

Telekommunikacii. Upravlenie, 2012, vol. 2, no. 145, pp. 13–19 (in Russian).

4. **Suhii N. N., Rukavishnikov V. L.** *Nauchnyy vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta grazhdanskoj aviacii*, 2012, no. 186, pp. 92–95 (in Russian).

5. **Eslami M.** *Theory of Sensitivity in Dynamic Systems: An Introduction*, Berlin, Springer-Verlag, 1994, 600 p.

6. **Rozenwasser E., Yusupov R.** *Sensitivity of Automatic Control Systems*, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C: CRC Press, 2000, 436 pp.

7. **Morzhov A. V., Faldin N. V.** *Izv. RAN. Teorija i sistemy upravlenija*, 2014, no. 6, pp. 14–24 (in Russian).

8. **Morzhova S. V., Faldin N. V.** *Problemy upravlenija i modelirovanija v slozhnyh sistemah: Trudy XII Mezhdunarodnoj konferencii*, Samara, Samarskij nauchnyj centr RAN, 2010, pp. 398–403 (in Russian).

9. **Faldin N. V., Morzhov A. V.** *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 2, pp. 81–88 (in Russian).

10. **Morzhov A. V., Morzhova S. V.** *Izvestija Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, Iss. 4, Tula, Publishing house of TulGU, 2016, pp. 236–247 (in Russian).

11. **Gamynin N. S.** *Gidravlicheskij privod sistem upravlenija*, Moscow, Mashinostroenie, 1972, 376 p. (in Russian).

12. **Morzhov A. V., Morzhova S. V.** *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2012, no. 6, pp. 27–34 (in Russian).

13. **Faldin N. V., Morzhov A. V.** *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2007, no. 2, pp. 2–9 (in Russian).

14. **Faldin N. V.** *Matematicheskie modeli, dinamicheskie harakteristiki i analiz sistem avtomaticheskogo upravlenija* (K. A. Pupkov, N. D. Egupov ed.), Moscow, Publishing house of MGTU im. N. Je. Bauman, 2004, pp. 573–636 (in Russian).

15. **Faldin N. V., Morzhov A. V.** *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2006, no. 11, pp. 13–19 (in Russian).

УДК 519.7:681.31

DOI: 10.17587/mau/18.407-414

И. Ф. Чебурахин, д-р техн. наук, проф., logicifch@yandex.ru,

О. Н. Гавриш, аспирант, gavrish.o@gmail.com,

НИУ МАИ

Об эффективных методах синтеза булевых формул и схем из функциональных элементов

Целью данной работы является уточнение верхних оценок сложности симметрических булевых функций из стандартного и Жегалкина базисов, а также разработка алгоритмов для автоматизации синтеза дискретных устройств обработки информации. Предлагается конструктивный метод синтеза формул и схем на основе рекуррентных соотношений (функциональных уравнений) [9], сопровождаемый получением заранее аналитически верхних оценок различных показателей сложности (по числу букв; числу подформул; по числу функциональных элементов), в том числе и для схем минимальной сложности.

Ключевые слова: булевы функции, синтез формул и схем, функционал, декомпозиция, сложность, минимизация, функциональные уравнения, симметрические функции

Введение

Имеющиеся значительные успехи в создании и совершенствовании дискретных логических управляющих и вычислительных устройств имеют следующее обоснование. В прошлом столетии на основе булевой алгебры (математической логики) и достижений в электронике создаются первая, вторая и последующие ЭВМ. Далее процесс развития ЭВМ циклично повторяется: успехи математической логики подталкивают к созданию и решению других теоретических вопросов, относящихся к технике (аппаратная часть проекта), в свою очередь, для решения возникающих технических проблем приходится обращаться к математической логике и т. д. Таким образом, вначале создаются образцы вычислительной и управляющей техники, а затем они совершенствуются.

При этом разрабатываются методы минимизации синтеза формул и схем из функциональных элементов (ФЭ) по различным показателям сложности в стандартном базисе и в базисе Жегалкина. Из проводимых исследований в области математической кибернетики и дискретной математики следует, что получение требуемого минимального ре-

шения по определенным показателям сложности неизбежно предполагает использование алгоритмов переборного характера. Следствием этого является большая сложность (в том числе и вычислительная сложность и трудоемкость) получения такого решения уже для функций небольшой размерности. Это потребовало разработки новых подходов к постановке задачи и ее решению, заметно отличающихся по трудоемкости от переборных [1–3].

В ряде работ создана теория специальных алгоритмов оптимизации, алгоритмов вычисления оценок, алгебраическая теория алгоритмов и показано, что можно даже в явном виде строить экстремальные по качеству алгоритмы для решения очень широких классов трудно формализуемых задач, а также разрабатывать математические и прикладные аспекты теории интеллектуальных систем [4–6].

Особо важной является задача вывода оценки показателя сложности при представлении булевой функции в классах формул и схем. Для решения этой задачи в случае получения грубой оценки выбранного показателя сложности в работе применяется метод, основанный на функциональных уравнениях (рекуррентных соотношениях). Метод близок к применяемому ранее методу структурно-функ-

циональной декомпозиции ("от функции", "от аргументов"). Если применяемый аналитический метод структурно-функциональной декомпозиции дает грубую оценку показателя сложности, то применяется уточненный алгоритм для вычислительного метода [7, 8].

Итак, рассматривается проблема реализации булевых функций в классе формул и схем из функциональных элементов в разных базисах. Получаемые при этом схемы применяются в дискретных логических устройствах обработки информации и управления, от сложности (качества) которых зависят основные характеристики вычислительной и управляющей техники. Отмечено, что симметрические булевы функции чаще находят применение при проектировании вычислительных устройств в силу их специфических свойств [7, 8].

