

suring means that use such methods, is the effect of uninformative parameters of the measuring circuit and their instability on the result of the determination of informative parameters. Using the uninformative elements of the equivalent circuit of the sensor allows to determine their influence on informative parameters. A disadvantage of the known methods separate measurement sensors parameters is that they do not allow to define along with the capacity the multiple uninformative parameters. The aim of this work is to study a new method of measurement of parameters of capacitor sensors, which allows to determine the resistance of the connecting conductors that connect the sensor to the measuring circuit, and equivalent resistance due to losses in the insulating dielectric and leakage currents, which allows to increase the accuracy of measurement of capacitance.

Keywords: capacitive sensors, transient, instant values, an error, resistance of connecting conductors, insulation resistance, measuring circuit

Acknowledgements: This work was supported by RFBR, project 16-08-00252 A.

For citation:

Melentiev V. S., Batishchev V. I., Susova E. A. Improving the Accuracy of Measurement of Parameters of Capacitive Sensors, *Mekhantronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 391–395.

DOI: 10.17587/mau.18.391-395

References

1. Golnabi H., Sharifian M. Investigation of water electrical parameters as a function of measurement frequency using cylindrical capacitive sensors, *Measurement*, 2013, vol. 46, no. 1, pp. 305–314.
2. Azimloo H., Rezazadeh G., Shabani R. Development of a capacitive angular velocity sensor for the alarm and trip applications, *Measurement*, 2015, vol. 63, pp. 282–286.
3. Kim M., Moon W. A new linear encoder-like capacitive displacement sensor, *Measurement*, 2006, vol. 39, no. 6, pp. 481–489.
4. Nerino R., Cabiati F., Picotto G. B., Sacconi A. A surface profile reconstruction method based on multisensor capacitive transducers, *Measurement*, 1994, vol. 13, no. 1, pp. 77–84.
5. Malinovskij V. N. *Cifrovye izmeritel'nye mosty* (Digital measuring bridges), Moscow, Jenergiya, 1976 (in Russian).
6. Kuznetsov E. N., Kuznetsov N. E., Tsypin B. V. A two-channel transducer for capacitive sensors, *Measurement Techniques*, 2008, vol. 51, no. 5, pp. 513–515.
7. Arbusov V. P. Time division of the channels of the measuring circuits of capacitive and inductive sensors, *Measurement Techniques*, 2007, vol. 50, no. 7, pp. 752–757.
8. Ivanov V. I., Titov V. S., Petrov A. S. Converters of the parameters of multi-component two-terminal networks with a DC short

circuit and a break in the circuit between poles, *Measurement Techniques*, 2014, vol. 57, no. 3, pp. 340–346.

9. Melent'ev V. S. *Novoe v izmerenijah parametrov emkostnyh datchikov po mgnovennym znachenijam perehodnyh processov* (New in the measurements of capacitive sensors on instant values of transient processes), *Datchiki i Sistemy*, 2010, no. 2, pp. 26–29 (in Russian).

10. Melent'ev V. S. Methods for increasing the accuracy of measurements of the parameters of capacitive transducers, *Measurement Techniques*, 2014, vol. 57, no. 7, pp. 800–804.

11. Melent'ev V. S., Batishchev V. I., Smolina A. M., Evstifeeva T. S. *Povyshenie tochnosti izmerenija parametrov emkostnyh datchikov peremeshhenija* (Improving the accuracy of measurement of parameters of the capacitive displacement sensors), *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2013, no. 6, pp. 36–38 (in Russian).

12. Melent'ev V. S., Batishchev V. I., Evstifeeva T. S., Levina K. D. *Issledovanie metoda i sredstva izmerenija parametrov emkostnyh datchikov peremeshhenija* (A study of methods and means of measurement of capacitive displacement sensors), *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2014, no. 9, pp. 45–49 (in Russian).

13. Melent'ev V. S., Smolina A. M., Evstifeeva T. S. *Sovershenstvovanie metoda izmerenija parametrov emkostnyh datchikov* (Improvement of the method of measurement of parameters of capacitor sensors), *Problemy avtomatizacii i upravlenija v tehnicheskikh sistemakh: sb. statej Mezhdunar. nauch.-tehn. konf.*, Penza, 2013, pp. 238–240 (in Russian).

14. Melent'ev V. S., Gubanov N. G., Latukhova O. A., Smolina A. M. Improvement of methods of measuring the parameters of two-terminal electric circuits, *Measurement Techniques*, 2013, vol. 56, no. 6, pp. 691–694.

15. Melent'ev V. S., Latukhova O. A., Evstifeeva T. S. Metod razdel'nogo opredelenija parametrov emkostnyh datchikov po mgnovennym znachenijam perehodnyh processov, *Polzunovskij Vestnik*, 2013, no. 2, pp. 106–108 (in Russian).

УДК 681.5.01

DOI: 10.17587/mau.18.395-406

А. В. Моржов, канд. техн. наук, доц., morzhov@mail.ru,
С. В. Моржова, специалист, svetlana-morzhova@mail.ru,
Тульский государственный университет

Синтез релейного гидропривода при задании ограничений на параметрическую чувствительность его характеристики*

Рассматривается синтез релейного автоколебательного объемного силового гидропривода при задании ограничений на параметрическую чувствительность его характеристик к изменению скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса. Используется нелинейная математическая модель привода. Синтез сводится к решению задачи конечномерной оптимизации по точности режима слежения.

Ключевые слова: объемный гидропривод, релейная система, кусочно-линейный объект управления, чувствительность, автоколебания, режим слежения, синтез

Введение

Релейные автоматические системы широко используются в различных областях техники. К основным достоинствам таких систем относятся про-

стота конструкции, надежность и низкая стоимость. Они находят применение как в системах управления промышленного назначения, так и в системах управления подвижными объектами.

Действительные значения параметров объекта управления релейной автоколебательной системы (как и вообще любой системы автоматического уп-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-00662).

равления) практически всегда отличаются от расчетных (номинальных). Это может быть обусловлено неточностью изготовления отдельных элементов системы, изменением их свойств в процессе хранения и эксплуатации, изменением внешних условий и т. д. Степень влияния отклонения отдельных параметров на различные характеристики системы оценивается посредством чувствительности. Обычно под чувствительностью характеристики системы к изменению некоторого параметра понимается значение первой производной исследуемой характеристики по данному параметру.

Отклонение значений параметров объекта управления релейной автоколебательной системы может привести к заметной потере точности слежения системы за входными сигналами, а в особых случаях — к неустойчивости периодических движений в системе и, как следствие, к ее полной неработоспособности. Поэтому в процессе синтеза релейной автоколебательной системы крайне важно осуществлять контроль параметрической чувствительности характеристик синтезируемой системы.

Теория чувствительности как самостоятельное научное направление в теории автоматического управления сформировалась в 60-е годы прошлого столетия и продолжает развиваться в настоящее время [1—4]. Достаточно хорошее представление о состоянии теории дают монографии [5, 6]. Однако, несмотря на общее обилие работ чувствительность релейных систем исследована весьма слабо. Имеется лишь небольшое число работ, в которых рассматривается чувствительность конкретных релейных систем с линейными объектами управления. Между тем реальные объекты управления, как правило, являются нелинейными.

В работах [7—10] были предложены эффективные методы исследования параметрической чувствительности релейных автоколебательных следящих систем с нелинейными объектами управления. В настоящей работе рассматривается синтез с использованием указанных методов следящего релейного автоколебательного объемного силового гидропривода при задании ограничений на чувствительность его характеристик к изменению скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса.

