidance Algorithm for Autonomous Landing, *Advances in Space Research*, 2015, vol. 55, no. 11, pp. 2719—2738.

6. **Chomel C. T., Bishop R. H.** Analytical lunar descent guidance algorithm, *Journal of guidance, control, and dynamics*, 2009, vol. 32, no. 3, pp. 915—926.

7. **Li M., Macdonald M., McInnes C. R., Jing W.** Analytical landing trajectories for embedded autonomy, *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2010, no. 224 (11), pp. 1177—1191.

8. **Branec V. N., Shmyglevskij I. P.** Primenenie kvaternionov v zadachah orientacii tvjordogo tela [Application of quaternions in problems of rigid body attitude control], Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).