В качестве меры сложности (качества) представления функции f формулой F или схемой S из ФЭ определяем соответствующие показатели (дискретные функционалы):

$L_G(f, G)$ — суммарное число вхождений символов переменных (букв) в формулу F , реализующую функцию f в базисе G ;

$L_F(f, G)$ — число подформул (базисных) в F ;

$Dep_F(f, G)$ — глубина F ;

$L_S(f, G)$ — число ФЭ в схеме S , реализующей функцию f ;

$Dep_S(f, G)$ — глубина S , определяемая как наибольшее число ФЭ в цепочке среди всех цепочек, соединяющих вход с выходом.

Между собой эти показатели имеют сложные связи, они по-разному влияют на другие показатели качества синтезируемых схем.

По практическим, экономическим и другим соображениям показатели сложности (дискретные функционалы) минимизируем. При представлении функций в классе формул для минимизации показателей сложности используются эквивалентные преобразования, включая получение скобочных формул, а в классе схем для минимизации числа ФЭ дополнительно применяется ветвление их выходов [7, 8].

1. Функциональные уравнения (ФУ)

Рассмотрим несколько определений разных типов функциональных уравнений (ФУ), относящихся к новым методам [7, 8].

Пусть X — множество булевых переменных, $g^{(2)}$ — двухместная булева функция, задающая начальный член $f^{(2)}$ последовательности изучаемого класса функций $f^{(n)}(X)$, $n \geq 2$, и $h^{(2)}$ — функция рекурсии, входящая в базис G или представляемая через базисные функции. Тогда рекуррентное соотношение, получаемое на основе операции суперпозиции, имеет вид

$$f^{(n_1 + n_2)}(X) = h(f^{(n_1)}(X_1), f^{(n_2)}(X_2)), \quad (1)$$

где $X_1 \cup X_2 = X$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n = n_1 + n_2$. Назовем соотношение (1) основным функциональным уравнением, несмотря на частный характер местности базисных функций $g^{(2)}$ и $h^{(2)}$. Данное определение ФУ отлично от имеющихся других.

При $n_1 = n - 1$, $n_2 = 1$ получаем ФУ типа 1:

$$f^{(n)} = h(f^{(n-1)}, x_n); \quad (2)$$

для симметрических функций при $n = 2^s$, $s = 1, 2, \dots$, $n_1 = n_2 = n/2$ получаем ФУ типа 2:

$$f^{(n)}(X) = h(f^{(n/2)}(X_1), f^{(n/2)}(X_2)); \quad (3)$$

при $n_1 = n - 2$, $n_2 = 2$ это будет ФУ типа 3:

$$f^{(n)} = h^{(3)}(f^{(n-2)}, x_{n-1}, x_n), \quad (4)$$

где $h^{(3)}$ — трехместная булева функция.

Применяем метод ФУ для получения оценки сложности реализации произвольной булевой функции $f^{(n)} \in P_2^{(n)}$ в базисе G_3 .

Пусть полином Жегалкина $F^{(n)} = K_1 \oplus \dots \oplus K_i \oplus \dots \oplus K_m$, где K_i — монотонная элементарная конъюнкция ранга r_i , $1 \leq i \leq m$, т. е. $F^{(n)}$ обладает строением $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_i, \dots, r_m)$, $r_1 \geq \dots \geq r_i \geq \dots \geq r_m$ (неравенства для порядка), и реализует произвольную функцию $f^{(n)}$. Для полинома Жегалкина $F^{(n)}$ определяем вектор $\mathbf{p}$ повторяемости переменных множества $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ в формуле $F^{(n)}$ (учитывая возможное приложение при разработке прикладных программ). Пусть вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n)$, где переменная x_i , $1 \leq i \leq n$, повторяется в формуле $F^{(n)}$ p_i раз.

Находим $p_i = \max\{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n\}$ и, используя булеву алгебру, получаем функциональное соотношение

$$F^{(n)} = ((x_i \cdot F_0^{(n-1)}) \oplus F_1^{(n-1)}), \quad (5)$$

здесь нижние индексы 0 и 1 — номера соответствующих остаточных подфункций, рассматриваемых на одном множестве $X' = X \setminus \{x_i\}$; " $\cdot$ " — конъюнкция (точка — знак умножения — может также применяться для обозначения арифметического умножения). На основе ФУ (5) строится алгоритм градиентного типа, позволяющий получить требуемую суперпозиционную формулу $F_{с.ф.}^{(n)}$. С помощью соотношения (5) аналитически получаем верхнюю оценку показателя сложности L_F . Каждое применение ФУ (5) порождает не более двух базисных функций и не более двух остаточных функций.

Соотношение (1) применяется к аргументам функции h и так далее, позволяя получить суперпозиционную формулу $F_{с.ф.}$, реализующую функцию $f^{(n)}$. Таким образом, ФУ представляет собой конструктивный метод построения булевых функций определенного класса на основе заданных. Оно характеризуется определенными выше показателями качества, для каждого из которых выводится свое ФУ показателя качества (ФУ_{ПК}). Для получе-

ния оценок показателей качества применяются как непосредственное решение уравнений, так и моделирование ФУ_{ПК}. ФУ (5) применяется до тех пор, пока остаточные функции не будут совпадать с базисными.

2. Элементарные симметрические полиномы (ЭСП) Жегалкина

Рассмотрим элементарные симметрические полиномы Жегалкина $F_i^{(n)}$ (верхний индекс n — конечное число переменных, нижний индекс i — степень полинома, т. е. $2 \leq n \leq N$ и тогда $1 \leq i \leq n$; отличать от произвольного полинома Жегалкина [7, 8]). Они имеют вид

$$\begin{aligned} F_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \oplus \dots \oplus x_n; \\ F_2^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_3 \oplus \dots \oplus x_{n-1} \cdot x_n; \quad (6) \\ &\dots \\ F_n^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \cdot \dots \cdot x_n. \end{aligned}$$

Формулы (6) можно автоматизировано получать с помощью табл. 1 и использовать при синтезе схем из ФЭ, а также применять при создании определенной базы данных.