Гидроприводы данного класса весьма часто применяются в системах управления движением технических объектов. Особенности их конструкции

детально рассмотрены в работе [11]. Главные недостатки объемных гидравлических приводов, которые ограничивают их применение в следящих системах управления, заключаются в сложности регулирования насоса переменной производительности и существенной зависимости характеристик привода от скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса. Ее нестабильность отрицательно влияет на точностные характеристики и работоспособность привода.

Необходимо отметить, что впервые синтез объемного гидропривода с релейным законом управления при задании ограничений на параметрическую чувствительность рассматривался в работе [12]. Однако при этом в целях упрощения процедуры синтеза использовалась линейная модель гидропривода как объекта управления, не учитывающая ряд нелинейностей, присущих реальному приводу.

1. Математическая модель релейного гидропривода

На рис. 1 представлена структурная схема упрощенной математической модели некоторого реального следящего релейного автоколебательного объемного силового гидропривода. На рис. 1 введены следующие обозначения: f — входной управляющий сигнал; u — выходной сигнал релейного усилителя мощности; i — ток в обмотках электромагнита; M — момент, создаваемый якорем электромагнита; α — угол поворота заслонки; β — перемещение золотника; γ — угол наклона блока цилиндров гидронасоса; p — перепад давлений в магистралях; ϑ — скорость вращения входного вала редуктора (выходного вала гидродвигателя); φ — угол поворота выходного вала редуктора (нагрузки); C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — коэффициенты обратных связей.

В структурной схеме учитываются ограничители только на угол поворота заслонки α и перемещение золотника β . Именно эти ограничители достигаются в режиме автоколебаний. Влиянием других нелинейностей, присущих гидроприводу, в ходе синтеза можно пренебречь. В модель также входит нестабильный параметр Ω — скорость вращения приводящего двигателя гидронасоса с номинальным значением Ω_0 .

Параметры модели имеют следующие значения: $A = 8 \text{ B}$, $K_i = 0,15 \text{ A/B}$, $T_i = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$, $K_M = 0,3 \text{ Н} \cdot \text{м/A}$,

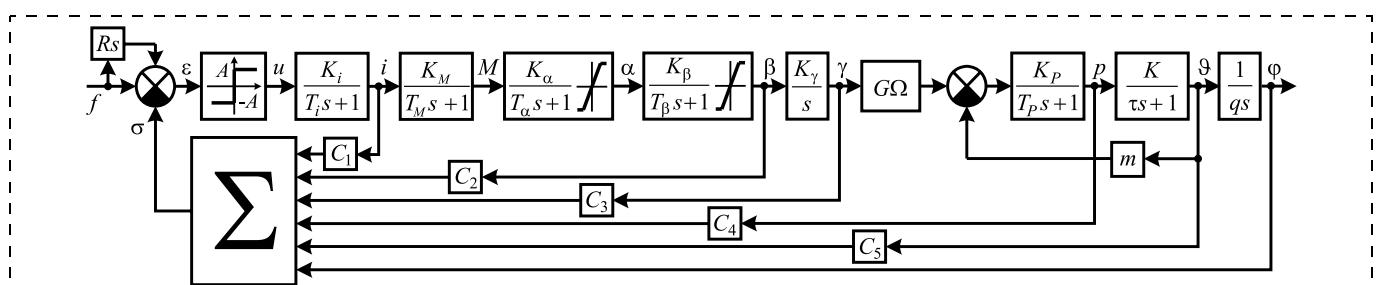


Рис. 1. Структурная схема математической модели релейного гидропривода

$T_M = 2 \cdot 10^{-3}$ с, $K_\alpha = 0,9$ рад/Н · м, $T_\alpha = 1,6 \cdot 10^{-3}$ с, $\alpha_{\max} = 0,087$ рад, $K_\beta = 0,02$ м/рад, $T_\beta = 10^{-2}$ с, $\beta_{\max} = 0,001$ м, $K_\gamma = 5 \cdot 10^3$ рад/м · с, $G = 4,2598 \times 10^{-5}$ м³/рад², $\Omega_0 = 157$ рад/с, $K_P = 10^{11}$ Н · с/м⁵, $T_P = 0,07143$ с, $K = 9,2887 \cdot 10^{-5}$ рад · м²/Н · с, $\tau = 6,948$ с, $m = 2,229 \cdot 10^{-5}$ м³/рад, $q = 100$.

Движение звеньев с ограничителями описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= \begin{cases} \frac{1}{T_\alpha} (K_\alpha M - \alpha), & \text{если } |\alpha| < \alpha_{\max}, \\ \text{или } |\alpha| = \alpha_{\max} \text{ и } (K_\alpha M - \alpha) \operatorname{sign} \alpha \leq 0; \\ 0, & \text{если } |\alpha| = \alpha_{\max} \text{ и } (K_\alpha M - \alpha) \operatorname{sign} \alpha > 0; \end{cases} \\ \frac{d\beta}{dt} &= \begin{cases} \frac{1}{T_\beta} (K_\beta \alpha - \beta), & \text{если } |\beta| < \beta_{\max}, \\ \text{или } |\beta| = \beta_{\max} \text{ и } (K_\beta \alpha - \beta) \operatorname{sign} \beta \leq 0; \\ 0, & \text{если } |\beta| = \beta_{\max} \text{ и } (K_\beta \alpha - \beta) \operatorname{sign} \beta > 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Дополнительный корректирующий сигнал $R\dot{f}(t)$, подаваемый на вход системы, позволяет устраниить статическую ошибку при слежении системы за линейно нарастающими сигналами, т. е. повысить точность слежения системы за произвольными входными сигналами. Коэффициент R задается выражением

$$R = qC_3 \left(\frac{1}{K_P G \Omega_0 K} + \frac{m}{G \Omega_0} \right) + \frac{q C_4}{K} + q C_5. \quad (1)$$

Таким образом, на вход системы поступает суммарный сигнал

$$y(t) = f(t) + R\dot{f}(t).$$

Гидропривод как объект управления относится к кусочно-линейным системам [13] — широко распространенному классу нелинейных объектов. Обозначим $\mathbf{x} = (i, M, \alpha, \beta, \gamma, p, \vartheta, \phi)$ — вектор состояния гидропривода. Будем задавать его "свободное" движение (ограничители не достигаются) уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{C}(\Omega)\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad (2)$$

движение по двум ограничителям одновременно — уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{C}^*(\Omega)\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad (3)$$

движение по ограничителю $|\alpha| = \alpha_{\max}$ — уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{C}_\alpha^*(\Omega)\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad (4)$$

а движение по ограничителю $|\beta| = \beta_{\max}$ — уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{C}_\beta^*(\Omega)\mathbf{x} + \mathbf{B}u. \quad (5)$$

Уравнения движения (2)–(5) зависят от упомянутого выше нестабильного параметра Ω . Числен-

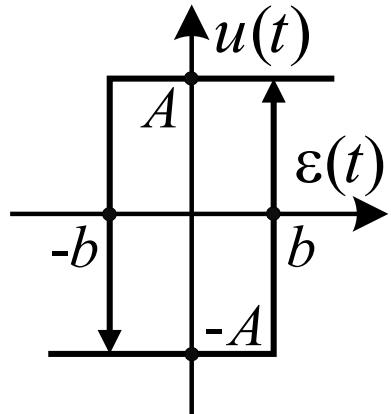


Рис. 2. Статическая характеристика двухпозиционного релейного элемента

ные значения матриц легко определяются по структурной схеме системы (рис. 1).

Управляющий сигнал $u(t)$ определяется соотношениями

$$u = \Phi(\varepsilon, A, b), \quad \varepsilon = y - \mathbf{R}^T \mathbf{x}, \quad y = f + R\dot{f}, \quad (6)$$

причем функция Φ задается статической характеристикой двухпозиционного релейного элемента (рис. 2), $b = 0$, $\mathbf{R}^T = (C_1 \ 0 \ 0 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ 1)$.

2. Постановка задачи синтеза

Синтез следящего релейного автоколебательного объемного силового гидропривода заключается в поиске таких значений коэффициентов его обратных связей C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 , которые позволят обеспечить наибольшую точность замкнутого привода в режиме слежения при заданных ограничениях на чувствительность характеристик привода к изменению скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса.

Так, в условиях допустимых отклонений скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса в пределах 20 % от номинального значения Ω_0 требуется за счет выбора коэффициентов обратных связей C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 достигнуть максимальной точности слежения гидропривода за тестовым входным гармоническим сигналом

$$f(t) = \sin 1,26t \quad (7)$$

в номинальном режиме работы ($\Omega = \Omega_0$) и при этом обеспечить максимальное отклонение амплитуды e_{\max} установившейся ошибки слежения $e(t) = f(t) - \phi(t)$ от ее номинального значения (значения амплитуды ошибки в номинальном режиме) в пределах, не превышающих 50 %. Следует отметить, что сигнал (7), как показали выполненные исследования, является (из всех допустимых сигналов) наиболее сложным для отработки рассматриваемым приводом, т. е. приводит к максимальной ошибке слежения.

Кроме того, в номинальном режиме работы необходимо гарантировать существование в замкну-

том приводе устойчивых автоколебаний с желаемым периодом, при котором достигаются ограничители по параметрам α и β (это необходимо для нормальной работы электрогидравлического усилителя), а также обеспечить устойчивость автоколебаний и достижимость ограничителей при любых допустимых отклонениях скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса в пределах, указанных выше.

Синтез гидропривода состоит из двух этапов: предварительного и основного — решения задачи конечномерной оптимизации закона управления.

3. Предварительный этап синтеза релейного гидропривода

Предварительный этап синтеза начинается с построения фазового годографа релейного гидропривода как объекта управления при работе в номинальном режиме ($\Omega = \Omega_0$).

В автономной ($f(t) \equiv 0$) системе (2)–(6) периодическое движение может быть задано одной (любой) точкой с предельного цикла. Фазовым годографом [14] релейной системы (2)–(6) называется вектор-функция $\mathbf{x}^*(T)$, $0 \leq T < \infty$ ($2T$ — период), которая задает значения вектора состояния системы \mathbf{x} в симметричном периодическом движении в моменты переключения релейного элемента с "минуса" на "плюс". Фазовый годограф выделяет все возможные простые (в интервале $0 \leq t \leq 2T$ управление $u(t)$ изменяет знак только два раза (рис. 3)) симметричные ($u(t+T) = -u(t)$, $\mathbf{x}(t+T) = -\mathbf{x}(t)$)

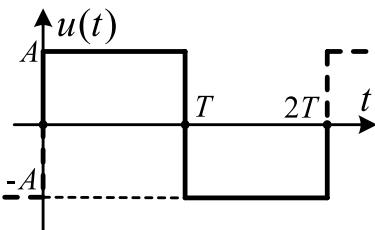


Рис. 3. Симметричный периодический сигнал управления $u(t)$

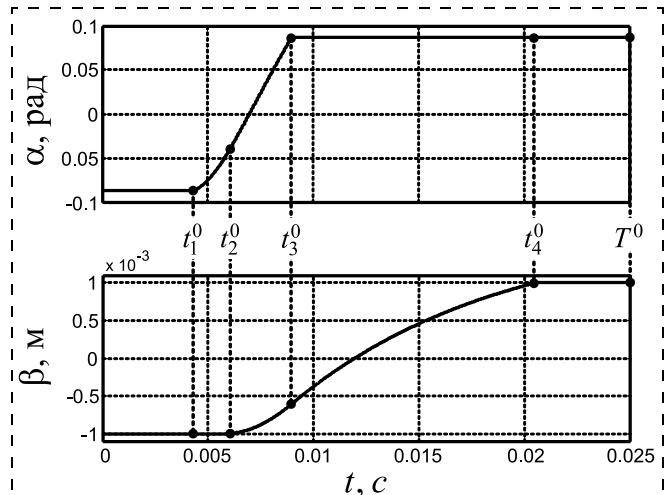


Рис. 4. Вид периодических траекторий $\alpha(t)$ и $\beta(t)$

периодические движения автономной релейной системы (2)–(6), когда еще не выбраны обратные связи.

Если построен фазовый годограф $\mathbf{x}^*(T)$, то период $2T^0$ возникающего в автономной ($f(t) \equiv 0$) системе (2)–(6) автоколебательного движения $\mathbf{x}(t)$ рассчитывается из условия переключения релейного элемента с "минуса" на "плюс" и условия надлежащего направления переключения релейного элемента соответственно:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{x}^*(T^0) = -b, \mathbf{R}^T \mathbf{h} < 0, \quad (8)$$

где \mathbf{h} — значение вектора фазовой скорости $\dot{\mathbf{x}}$ на симметричной периодической траектории $\mathbf{x}(t)$ в моменты переключения релейного элемента с "минуса" на "плюс" (предел слева). Задаваемое соотношением (8) необходимое условие существования периодических движений на этапе синтеза позволяет формировать законы управления, обеспечивающие в системе требуемые параметры автоколебаний.

Методы построения фазового годографа были подробно рассмотрены в работе [14]. Для определения фазового годографа гидропривода использовался итерационный алгоритм с принудительным симметрированием [14]. С его помощью были получены компоненты фазового годографа $i^*(T)$, $M^*(T)$, $\alpha^*(T)$, $\beta^*(T)$, $\gamma^*(T)$, $p^*(T)$, $\vartheta^*(T)$, $\phi^*(T)$, соответствующие переменным состояния системы.

Для нормальной работы гидропривода, как уже отмечалось выше, необходимо, чтобы в периодическом движении достигались ограничители по фазовым переменным α и β . Исследование с помощью фазового годографа возможных периодических движений в синтезируемом гидроприводе позволило установить, что для выполнения указанного требования значение периода автоколебаний в системе должно отвечать неравенству

$$2T > 0,034 \text{ с.} \quad (9)$$

Далее, исходя из условия нормального функционирования электромагнита, используемого в электрогидравлическом усилителе гидропривода, было окончательно выбрано желаемое значение периода автоколебаний $2T^0 = 0,05$ с.

С помощью значения фазового годографа $\mathbf{x}^*(T^0)$ было определено периодическое движение $\mathbf{x}(t)$ гидропривода в номинальном режиме работы, соответствующее желаемой частоте автоколебаний. На рис. 4 представлены периодические функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ на интервале времени $0 \leq t \leq T^0$. При этом момент времени $t = 0$ совмещен с моментом переключения релейного элемента с "минуса" на "плюс".