Пусть для симметрического полинома Жегалкина $F_i^{(n)}$ построена табл. 1 с n строками, числом столбцов i , $1 \leq i \leq n$. Первый и последний элементы строки всегда определены как функции исследованных счетных классов $F_0^{(n)}$ и $F_n^{(n)}$ (полностью исследованных как функции простых классов "&" и "⊕"). Получаем со 2-го по n -й элементы (полиномы Жегалкина) строки с номером $n + 1$ по правилу (см. выделенный фрагмент табл. 1, меняющийся в зависимости от степени i полинома Жегалкина):

$$F_3^{(n+1)} = (F_3^{(n)} \oplus (x_{n+1} \cdot F_2^{(n)})).$$

Таблица 1

Число переменных (n)	Полиномы Жегалкина $F_i^{(n)}, i = 1, 2, \dots, n$					
	$F_1^{(n)}$	$F_2^{(n)}$	$F_3^{(n)}$	$F_4^{(n)}$	$F_5^{(n)}$	$F_6^{(n)}$
	2	3	4	5	6	7
2	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$				
3	$F_1^{(3)}$	$F_2^{(3)}$	$F_3^{(3)}$			
4	$F_1^{(4)}$	$F_2^{(4)}$	$F_3^{(4)}$	$F_4^{(4)}$		
...	...	...	...	...	...	...
n	$F_1^{(n)}$	$F_2^{(n)}$	$F_3^{(n)}$	$F_4^{(n)}$	$F_5^{(n)}$	$F_6^{(n)}$
$n + 1$			$F_3^{(n+1)}$			

В общем виде получается следующий результат:

$$F_i^{(n+1)} = (F_i^{(n)} \oplus (x_{n+1} \cdot F_{i-1}^{(n)})),$$

где $2 \leq i \leq n$.

Теперь исследуем представление ЭСП Жегалкина (в качестве примера с переменной x_n)

$$F_2^{(n)} = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_3 \oplus \dots \oplus x_{n-1} \cdot x_n, \quad n \geq 2, \quad (7)$$

в базисе G_3 на основе ФУ типа 1 (градиентного алгоритма):

$$F_2^{(n)} = (F_2^{(n-1)} \oplus (x_n \cdot F_1^{(n-1)})), \quad n \geq 3. \quad (8)$$

Реализация функции $F_2^{(n)}$ на основе ФУ (8) в классах формул и схем из ФЭ характеризуется следующими пятью ФУ_{ПК}:

$$\begin{aligned} L_6(F_2^{(n)}, G_3) &= \\ &= L_6(F_2^{(n-1)}, G_3) + L_6(F_1^{(n-1)}, G_3) + 1; \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_F(F_2^{(n)}, G_3) &= \\ &= L_F(F_2^{(n-1)}, G_3) + L_F(F_1^{(n-1)}, G_3) + 2; \quad (10) \end{aligned}$$

$$Dep_F(F_2^{(n)}, G_3) = Dep_F(F_1^{(n-1)}, G_3) + 1; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} L_S(F_2^{(n)}, G_3) &= \\ &= L_S(F_2^{(n-1)}, G_3) + L_S(F_1^{(n-1)}, G_3) + 2; \quad (12) \end{aligned}$$

$$Dep_S(F_2^{(n)}, G_3) = Dep_S(F_1^{(n-1)}, G_3) + 1. \quad (13)$$

Уравнения (11) и (13) совпадают (рассмотрим их ниже по тексту), уравнения (10) и (12) совпадают, причем уравнения (9) и (10) сводятся к одному разностному уравнению с разными начальными условиями.

Начальные условия для показателей L_6 и L_F и $n = 2$ следующие:

$$F_1^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2, \quad F_2^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

$$L_6(F_2^{(2)}, G_3) = L_6(F_1^{(2)}, G_3) = 2,$$

$$L_F(F_2^{(2)}, G_3) = L_F(F_1^{(2)}, G_3) = 1.$$

Так как здесь схемы S без ветвления (см. ниже замечание 1), то

$$\begin{aligned} L_S(F_2^{(n)}, G_3) &= L_F(F_2^{(n)}, G_3); \\ Dep_S(F_2^{(n)}, G_3) &= Dep_F(F_2^{(n)}, G_3). \quad (14) \end{aligned}$$

Вводим обозначения

$$\begin{aligned} u_n &= L_6(F_1^{(n)}, G_3), \quad u_{n-1} = L_6(F_1^{(n-1)}, G_3) \quad (\text{для } L_6) \text{ и} \\ u_n &= L_F(F_1^{(n)}, G_3), \quad u_{n-1} = L_F(F_1^{(n-1)}, G_3) \quad (\text{для } L_F). \end{aligned}$$

Тогда уравнения (9) и (10) сводятся к одному разностному уравнению с разными начальными условиями:

- для L_6 :

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + L_6(F_1^{(n-1)}, G_3) + 1 = \\ &= u_{n-1} + (n-1) + 1 = u_{n-1} + n, u_2 = 2; \end{aligned} \quad (15)$$

- для L_F :

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + L_F(F_1^{(n-1)}, G_3) + 2 = \\ &= u_{n-1} + (n-2) + 2 = u_{n-1} + n, u_2 = 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Решения разностных уравнений (15) и (16) следующие:

$$u_n = L_6(F_2^{(n)}, G_3) = (n^2 + n - 2)/2; \quad (17)$$

$$u_n = L_F(F_2^{(n)}, G_3) = (n^2 + n - 4)/2. \quad (18)$$

Тогда показатель L_S , с учетом выражения (14), принимает вид

$$L_S(F_2^{(n)}, G_3) = (n^2 + n - 4)/2. \quad (19)$$

Для схемы S (без ветвления) оценка (19) является верхней. Рассмотрим задачу минимизации показателя L_S на основе метода ветвления выходов ФЭ. Для ее решения эффективно следующее разложение ЭСП Жегалкина второй степени через полиномы первой степени, получаемое на основе выражения (8) (скобки проставляются в целях определения порядка операций, иногда только для упрощения опускаются, если возможно):

$$\begin{aligned} F_2^{(n)} &= \underline{(F_2^{(n-2)} \oplus (x_{n-1} \cdot F_1^{(n-2)})) \oplus (x_n \cdot F_1^{(n-1)})} = \\ &= \dots = F_2^{(2)} \oplus x_3 \cdot F_1^{(2)} \oplus x_4 \cdot F_1^{(3)} \oplus \dots \oplus \\ &\quad \oplus x_{n-1} \cdot F_1^{(n-2)} \oplus x_n \cdot F_1^{(n-1)} = \\ &= x_2 \cdot F_1^{(1)} \oplus x_3 \cdot F_1^{(2)} \oplus x_4 \cdot F_1^{(3)} \oplus \dots \oplus \\ &\quad \oplus x_{n-1} \cdot F_1^{(n-2)} \oplus x_n \cdot F_1^{(n-1)} = \oplus_{i=2}^n x_i \cdot F_1^{(i-1)} = \\ &= \underline{(((x_1 \cdot x_2) \oplus x_3 (x_1 \oplus x_2)) \oplus x_4 \cdot ((x_1 \oplus x_2) \oplus x_3)) \oplus} \\ &\quad \underline{\oplus \dots \oplus x_{n-1} \cdot (x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-2}) \oplus} \\ &\quad \underline{\oplus x_n \cdot ((x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-2}) \oplus x_{n-1})} = F_{с.ф.}, \end{aligned} \quad (20)$$

где F — искомая суперпозиционная формула. Первое подчеркнутое выражение в формуле (20) представляет собой уже повторное преобразование ФУ (8), дальнейшее повторение таких преобразований приводит к полному разложению ЭСП Жегалкина $F_2^{(n)}$ в ряд по линейным функциям (с возрастанием числа переменных) и получению суперпозиционной формулы $F_{с.ф.}$.

Замечание 1. В первом подчеркнутом выражении (20) неявно записана возможность ветвления для класса схем из ФЭ, в последнем подчеркнутом выражении (20) она присутствует, можно сказать,

очевидно (сумма в скобках умножается на переменную и следом суммируется с ней же). На основе ФУ (8) и разложения (20) (последнее выражение) получаем уточнение ФУ_{ПК} (12) с начальным условием:

$$L_S(F_2^{(3)}, G_3) = 4. \quad (21)$$

Оно состоит в том, что ЭСП Жегалкина $F_1^{(n-1)}$ участвует в построении формулы F дважды (и ФУ (10) сохраняется), но в схеме S за счет ветвления используется один раз и для итерации показатель L_S фактически уменьшается на единицу. Поэтому второе слагаемое в ФУ (8) для каждой итерации, кроме последней, т. е. для $k = 3, 4, 5, \dots, n-1$, увеличивает значение L_S на единицу (один ФЭ, который участвует и в ветвлении), а ФУ_{ПК} (12) тогда принимает вид

$$\begin{aligned} L_S(F_2^{(n)}, G_3) &= \\ &= L_S(F_2^{(n-1)}, G_3) + 3, L_S(F_2^{(3)}, G_3) = 5. \end{aligned} \quad (22)$$

Итак, для (22) разностное уравнение с начальным условием есть

$$u_n - u_{n-1} = 3, u_3 = 5. \quad (23)$$

Решение уравнения (23) имеет вид

$$u_n = 3n - 4, n \geq 3. \quad (24)$$

Возвращаемся к исходному показателю L_S , учитывая, что последняя итерация неполная (соответственно уменьшаем оценку (24) на единицу):

$$L_S(F_2^{(n)}, G_3) = 3n - 5, n \geq 3. \quad (25)$$

Таким образом, за счет использования ветвления на выходе ФЭ порядок многочлена (19) оценки показателя L_S уменьшен на единицу. Докажем минимальность оценки (25) методом математической индукции.

При реализации функции $F_2^{(3)}$ схемой из ФЭ получение $F_1^{(3)}$ не требуется, но для больших значений n ($n \geq 4$) — обязательно (рис. 1).

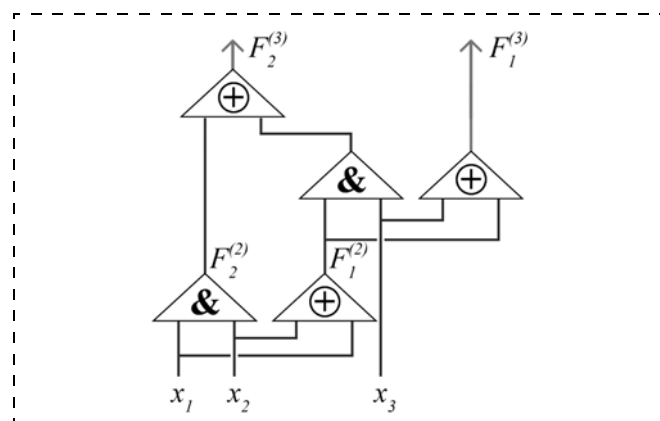


Рис. 1. Начальный фрагмент схемы, реализующей ЭСП Жегалкина $F_2^{(n)}$, $n \geq 4$ (первая итерация, $k = 1$)

При $n = 3$ для реализации $F_2^{(3)} = x_1 x_2 \oplus x_3 (x_1 \oplus x_2)$ используем для двух базисных функций $g_{\&}^{(2)}$ и $g_{\oplus}^{(2)}$ по два соответствующих ФЭ (рис. 1, иллюстрацию можно проводить также на основе ФУ), получая $L_S(F_2^{(3)}, G_3) = 4$, т. е. для начальных условий утверждение имеет место.

Предположим, что для n утверждение $L_S(F_2^{(n)}, G_3) = 3n - 5$ истинно, и надо получить $L_S(F_2^{(n+1)}, G_3) = 3n - 2$.