Далее, с использованием рис. 4 на полупериоде было выделено пять интервалов времени, в течение которых движение гидропривода как объекта управления задается одним из четырех линейных дифференциальных уравнений (2)–(5). При номинальном режиме работы привода в моменты времени $t_1 = t_1^0 = 0,00419$ с и $t_2 = t_2^0 = 0,00579$ с на полупериоде имеет место сход фазовой траектории

с ограничителей, а в моменты $t_3 = t_3^0 = 0,00899$ с и $t_4 = t_4^0 = 0,02052$ с имеет место выход фазовой траектории на ограничители.

Кроме того, с помощью фазового годографа удобно оценивать устойчивость автоколебаний в релейной системе, а также выполнять линеаризацию релейной системы по полезному сигналу. Линеаризация по полезному сигналу дает возможность весьма быстро и просто определить точность режима слежения релейной системы, что особенно важно на этапе синтеза, когда приходится анализировать большое число вариантов.

В соответствии с алгебраическим критерием, разработанным в работе [13], асимптотическая орбитальная устойчивость номинальной симметричной периодической траектории $\mathbf{x}(t)$ исследуемого релейного гидропривода оценивается по собственным числам матрицы

$$\mathbf{G}(\Omega_0) = \bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)\mathbf{Q}(\Omega_0), \quad (10)$$

здесь

$$\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0) = \mathbf{I} - \frac{\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)\mathbf{R}^T}{\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)}. \quad (11)$$

А именно, если собственные числа λ_i ($i = \overline{1, 8}$) матрицы \mathbf{G} удовлетворяют неравенствам $|\lambda_i| < 1$ ($i = \overline{1, 8}$), то соответствующее периодическое движение автономной релейной автоколебательной системы (2)–(6) асимптотически орбитально устойчиво.

В соотношения (10), (11) входят матрица $\mathbf{Q}(\Omega_0)$ и вектор фазовой скорости $\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)$ (здесь и далее индексами "–" обозначены пределы слева, а индексами "+" — пределы справа), которые могут быть вычислены заблаговременно до решения задачи конечномерной оптимизации. С учетом формы периодической траектории (см. рис. 4 и работу [13]) указанные вектор и матрица задаются равенствами

$$\dot{\mathbf{x}}^-(T^0) = -\mathbf{C}^*(\Omega_0)\mathbf{x}^*(T^0) + \mathbf{B}\mathbf{A}; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\Omega_0) = & \mathbf{W}(\Omega_0, T^0 - t_4^0)\mathbf{Q}_4\mathbf{W}_\alpha(\Omega_0, t_4^0 - t_3^0)\mathbf{Q}_3 \times \\ & \times \mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0)\mathbf{Q}_2\mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0)\mathbf{Q}_1\mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2 &= \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1], \\ \mathbf{Q}_3 &= \text{diag}[1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1], \\ \mathbf{Q}_4 &= \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\Omega, t) &= e^{\mathbf{C}(\Omega)t}, \mathbf{W}(\Omega, t) = e^{\mathbf{C}^*(\Omega)t}, \\ \mathbf{W}_\alpha(\Omega, t) &= e^{\mathbf{C}_\alpha^*(\Omega)t}, \mathbf{W}_\beta(\Omega, t) = e^{\mathbf{C}_\beta^*(\Omega)t}. \end{aligned}$$

Исследование режима слежения гидропривода выполнялось в работе с помощью метода дискретной линеаризации [15]. В процессе линеаризации дискретным методом релейная система заменяется неоднородным линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами и периодом диск-

ретизации по времени, равным полупериоду автоколебаний. Линеаризующее разностное уравнение, позволяющее определить точность режима слежения гидропривода при номинальном значении параметра Ω , задается равенством

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{X}((k+1)T^0) &= \\ &= \mathbf{M}(\Omega_0)\delta\mathbf{X}(kT^0) + \mathbf{N}(\Omega_0)y((k+1)T^0), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\Omega_0) &= \bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)\mathbf{Q}(\Omega_0), \\ \bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0) &= \mathbf{I} - \frac{(\dot{\mathbf{x}}^-(T^0) - \dot{\mathbf{x}}^+(T^0))\mathbf{R}^T}{\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)}, \\ \mathbf{N}(\Omega_0) &= \frac{\dot{\mathbf{x}}^-(T^0) - \dot{\mathbf{x}}^+(T^0)}{\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)}, \\ y(kT^0) &= f(kT^0) + R\dot{f}(kT^0). \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (15) представляет собой систему неоднородных линейных разностных уравнений, которая позволяет рассчитать вариации $\delta\mathbf{X}(kT^0)$. Именно с помощью функции $\delta\mathbf{X}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$ в работе оценивается точность режима слежения, поскольку она выделяет среднюю (полезную) составляющую движения системы (2)–(6), на которую наложены автоколебания.

В соотношения (16) входят матрица $\mathbf{Q}(\Omega_0)$ и векторы фазовой скорости $\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)$, $\dot{\mathbf{x}}^+(T^0)$, которые определяются представленными выше равенствами (12)–(14) и выражением

$$\dot{\mathbf{x}}^+(T^0) = -\mathbf{C}^*(\Omega_0)\mathbf{x}^*(T^0) - \mathbf{B}\mathbf{A}.$$

Как указывалось ранее, данные величины могут быть рассчитаны заблаговременно до решения задачи конечномерной оптимизации.

Из разностного уравнения (15) описанным в работе [15] способом определяется полезная составляющая установившегося движения синтезируемой системы

$$\delta\mathbf{X}(kT^0) = \mathbf{D}\cos(\omega kT^0) + \mathbf{H}\sin(\omega kT^0),$$

обусловленного суммарным входным гармоническим воздействием

$$y(t) = f(t) + R\dot{f}(t) = c\cos(\omega t) + d\sin(\omega t),$$

где $c = 1,26R$, $d = 1$. Искомые векторы задаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & \left(\mathbf{I}\sin(\omega T^0) + \frac{1}{\sin(\omega T^0)} (\mathbf{I}\cos(\omega T^0) - \mathbf{M})^2 \right)^{-1} \times \\ & \times \left(\frac{1}{\sin(\omega T^0)} (\mathbf{I}\cos(\omega T^0) - \mathbf{M})\mathbf{N}c\cos(\omega T^0) - \right. \\ & \left. - \mathbf{M}\mathbf{N}d + \mathbf{N}c\sin(\omega T^0) \right), \end{aligned}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sin(\omega T^0)} ((\mathbf{M} - \mathbf{I}\cos(\omega T^0))\mathbf{D} + \\ + \mathbf{N}(c\cos(\omega T^0) + d\sin(\omega T^0))).$$

Полученные результаты позволяют рассчитать критерий оптимизации системы — амплитуду установившейся ошибки слежения за тестовым гармоническим сигналом (7) замкнутого гидропривода в номинальном режиме работы ($\Omega = \Omega_0$)

$$e_{\max} = \sqrt{D_\phi^2 + (H_\phi - d)^2}, \quad (17)$$

здесь и далее D_ϕ и H_ϕ — компоненты векторов \mathbf{D} и \mathbf{H} , соответствующие выходной координате системы ϕ .