На основе ФУ (8) запишем: $F_2^{(n+1)} = (F_2^{(n)} \oplus (x_{n+1} \cdot F_1^{(n)}))$.

Рассмотрим показатель $L_S(F_2^{(n+1)}, G_3)$ и запишем его на основе ФУ_{ПК} (22), т. е. $L_S(F_2^{(n+1)}, G_3) = L_S(F_2^{(n)}, G_3) + 3 = 3n - 2$ (рис. 2), что и требовалось вывести:

$$L_S(F_2^{(n)}, G_3)_{\min} = 3n - 5. \quad (26)$$

Она также получается на основе метода структуризации ФУ:

для ЭСП $F_2^{(n)}$, $n \geq 2$, в базисе G_3 на основе ФУ типа 1 число итераций равно $(n - 2)$, причем при реализации начальных условий требуется пять ФЭ (см. рис. 1); в каждой из первых $(n - 4)$ итерациях используется три ФЭ (рис. 2, а); в последней итерации — два ФЭ (рис. 2, б). Итого, вычисляя $5 + 3(n - 3) - 1$, повторяем оценку (26).

Оценка (26) справедлива также в классе монотонных симметрических булевых функций, задаваемых ДНФ, представляемых на основе ФУ типа 1 в базисе $G_2 = \{\&, \vee\}$.

В отношении глубины заметим, что оценки Dep_F и Dep_S получаются на основе ФУ (8) и ФУ_{ПК} (11) (и $Dep_S = Dep_F$).

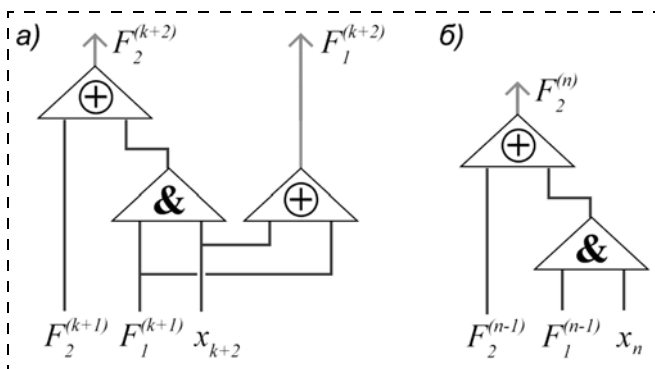


Рис. 2. Общий фрагмент схемы, реализующей ЭСП Жегалкина $F_2^{(n)}$, k -я полная итерация, $2 \leq k < n - 2$ (а); последний фрагмент схемы, реализующей ЭСП Жегалкина $F_2^{(n)}$, неполная итерация, $k = n - 2$ (б)

При построении схемы S выполняется ветвление выходов ФЭ при реализации ЭСП Жегалкина $F_1^{(n-1)}$: один выход идет на образование конъюнкции с переменной x_n , другой — на получение $F_1^{(n)}$ для следующей итерации. При этом участвующие в этом две операции чередуются, образуя цепочку, параллельную основной цепочке вычислений $F_2^{(n)}$, меньшей глубины. Вклад, который вносит второе слагаемое правой части (20) в значение глубины за счет ветвления, равен единице. Поэтому приходим к уравнению

$$u_n - u_{n-1} = 2, u_3 = 3. \quad (27)$$

Для (27) получаем решение ФУ_{ПК} (11), оценки Dep_F и Dep_S есть $u_n = 2n - 3$. Эти оценки улучшаются следующим образом.

Определим глубину ЭСП Жегалкина $F_2^{(n)}$ в базисе G_3 на основе определения и ФУ (8):

$$Dep_F(F_2^{(n)}, G_3) = \max\{Dep_F(F_2^{(n-1)}, G_3); 1 + Dep_F(F_1^{(n-1)}, G_3)\} + 1. \quad (28)$$

Моделируя процесс построения формулы F для $n = 4, 5, 6, \dots$, вычислительным методом находим сеточную функцию u_n (табл. 2) для $Dep_F(F_2^{(n)}, G_3)$, откуда она находится аналитически, т. е.

$$Dep_F(F_2^{(n)}, G_3) = n.$$

Таблица 2

$n = 3$	4	5	6	7	8	9	...
$u_n = 3$	4	5	6	7	8	9	...

Для формулы F , полученной данным методом, изоморфно строится схема S (без ветвления), которая преобразуется на основе ФУ (20), и показатель L_S минимизируется за счет ветвления, так как ФУ (20) это позволяет. Таким образом,

$$Dep_F(F_2^{(n)}, G_3) = Dep_S(F_2^{(n)}, G_3) = n. \quad (29)$$

Также можно видеть из схемы синтеза схемы (5), что глубина схемы зависит от двух составляющих: глубины $F_2^{(n-1)}$ и $F_1^{(n-1)}$. Глубина левого рукава задана рекурсивно и зависит от максимума (см. (28)), правый же рукав имеет некоторую вычислимую глубину. Рассмотрим последовательно, начиная с минимальных n и r :

$$F_2^{(3)} = F_2^{(2)} \oplus x_3 \cdot F_1^{(2)};$$

...

$$F_2^{(n)} = F_2^{(n-1)} \oplus x_n \cdot F_1^{(n-1)}.$$

Правый рукав здесь — функции вида $g = x_n \cdot F_1^{(n-1)}$, с подсчитанной ранее глубиной $n - 1$,

т. е. правый рукав имеет прирост по глубине, равный единице. Левый рукав, как видно из соотношения (28), также имеет прирост, равный 1. Таким образом, достаточно показать, что левый рукав имеет меньшее или равное значение показателя глубины на начальный момент времени: $Dep_S(F_1^{(2)}, G_3) = 1$,

$Dep_S(F_2^{(2)}, G_3) = 1$. Отсюда глубина правого рукава равна двум, что больше глубины левого рукава.

Для каждого ряда функций, описываемых выражением (5), левые рукава начинаются с $F_n^{(n)}$, глубина которых равна $n - 1$. Отсюда, при приросте глубины схемы правого рукава +1 при росте степени полинома глубина правого рукава всегда будет больше глубины левого, и итоговая глубина схемы зависит от значения правого рукава, что дает показатель глубины: $Dep_S(F_r^{(n)}, G_3) = n + r - 2, n > r$.

Подсчитанные показатели глубины приведены в табл. 3.

Аналогичным образом в работах [10–12] получены оценки показателя L_S для ЭСП Жегалкина:

$$L_S(F_1^{(n)}, G_3)_{\min} = L_S(F_n^{(n)}, G_3) = n - 1;$$

$$L_S(F_3^{(n)}, G_3)_{\min} = 5n - 13;$$

$$L_S(F_4^{(n)}, G_3) = 7n - 25;$$

$$L_S(F_5^{(n)}, G_3) = 9n - 41.$$

Таблица 3

Степень	Число переменных (n)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2		1	3	4	5	6	7	8	9	10
3			2	5	6	7	8	9	10	11
4				3	7	8	9	10	11	12
5					4	9	10	11	12	13
6						5	11	12	13	14
7							6	12	13	14
8								7	15	16
9									8	17
10										9

Таблица 4

Число переменных (n)	Сложность реализации ЭСП Жегалкина $F_i^{(n)}, i = 1, 2, \dots, n$, по числу ФЭ					
	$L_S(F_1^{(n)})$	$L_S(F_2^{(n)})$	$L_S(F_3^{(n)})$	$L_S(F_4^{(n)})$	$L_S(F_5^{(n)})$	$L_S(F_6^{(n)})$
2	1	1				
3	2	4	2			
4	3	7	7	3		
5	4	10	12	10	4	
6	5	13	17	17	13	5
7	6	16	22	24	22	
...	...	...	...	...	...	...
n	n - 1	3n - 5	5n - 13	7n - 25	9n - 41	...

Теперь в табл. 1 для каждого вхождения полинома Жегалкина $F_i^{(n)}$ вместо него подставляем соответствующую имеющуюся минимальную оценку показателя сложности $L_S(F_i^{(n)}, G_3)$, получая табл. 4.

Табл. 4 заполнена для тех значений переменных i и n , для которых выведены оценки показателей сложности $L_S(F_i^{(n)}, G_3)$, $1 \leq i \leq 5$, и при условии, что они помещаются в отведенной ей части табл. 4. При их размещении использована часть таблицы между вертикалью, относящейся к столбцу $L_S(F_1^{(n)})$ (для $2 \leq n \leq N$ и тогда $1 \leq i \leq n$), и ниже смещенной диагонали (вверх), характеризуемой полиномами Жегалкина $F_n^{(n)}$, $2 \leq n \leq N$. Важной особенностью оценок табл. 4, как ранее было отмечено [9], является совпадение оценок, полученных на основе методов последовательной и параллельной декомпозиции.

Табл. 4 может использоваться для получения оценок сложности $L_S(F_i^{(n)}, G_3)$, (для соответствующей базы данных). Но что делать, если потребуются оценки из незаполненной части таблицы (нижний правый угол)?

Индексы членов последовательности определяются значением n в столбце. В таком смысле данные табл. 2 упорядочены, приведены к одному стандарту. Представляет интерес следующая задача.

Основная задача 1. Для заданного полинома Жегалкина $F_i^{(n)}$, т. е. для заданных n и i , где $2 \leq n \leq N$ и $1 \leq i \leq n$, получить аналитически функционал сложности $L_S(F_i^{(n)}, G_3)$ для обеих переменных n и i .

Получать решение задачи 1 можно методами моделирования и/или структуризации, как это делалось в примере для полинома Жегалкина $L_S(F_2^{(n)})$. Это решение трудоемко и сильно усложняется при возрастании n . К тому же, возникают вопросы: на каких значениях переменных n и i надо остановиться; как хранить в памяти всю табл. 4 даже для небольших значений параметров i и n ?

Искомый функционал есть

$$L_S(F_i^{(n)}, G_3) =$$

$$= (n - 1) + (i - 1)(2n - 4) - (2i^2 - 6i + 4).$$

Для решения задачи 1 можно предложить следующий подход. Для имеющихся оценок в табл. 4 провести исследование и вывести общую универсальную оценку $L_S(F_i^{(n)}, G_3) = L_S(i, n)$, зависящую от двух переменных n и i , для $2 \leq n \leq N$ и тогда $1 \leq i \leq n$.

Введем обозначения $U_i = L_S(F_i^{(n)}, G_3)$, $1 \leq i \leq n$.

Для имеющихся оценок сложности [12] проводим исследование и выполняем преобразования, разбивая каждую из них на три алгебраических слагаемых (кроме первой и второй оценок, где просто). Итак, из каждого U_i , $3 \leq i \leq n - 1$ (строки), выделяем пер-

вое слагаемое $(n - 1)$, затем из оставшегося выражения выделяем произведение $(i - 1)(2n - 4)$, т. е.

$$U_1 = L_S(F_1^{(n)}, G_3) = n - 1;$$

$$U_2 = L_S(F_2^{(n)}, G_3) = 3n - 5 = (n - 1) + (2n - 4);$$

$$U_3 = L_S(F_3^{(n)}, G_3) = 5n - 13 = (n - 1) + 2(2n - 4) - 4;$$

$$U_4 = L_S(F_4^{(n)}, G_3) = 7n - 25 = (n - 1) + 3(2n - 4) - 12;$$

$$U_5 = L_S(F_5^{(n)}, G_3) = 9n - 41 = (n - 1) + 4(2n - 4) - 24;$$

$$U_6 = L_S(F_6^{(n)}, G_3) = 11n - 61 = (n - 1) + 5(2n - 4) - 40,$$

...