Далее, в целях обеспечения работоспособности привода и относительной стабильности его характеристик в условиях наличия отклонения параметра Ω на каждом шаге оптимизационного поиска необходимо осуществлять контроль параметрической чувствительности характеристик синтезируемого релейного гидропривода. Для определения чувствительности симметричного периодического движения гидропривода $\dot{\mathbf{x}}(t)$ к отклонению $\delta\Omega$ параметра Ω от номинального значения требуется использовать уравнения в вариациях (см. работу [10]), соответствующие уравнениям движения (2)–(5):

$$\frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{C}(\Omega_0)\delta\mathbf{x}(t) + \frac{d\mathbf{C}(\Omega_0)}{d\Omega}\mathbf{x}(t)\delta\Omega; \quad (18)$$

$$\frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{C}^*(\Omega_0)\delta\mathbf{x}(t) + \frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega}\mathbf{x}(t)\delta\Omega; \quad (19)$$

$$\frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{C}_\alpha^*(\Omega_0)\delta\mathbf{x}(t) + \frac{d\mathbf{C}_\alpha^*(\Omega_0)}{d\Omega}\mathbf{x}(t)\delta\Omega; \quad (20)$$

$$\frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{C}_\beta^*(\Omega_0)\delta\mathbf{x}(t) + \frac{d\mathbf{C}_\beta^*(\Omega_0)}{d\Omega}\mathbf{x}(t)\delta\Omega. \quad (21)$$

Они связывают отклонение периодической траектории системы $\delta\mathbf{x}(t)$ с изменением параметра Ω . Следует отметить, что при получении уравнений

(18)–(21), а также остальных результатов в рамках работы опускались величины, имеющие порядок малости выше первого относительно вариации $\delta\Omega$.

В соответствии с полученными в работе [10] результатами коэффициент чувствительности полуperiода автоколебаний в гидроприводе задается равенством

$$K_\Omega^T = \frac{\mathbf{R}^T(\mathbf{Q}(\Omega_0)(\mathbf{I} + \bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)\mathbf{Q}(\Omega_0))^{-1}\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0) - \mathbf{I})\mathbf{P}(\Omega_0)}{\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Omega_0) = & \mathbf{W}(\Omega_0, T^0 - t_4^0)\mathbf{Q}_4(\mathbf{W}_\alpha(\Omega_0, t_4^0 - t_3^0)\mathbf{Q}_3 \times \\ & \times \mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0)\mathbf{Q}_2(\mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0)\mathbf{Q}_1\mathbf{g}(0, t_1^0) + \\ & + \mathbf{g}_\beta(t_1^0, t_2^0)) + \mathbf{r}(t_2^0, t_3^0)) + \mathbf{g}_\alpha(t_3^0, t_4^0) + \mathbf{g}(t_4^0, T^0)). \end{aligned} \quad (23)$$

Матрицы $\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)$, $\mathbf{Q}(\Omega_0)$ и вектор $\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)$ определяются соотношениями (11), (13) и (12). В соотношении (23): $\mathbf{r}(t_0, t)$ (t_0 — начальный момент времени) — решение уравнения (18) при нулевых начальных условиях, $\delta\Omega = 1$ и $u(t) = A$, символами $\mathbf{g}(t_0, t)$, $\mathbf{g}_\alpha(t_0, t)$, $\mathbf{g}_\beta(t_0, t)$ обозначены решения соответственно уравнений (19), (20), (21) при нулевых начальных условиях, $\delta\Omega = 1$ и $u(t) = A$. Матрицы \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 , \mathbf{Q}_3 , \mathbf{Q}_4 по-прежнему задаются равенствами (14). Очевидно, векторы $\mathbf{g}(0, t_1^0)$, $\mathbf{g}_\beta(t_1^0, t_2^0)$, $\mathbf{r}(t_2^0, t_3^0)$, $\mathbf{g}_\alpha(t_3^0, t_4^0)$, $\mathbf{g}(t_4^0, T^0)$, а следовательно, и вектор $\mathbf{P}(\Omega_0)$, входящий в выражение (22), также могут быть рассчитаны до процедуры оптимизации.

Далее, как нетрудно установить (см. работу [10]), коэффициенты чувствительности моментов выхода периодической траектории на ограничители и схода с ограничителей t_1 , t_2 , t_3 , t_4 задаются равенствами

$$K_\Omega^{t_1} = -\frac{\mathbf{L}_\alpha^T[\mathbf{C}(\Omega_0)(\mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0)\mathbf{K}_\Omega^* + \mathbf{g}(0, t_1^0)) + \frac{d\mathbf{C}(\Omega_0)}{d\Omega}\dot{\mathbf{x}}^-(t_1^0)]}{\mathbf{L}_\alpha^T\dot{\mathbf{x}}^-(t_1^0)}; \quad (24)$$

$$K_\Omega^{t_2} = -\frac{\mathbf{L}_\beta^T[\mathbf{C}(\Omega_0)(\mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0)\mathbf{Q}_1(\mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0)\mathbf{K}_\Omega^* + \mathbf{g}(0, t_1^0)) + \mathbf{g}_\beta(t_1^0, t_2^0))] - \frac{\mathbf{L}_\beta^T\left[\frac{d\mathbf{C}(\Omega_0)}{d\Omega}\dot{\mathbf{x}}^-(t_2^0)\right]}{\mathbf{L}_\beta^T\dot{\mathbf{x}}^-(t_2^0)}; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} K_\Omega^{t_3} = & -\mathbf{L}_\alpha^T(\mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0)\mathbf{Q}_2(\mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0)\mathbf{Q}_1(\mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0)\mathbf{K}_\Omega^* + \mathbf{g}(0, t_1^0)) + \\ & + \mathbf{g}_\beta(t_1^0, t_2^0)) + \mathbf{r}(t_2^0, t_3^0))(\mathbf{L}_\alpha^T\dot{\mathbf{x}}^-(t_3^0))^{-1}; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} K_\Omega^{t_4} = & -\mathbf{L}_\beta^T(\mathbf{W}_\alpha(\Omega_0, t_4^0 - t_3^0)\mathbf{Q}_3(\mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0)\mathbf{Q}_2(\mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0)\mathbf{Q}_1(\mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0)\mathbf{K}_\Omega^* + \\ & + \mathbf{g}(0, t_1^0)) + \mathbf{g}_\beta(t_1^0, t_2^0)) + \mathbf{r}(t_2^0, t_3^0)) + \mathbf{g}_\alpha(t_3^0, t_4^0))(\mathbf{L}_\beta^T\dot{\mathbf{x}}^-(t_4^0))^{-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь

$$\mathbf{L}_\alpha^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad \mathbf{L}_\beta^T = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$\mathbf{K}_\Omega^* = -(\mathbf{I} + \bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)\mathbf{Q}(\Omega_0))^{-1}\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)\mathbf{P}(\Omega_0)$$

— коэффициент чувствительности значения фазового годографа $\mathbf{x}^*(T^0)$, задающего периодическое движение $\mathbf{x}(t)$, к изменению параметра Ω . Входящие в соотношения (24)–(27) векторы фазовой скорости $\dot{\mathbf{x}}^-(t_1^0), \dot{\mathbf{x}}^-(t_2^0), \dot{\mathbf{x}}^-(t_3^0), \dot{\mathbf{x}}^-(t_4^0)$ также могут быть рассчитаны до начала процедуры оптимизации.