Тогда оставшаяся часть — некоторая сеточная функция U_i ; 4, 12, 24, 40, ..., для значений аргумента i , $3 \leq i \leq n - 1$, получается вычитанием из исходного выражения $L_S(F_i^{(n)}, G_3)$ первых двух слагаемых.

После проведенных исследований функцию U_i ищем аналитически в виде многочлена по i с неопределенными коэффициентами. Составляем разности первого, второго и далее порядков, пока не получим нулевую строку (если такая существует). Тогда из табл. 5 следует, что разности третьего порядка нулевые, означающие второй порядок для многочлена U_i .

Таблица 5

i	3	4	5	6	7	...
U_i	4	12	24	40	60	...
$\Delta U_i = U_{i+1} - U_i$		8	12	16	20	...
$\Delta^2 U_i = \Delta U_{i+1} - \Delta U_i$			4	4	4	...
$\Delta^3 U_i$				0	0	...

Поэтому находим третье слагаемое, удовлетворяющее начальному условию, в виде многочлена второй степени

$$U_i = a_0 i^2 + a_1 i + a_2. \quad (30)$$

Решаем систему линейных уравнений, получаемую из выражения (30) (для $i = 3, 4, 5$) следующим образом, минимизируя вычислительную сложность: из 1-го уравнения вычитаем 2-е, из 2-го вычитаем 3-е, затем выполняется эта же процедура для полученных первых двух уравнений, т. е.

$$a_0 \cdot 5^2 + a_1 \cdot 5 + a_2 = 24,$$

$$a_0 \cdot 4^2 + a_1 \cdot 4 + a_2 = 12,$$

$$a_0 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_2 = 4.$$

И, окончательно, находим $a_0 = 2$; $a_1 = -6$; $a_2 = 4$.

Итого, получена функция $U_i = 2i^2 - 6i + 4$. С третьей составляющей искомым функционал сложности имеет вид

$$U(i, n) = L_S(F_i^{(n)}, G_3) = (n - 1) + (i - 1)(2n - 4) - (2i^2 - 6i + 4). \quad (31)$$

Итак, аналитически получена верхняя оценка показателя $L_S(F_i^{(n)}, G_3)$.

Заключение

Теперь вместо того, чтобы заполнять табл. 4, создавая БД и применяя правила вывода (как это делается в математической логике), используем универсальную оценку (31). Этот метод, бесспорно, будет эффективен при автоматизации и минимизации синтеза и будет требовать меньшие вычислительные ресурсы по сравнению с другими. При этом минимизируется объем рабочей памяти. Итак, полученный функционал $L_S(i, n)$ с большим успехом заменяет ранее созданные таблицы [7, 8].

Список литературы

1. Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. 1962. № 8.
2. Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960.
3. Яблонский С. В. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. 1959. № 2.
4. Теряев Е. Д., Петрин К. В., Филимонов Н. Б., Филимонов А. Б. Агентные технологии в автоматизированных информационно-управляющих системах. Часть 1. Основы агентного подхода // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 7. С. 11–21.
5. Теряев Е. Д., Петрин К. В., Филимонов Н. Б., Филимонов А. Б. Агентные технологии в автоматизированных информационно-управляющих системах. Часть II. Агентные решения в задачах контроля и управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 10. С. 11–21.
6. Вагин В. Н., Головина Е. Ю., Загорянская А. А. и др. Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах. М.: Физматлит, 2004.
7. Чебурахин И. Ф. Алгоритмизация представления булевых функций, минимальной сложностью, в базе Жегалкина в классах формул и схем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 12. С. 7–14.
8. Чебурахин И. Ф. Математические модели для минимизации и автоматизации синтеза дискретных управляющих систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 4. С. 5–13.
9. Чебурахин И. Ф. Сложность булевых функций для интеллектуальных систем синтеза цифровых ИС // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 3. С. 150–165.
10. Чебурахин И. Ф. Показатели сложности симметрических полиномов Жегалкина. Тез. докл. XV Международной конф. "Проблемы теоретической кибернетики" (Казань, 2–7 июня 2008 г.). Казань, 2008. С. 123.
11. Чебурахин И. Ф. Сложность симметрических полиномов Жегалкина // XVII Международная школа-семинар "Синтез и сложность управляющих систем" имени академика О. Б. Лупанова (27.10–1.11.2008. Новосибирск), 2008. С. 180–185.
12. Чебурахин И. Ф., Цурков В. И. Модели для оптимизации и автоматизации синтеза дискретных устройств обработки информации в мехатронных системах // 3-я Российская мультиконференция по проблемам управления. Материалы 7-й научно-технической конференции "Мехатроника, автоматизация, управление МАУ-2010". 12–14 октября 2010. С. 420–423.

About One Efficient Method of Synthesis of Boolean Formulas and Circuits of Functional Elements

I. F. Cheburakhin, logicifch@yandex.ru✉, O. N. Gavrish, gavrish.o@gmail.com,
MAI (NRU) — Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russian Federation

Corresponding author: Cheburakhin Igor F., PhD, Professor,
MAI (NRU) — Moscow Aviation Institute (National Research University),
Moscow, 125993, Russian Federation, e-mail: logicifch@yandex.ru