Коэффициенты чувствительности $K_\Omega^T, K_\Omega^{t_1}, K_\Omega^{t_2}, K_\Omega^{t_3}, K_\Omega^{t_4}, \mathbf{K}_\Omega^*$ полностью определяют чувствительность симметричного периодического движения $\mathbf{x}(t)$ системы (2)–(6) к изменению параметра Ω . Если найдены указанные показатели чувствительности, то параметры возмущенного симметричного периодического движения $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$ в рассматриваемой системе (малое отклонение $\delta\mathbf{x}(t)$ обусловлено малым изменением $\delta\Omega$ параметра Ω относительно номинального значения), пренебрегая величинами, имеющими порядок малости выше первого относительно $\delta\Omega$, можно задать с помощью равенств

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}^*(T^0 + \delta T) &= \mathbf{x}^*(T^0) + \mathbf{K}_\Omega^* \delta\Omega, \quad T = T^0 + K_\Omega^T \delta\Omega, \\ t_1 &= t_1^0 + K_\Omega^{t_1} \delta\Omega, \quad t_2 = t_2^0 + K_\Omega^{t_2} \delta\Omega, \\ t_3 &= t_3^0 + K_\Omega^{t_3} \delta\Omega, \quad t_4 = t_4^0 + K_\Omega^{t_4} \delta\Omega. \end{aligned} \quad (28)$$

Чувствительность критерия устойчивости автоколебаний в гидроприводе задается коэффициентами чувствительности $K_\Omega^{\lambda_i}$ ($i = \overline{1, 8}$) собственных чисел λ_i ($i = \overline{1, 8}$) матрицы устойчивости \mathbf{G} (см. выражение (10)). Для определения указанных коэффициентов необходимо сначала рассчитать матрицу чувствительности матрицы \mathbf{G} к изменению параметра Ω . Выражение для искомой матрицы чувствительности имеет вид

$$\frac{d\mathbf{G}(\Omega_0)}{d\Omega} = \frac{d\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{Q}(\Omega_0) + \bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0) \frac{d\mathbf{Q}(\Omega_0)}{d\Omega}.$$

Остановимся на получении производных $\frac{d\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{d\Omega}$ и $\frac{d\mathbf{Q}(\Omega_0)}{d\Omega}$. В соответствии с определением производной, принимая во внимание соотношение (11), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{d\Omega} &= \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0 + \delta\Omega) - \bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{\delta\Omega} = \\ &= \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta\Omega} \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}^-(T^0) \mathbf{R}^T}{\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}}^-(T^0)} - \frac{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T^0 + K_\Omega^T \delta\Omega) \mathbf{R}^T}{\mathbf{R}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T^0 - K_\Omega^T \delta\Omega)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь матрица $\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0 + \delta\Omega)$ соответствует случаю, когда в автономном гидроприводе имеет место возмущенное симметричное периодическое движение $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$, близкое к $\mathbf{x}(t)$, малое отклонение $\delta\mathbf{x}(t)$ которого обусловлено малым изменением $\delta\Omega$ параметра Ω относительно номинального значения. Параметры периодического движения $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ задаются равенствами (28).

Далее, пренебрегая величинами, имеющими порядок малости выше первого относительно $\delta\Omega$, выразим вектор фазовой скорости:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T^0 + K_\Omega^T \delta\Omega) &= \\ &= -\mathbf{C}^*(\Omega_0 + \delta\Omega) \tilde{\mathbf{x}}^*(T^0 + K_\Omega^T \delta\Omega) + \mathbf{B}(\Omega_0 + \delta\Omega) A = \\ &= -\left(\mathbf{C}^*(\Omega_0) + \frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega} \delta\Omega \right) (\mathbf{x}^*(T^0) + \mathbf{K}_\Omega^* \delta\Omega) + \\ &\quad + \left(\mathbf{B}(\Omega_0) + \frac{d\mathbf{B}(\Omega_0)}{d\Omega} \delta\Omega \right) A = \\ &= -\mathbf{C}^*(\Omega_0) \mathbf{x}^*(T^0) + \mathbf{B}(\Omega_0) A + \\ &\quad + \left(\frac{d\mathbf{B}(\Omega_0)}{d\Omega} A - \frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{x}^*(T^0) - \mathbf{C}^*(\Omega_0) \mathbf{K}_\Omega^* \right) \delta\Omega. \end{aligned}$$

Последнее равенство можно переписать следующим образом:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T^0 + K_\Omega^T \delta\Omega) = \dot{\mathbf{x}}^-(T^0) + \mathbf{K}_\Omega^{0-} \delta\Omega,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\Omega^{0-} &= \\ &= \frac{d\mathbf{B}(\Omega_0)}{d\Omega} A - \frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{x}^*(T^0) - \mathbf{C}^*(\Omega_0) \mathbf{K}_\Omega^* \end{aligned}$$

— коэффициент чувствительности значения вектора фазовой скорости $\dot{\mathbf{x}}$ на симметричной периодической траектории в моменты переключения релейного элемента с "плюса" на "минус" (в пределе слева). Итак, окончательно выражение для производной $\frac{d\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{d\Omega}$ примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{d\Omega} &= \\ &= \frac{\dot{\mathbf{x}}^-(T^0) \mathbf{R}^T (\mathbf{R}^T \mathbf{K}_\Omega^{0-}) - \mathbf{K}_\Omega^{0-} \mathbf{R}^T (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}}^-(T^0))}{(\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}}^-(T^0))^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Далее, в соответствии с правилами дифференцирования из соотношения (13) получим искомое выражение для производной:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}(\Omega_0)}{d\Omega} &= \frac{d\mathbf{W}(\Omega, T(\Omega) - t_4(\Omega))}{d\Omega} \Big|_{\Omega = \Omega_0} \times \\ &\quad \times \mathbf{Q}_4 \mathbf{W}_\alpha(\Omega_0, t_4^0 - t_3^0) \mathbf{Q}_3 \mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathbf{Q}_2 \mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0) \mathbf{Q}_1 \mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0) + \mathbf{W}(\Omega_0, T^0 - t_4^0) \times \\
& \times \mathbf{Q}_4 \frac{d\mathbf{W}_\alpha(\Omega, t_4(\Omega) - t_3(\Omega))}{d\Omega} \Big|_{\Omega = \Omega_0} \mathbf{Q}_3 \mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0) \times \\
& \quad \times \mathbf{Q}_2 \mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0) \mathbf{Q}_1 \mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0) + \\
& \quad + \mathbf{W}(\Omega_0, T^0 - t_4^0) \mathbf{Q}_4 \mathbf{W}_\alpha(\Omega_0, t_4^0 - t_3^0) \times \\
& \times \mathbf{Q}_3 \frac{d\mathbf{V}(\Omega, t_3(\Omega) - t_2(\Omega))}{d\Omega} \Big|_{\Omega = \Omega_0} \mathbf{Q}_2 \mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0) \times \\
& \times \mathbf{Q}_1 \mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0) + \mathbf{W}(\Omega_0, T^0 - t_4^0) \mathbf{Q}_4 \mathbf{W}_\alpha(\Omega_0, t_4^0 - t_3^0) \times \\
& \times \mathbf{Q}_3 \mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0) \mathbf{Q}_2 \frac{d\mathbf{W}_\beta(\Omega, t_2(\Omega) - t_1(\Omega))}{d\Omega} \Big|_{\Omega = \Omega_0} \times \\
& \times \mathbf{Q}_1 \mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0) + \mathbf{W}(\Omega_0, T^0 - t_4^0) \mathbf{Q}_4 \mathbf{W}_\alpha(\Omega_0, t_4^0 - t_3^0) \times \\
& \quad \times \mathbf{Q}_3 \mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0) \mathbf{Q}_2 \mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0) \times \\
& \quad \times \mathbf{Q}_1 \frac{d\mathbf{W}(\Omega, t_1(\Omega))}{d\Omega} \Big|_{\Omega = \Omega_0}. \quad (30)
\end{aligned}$$