Received on September 20, 2016

Accepted on October 26, 2016

Currently relevance of modeling problems of analysis and synthesis of mathematical models of discrete logic control and computing devices persists. Particularly important is the task of estimating the output of difficulty in presenting a Boolean function (BF) in the classes of formulas and schemes of functional elements (FE). This problem is still relevant today. Because of ongoing research in the field of mathematical cybernetics and discrete mathematics should be that obtaining the required minimum solutions using dimensions of complexity inevitably involves the use of nature exhaustive search algorithms. The result is a greater complexity (including computational complexity and labor input) obtaining such a decision has the functions of small dimension. This required the development of new approaches formulation of the problem and its solutions, significantly differ in the complexity of exhaustive search [1–3]. So, the problem of the realization of Boolean functions in the class of formulas and — circuits made of functional elements in different bases. Obtained in this scheme are applied in discrete logic devices, and management information processing, the complexity (quality) of the main characteristics of which depend on computing and control engineering. And it noted that the symmetric Boolean functions are increasingly being used in the design of computing devices due to their specific properties [7–8]. The purpose of this paper is to clarify the upper bounds for the complexity of symmetric BF in standart and Zhegalkin bases, as well as the development of algorithms to automate the synthesis of discrete information processing devices. An efficient constructive method synthesis of digital circuits and formulas is offered. This method is based on recurrence relations (functional equations — FE [9]) and is accompanied by a receipt in advance analytically upper estimates of various indicators of complexity (the number of letters, number of subformulas; according to the number of functional elements), including schemes for minimum complexity. In this paper we consider some classes of functions, which are accurate upper bounds for the complexity metrics. To automate the process and expanding the study of individual cases the algorithm implemented structural and functional decomposition [2] is used. A convenient model for the representation of a Zhegalkin polynomial form that used in the algorithm the matrix representation has been designed. The results are applicable as in the synthesis device (at the logical design) in multiprocessor computing and control systems, and the development of algorithms for the effective operation of these systems.

Keywords: boolean function, syntheses formula and circuit, decomposition, difficulty, minimization, functional of the equation, symmetric functions

For citation:

Cheburakhin I. F., Gavrish O. N. About One Efficient Method of Synthesis of Boolean Formulas and Circuits of Functional Elements, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 11, pp. 407–414.

DOI: 10.17587/mau/18.407-414

References

1. Zhuravlev Yu. I. *Teoretiko-mnozhestvennye metody v algebre logiki* (Set-theoretic methods in the algebra of logic), *Problemy Kibernetiki*, 1962, no. 8 (in Russian).
2. Lupanov O. B. *O slozhnosti realizatsii funktsiy algebr logiki formulami* (About the complexity of realization of Boolean functions by formulas), *Problemy Kibernetiki*, 1960, iss. 3 (in Russian).
3. Yablonsky S. V. *Ob algoritmicheskikh trudnostyakh sinteza minimalnykh kontaktnykh skhem* (About algorithmic difficulties of synthesis of minimal contact circuits), *Problemy kibernetiki*, 1959, no. 2 (in Russian).
4. Teryaev Ye. D., Petrin K. V., Filimonov A. B., Filimonov N. B. *Agentnye tekhnologii v avtomatizirovannykh informatsionno-upravlyayushchikh sistemakh. Chast I. Osnovy agentnogo podhoda* (Agent-based technology in automated information control systems. Part I. Basics of agent-based approach), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye*, 2010, no. 7, pp. 11–21 (in Russian).
5. Teryaev Ye. D., Petrin K. V., Filimonov A. B., Filimonov N. B. *Agentnye tekhnologii v avtomatizirovannykh informatsionno-upravlyayushchikh sistemakh. Chast II. Agentnye resheniya v zadachakh kontrolya i upravleniya* (Agent-based technology in automated information control systems. Part II. Agent-based solutions to the problems of monitoring and control), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye*, 2010, no. 10, pp. 11–21 (in Russian).
6. Vagin V. N., Golovina E. Yu., Zagoryanskaya A. A. i dr. *Dostovernyiy i pravdopodobnyiy vyivod v intellektualnykh sistemakh* (Reliable and credible derivation in intelligent systems), V. N. Vagin, D. A. Pospelov ed., Moscow, Fizmatlit, 2004 (in Russian).
7. Cheburakhin I. F. *Algoritmizatsiya predstavleniya bulevykh funktsiy, minimalnoy slozhnostyu, v baze Zhegalkina v klassakh formul i shem* (Algorithmic representation of Boolean functions, minimum complexity in Zhegalkin basis in the class of formulas and schemes), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye*, 2012, no. 12, pp. 7–14 (in Russian).
8. Cheburakhin I. F. *Matematicheskiye modeli dlya minimizatsii i avtomatizatsii sinteza diskretnykh upravlyayushchikh sistem* (Mathematical models for minimization and automation the synthesis of discrete control systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye*, 2012, no. 4, pp. 5–13 (in Russian).
9. Cheburakhin I. F. *Slozhnost bulevykh funktsiy dlya intellektualnykh sistem sinteza tsifrovyykh IS* (Complexity of Boolean functions for intelligent digital IS synthesis systems), *Izv. RAN. TsSU*, 2006, no. 3, pp. 150–165 (in Russian).
10. Cheburakhin I. F. *Pokazateli slozhnosti simmetricheskikh polinomov Zhegalkina* (Indicators complexity of symmetric polynomials Zhegalkin), *Tez.dokl. XV Mezhdunarodnoy konf. "Problemy teoreticheskoy kibernetiki"* (Kazan, 2–7 iyunya 2008 g.), Kazan, 2008, pp. 123 (in Russian).
11. Cheburakhin I. F. *Slozhnost simmetricheskikh polinomov Zhegalkina* (The complexity of symmetric polynomials Zhegalkin), *XVII Mezhdunar. shkola-seminar "Sintez i slozhnost upravlyayushchikh sistem" im. akad. O. B. Lupanova*, Novosibirsk, 2008, pp. 180–185 (in Russian).
12. Cheburakhin I. F., Tsurkov V. I. *Modeli dlya optimizatsii i avtomatizatsii sinteza diskretnykh ustroystv obrabotki informatsii v mehatronnykh sistemakh* (Models for the optimization and automation of synthesis of discrete information processing devices in the mechatronic systems), *3 Rossiyskaya multikonferentsiya po problemam upravleniya. Materialy 7-y nauchno-tehnicheskoy konferentsii "Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie MAU-2010"*, 12–14 october 2010, pp. 420–423 (in Russian).