В выражение (30) входит ряд производных, которые требуют определения. Сначала найдем производную

$$\frac{d\mathbf{W}(\Omega, t_1(\Omega))}{d\Omega} \Big|_{\Omega = \Omega_0} = \frac{d\mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0)}{d\Omega},$$

которая представляет собой матрицу чувствительности матрицы $\mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0)$. По определению производной, пренебрегая величинами, имеющими по-

рядок малости выше первого относительно $\delta\Omega$, имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{d\mathbf{W}(\Omega, t_1(\Omega))}{d\Omega} \Big|_{\Omega = \Omega_0} = \\
& = \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\mathbf{W}(\Omega_0 + \delta\Omega, t_1^0 + K_\Omega^{t_1} \delta\Omega) - \mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0)}{d\Omega} = \\
& = \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{C}^*(\Omega_0 + \delta\Omega)(t_1^0 + K_\Omega^{t_1} \delta\Omega)} - \mathbf{e}^{\mathbf{C}^*(\Omega_0)t_1^0}}{\delta\Omega} = \\
& = \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}^{\left(\mathbf{C}^*(\Omega_0)t_1^0 + (\mathbf{C}^*(\Omega_0)K_\Omega^{t_1} + \frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega} t_1^0)\delta\Omega\right)} - \mathbf{e}^{\mathbf{C}^*(\Omega_0)t_1^0}}{\delta\Omega}.
\end{aligned}$$

Пусть Ψ и Θ — произвольные квадратные матрицы одинаковой размерности, а $\delta\varepsilon$ — малая скалярная величина. Путем разложения в степенной матричный ряд было установлено, что с учетом величин первого порядка малости

$$\mathbf{e}^{(\Psi + \Theta\delta\varepsilon)} = \mathbf{e}^\Psi + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^i \Psi^{i-j} \Theta \Psi^j}{(i+1)!} \delta\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \frac{d\mathbf{W}(\Omega, t_1(\Omega))}{d\Omega} \Big|_{\Omega = \Omega_0} = \\
& = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^i (\mathbf{C}^*(\Omega_0)t_1^0)^{i-j} \left(\mathbf{C}^*(\Omega_0)(K_\Omega^{t_1} + \frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega} t_1^0)(\mathbf{C}^*(\Omega_0)t_1^0)^j \right)}{(i+1)!}.
\end{aligned}$$

При практическом использовании данной формулы можно ограничиться вычислением 10...20 членов ряда, поскольку, как правило, он быстро сходится.

Аналогичным образом определяются другие производные, входящие в равенство (30):

$$\begin{aligned}
& \frac{d\mathbf{W}(\Omega, T(\Omega) - t_4(\Omega))}{d\Omega} \Big|_{\Omega = \Omega_0} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i (\mathbf{C}^*(\Omega_0)(T^0 - t_4^0))^{i-j} \left(\mathbf{C}^*(\Omega_0)(K_\Omega^T - K_\Omega^{t_4}) + \frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega}(T^0 - t_4^0)(\mathbf{C}^*(\Omega_0)(T^0 - t_4^0))^j \right)}{(i+1)!}, \\
& \frac{d\mathbf{W}_\alpha(\Omega, t_4(\Omega) - t_3(\Omega))}{d\Omega} \Big|_{\Omega = \Omega_0} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i (\mathbf{C}_\alpha^*(\Omega_0)(t_4^0 - t_3^0))^{i-j} \left(\mathbf{C}_\alpha^*(\Omega_0)(K_\Omega^{t_4} - K_\Omega^{t_3}) + \frac{d\mathbf{C}_\alpha^*(\Omega_0)}{d\Omega}(t_4^0 - t_3^0)(\mathbf{C}_\alpha^*(\Omega_0)(t_4^0 - t_3^0))^j \right)}{(i+1)!}, \\
& \frac{d\mathbf{V}(\Omega, t_3(\Omega) - t_2(\Omega))}{d\Omega} \Big|_{\Omega = \Omega_0} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i (\mathbf{C}(\Omega_0)(t_3^0 - t_2^0))^{i-j} \left(\mathbf{C}(\Omega_0)(K_\Omega^{t_3} - K_\Omega^{t_2}) + \frac{d\mathbf{C}(\Omega_0)}{d\Omega}(t_3^0 - t_2^0)(\mathbf{C}(\Omega_0)(t_3^0 - t_2^0))^j \right)}{(i+1)!}, \\
& \frac{d\mathbf{W}_\beta(\Omega, t_2(\Omega) - t_1(\Omega))}{d\Omega} \Big|_{\Omega = \Omega_0} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i (\mathbf{C}_\beta^*(\Omega_0)(t_2^0 - t_1^0))^{i-j} \left(\mathbf{C}_\beta^*(\Omega_0)(K_\Omega^{t_2} - K_\Omega^{t_1}) + \frac{d\mathbf{C}_\beta^*(\Omega_0)}{d\Omega}(t_2^0 - t_1^0)(\mathbf{C}_\beta^*(\Omega_0)(t_2^0 - t_1^0))^j \right)}{(i+1)!}.
\end{aligned}$$

Если найдена матрица чувствительности $\frac{d\mathbf{G}(\Omega_0)}{d\Omega}$, то матрицу устойчивости возмущенного периодического движения $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$ в рассматриваемой системе (2)–(6) (малое отклонение $\delta\mathbf{x}(t)$ обусловлено малым изменением $\delta\Omega$ параметра Ω относительно номинального значения), пренебрегая величинами, имеющими порядок малости выше первого относительно $\delta\Omega$, можно задать с помощью равенства

$$\mathbf{G}(\Omega_0 + \delta\Omega) = \mathbf{G}(\Omega_0) + \frac{d\mathbf{G}(\Omega_0)}{d\Omega} \delta\Omega.$$

Далее непосредственно рассмотрим процедуру расчета коэффициентов чувствительности собственных чисел матрицы устойчивости (10) (см. работу [8]). Пусть характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{G}(\Omega_0)$, определяющей устойчивость автоколебаний в номинальной системе (2)–(6), имеет вид

$$a_n(\lambda^0)^n + a_{n-1}(\lambda^0)^{n-1} + \dots + a_1\lambda^0 + a_0 = 0, \quad (31)$$

где a_k ($k = \overline{0, 8}$) — постоянные коэффициенты, λ^0 — некоторое номинальное собственное число. Анализируя равенство (31), можно сделать вывод, что характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{G}(\Omega_0 + \delta\Omega)$ имеет следующую структуру:

$$(a_n + v_n\delta\Omega)(\lambda^0 + \delta\lambda)^n + (a_{n-1} + v_{n-1}\delta\Omega) \times \\ \times (\lambda^0 + \delta\lambda)^{n-1} + \dots + (a_1 + v_1\delta\Omega)(\lambda^0 + \delta\lambda) + \\ + (a_0 + v_0\delta\Omega) = 0. \quad (32)$$

Здесь v_i ($i = \overline{0, 8}$) — постоянные коэффициенты, $\delta\lambda$ — вариация некоторого номинального собственного числа λ^0 .

Опуская величины, имеющие порядок малости выше первого относительно $\delta\Omega$ и $\delta\lambda$, из соотношений (31) и (32) получим выражение

$$na_n(\lambda^0)^{n-1}\delta\lambda + v_n(\lambda^0)^n\delta\Omega + (n-1)a_{n-1}(\lambda^0)^{n-2}\delta\lambda + \\ + v_{n-1}(\lambda^0)^{n-1}\delta\Omega + \dots + a_1\delta\lambda + v_1\lambda^0\delta\Omega + v_0\delta\Omega = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\delta\lambda = -\frac{\sum_{j=0}^n v_j(\lambda^0)^j}{\sum_{k=1}^n k a_k(\lambda^0)^{k-1}} \delta\Omega. \quad (33)$$

Подставляя значения различных номинальных собственных чисел матрицы $\mathbf{G}(\Omega_0)$ в выражение (33), легко найти их приращения, обусловленные изменением параметра Ω . Таким образом, искомые коэффициенты чувствительности собственных чисел матрицы устойчивости \mathbf{G} определяются равенствами

$$K_\Omega^{\lambda_i} = -\frac{\sum_{j=0}^n v_j(\lambda_i^0)^j}{\sum_{k=1}^n k a_k(\lambda_i^0)^{k-1}}, \quad i = \overline{1, 8}.$$

Собственные числа матрицы устойчивости $\mathbf{G}(\Omega_0 + \delta\Omega)$, опуская величины, имеющие порядок малости выше первого относительно $\delta\Omega$, при этом могут быть заданы зависимостями

$$\lambda_i = \lambda_i^0 + K_\Omega^{\lambda_i} \delta\Omega, \quad i = \overline{1, 8},$$

здесь λ_i^0 ($i = \overline{1, 8}$) — собственные числа матрицы устойчивости автоколебаний в номинальной системе (2)–(6).

Отметим, что в работе для расчета коэффициентов v_i и a_k использовались функции математического программного пакета *MATLAB*, позволяющие выполнять символьные (аналитические) вычисления.

Функция чувствительности средней (полезной) составляющей движения замкнутого релейного гидропривода в режиме слежения $\mathbf{S}_\Omega(kT^0) = \frac{\partial \delta\mathbf{X}(kT^0)}{\partial \Omega}$ определяется из разностного уравнения

$$\mathbf{S}_\Omega((k+1)T^0) = \mathbf{M}(\Omega_0)\mathbf{S}_\Omega(kT^0) + \frac{d\mathbf{M}(\Omega_0)}{d\Omega} \delta\mathbf{X}(kT^0) - \\ - \mathbf{M}(\Omega_0)\delta\dot{\mathbf{X}}(kT^0)K_\Omega^T + \frac{d\mathbf{N}(\Omega_0)}{d\Omega} y((k+1)T^0), \quad (34)$$

где $y(kT^0) = f(kT^0) + R\dot{f}(kT^0)$.

Остановимся теперь на получении производных $\frac{d\mathbf{M}(\Omega_0)}{d\Omega}$ и $\frac{d\mathbf{N}(\Omega_0)}{d\Omega}$.

В соответствии с правилами дифференцирования из выражения (16) следует:

$$\frac{d\mathbf{M}(\Omega_0)}{d\Omega} = \frac{d\hat{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{Q}(\Omega_0) + \hat{\mathbf{Q}}(\Omega_0) \frac{d\mathbf{Q}(\Omega_0)}{d\Omega}.$$

Аналогично тому, как выше была получена зависимость (29), нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{d\hat{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{d\Omega} = \\ = \frac{(\dot{\mathbf{x}}^-(T^0) - \dot{\mathbf{x}}^+(T^0))\mathbf{R}^T(\mathbf{R}^T \mathbf{K}_\Omega^{0-}) - (\mathbf{K}_\Omega^{0-} - \mathbf{K}_\Omega^{0+})\mathbf{R}^T(\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}}^-(T^0))}{(\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}}^-(T^0))^2},$$

где

$$\mathbf{K}_\Omega^{0+} = -\frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{x}^*(T^0) - \mathbf{C}^*(\Omega_0) \mathbf{K}_\Omega^* - \frac{d\mathbf{B}(\Omega_0)}{d\Omega} A$$

— коэффициент чувствительности значения вектора фазовой скорости $\dot{\mathbf{x}}$ на симметричной периодической траектории в моменты переключения релейного элемента с "плюса" на "минус" (в пределе справа).

Представленные выше выражения для вычисления матрицы $\frac{d\mathbf{Q}(\Omega_0)}{d\Omega}$ сохранят свою справедливость.

Вновь применяя подход, использованный при получении зависимости (29), найдем выражение для производной

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}(\Omega_0)}{d\Omega} &= \\ &= \frac{(\mathbf{K}_\Omega^{0-} - \mathbf{K}_\Omega^{0+})(\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}}^-(T^0)) - (\dot{\mathbf{x}}^-(T^0) - \dot{\mathbf{x}}^+(T^0))(\mathbf{R}^T \mathbf{K}_\Omega^{0-})}{(\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}}^-(T^0))^2}. \end{aligned}$$

Функцию чувствительности средней (полезной) составляющей установившегося движения замкнутого релейного гидропривода в режиме слежения за тестовым гармоническим сигналом (7) будем искать в виде

$$\mathbf{S}_\Omega(kT^0) = \frac{\partial \delta \mathbf{X}(kT^0)}{\partial \Omega} = \tilde{\mathbf{D}} \cos(\omega k T^0) + \tilde{\mathbf{H}} \sin(\omega k T^0)$$

в полном соответствии с тем, как это было показано в работе [9]. В результате получим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}} &= - \left[\mathbf{I} \sin(\omega T^0) + \frac{(\mathbf{M}(\Omega_0) - \mathbf{I} \cos(\omega T^0))^2}{\sin(\omega T^0)} \right]^{-1} \times \\ &\times \left[\frac{\mathbf{M}(\Omega_0) - \mathbf{I} \cos(\omega T^0)}{\sin(\omega T^0)} \left(\frac{d\mathbf{M}(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{D} - \omega K_\Omega^T \mathbf{M}(\Omega_0) \mathbf{H} + \right. \right. \\ &+ \frac{d\mathbf{N}(\Omega_0)}{d\Omega} (c \cos(\omega T^0) + d \sin(\omega T^0)) \Big) + \\ &+ \frac{d\mathbf{M}(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{H} + \omega K_\Omega^T \mathbf{M}(\Omega_0) \mathbf{D} + \\ &+ \left. \left. \frac{d\mathbf{N}(\Omega_0)}{d\Omega} (d \cos(\omega T^0) - c \sin(\omega T^0)) \right) \right], \\ \tilde{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\sin(\omega T^0)} \left[(\mathbf{M}(\Omega_0) - \mathbf{I} \cos(\omega T^0)) \tilde{\mathbf{D}} + \right. \\ &+ \frac{d\mathbf{M}(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{D} - \omega K_\Omega^T \mathbf{M}(\Omega_0) \mathbf{H} + \\ &+ \left. \frac{d\mathbf{N}(\Omega_0)}{d\Omega} (c \cos(\omega T^0) + d \sin(\omega T^0)) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, средняя (полезная) составляющая движения параметрически возмущенной релейной системы (2)–(6) (при наличии малого изменения $\delta\Omega$ параметра Ω относительно номинального значения), пренебрегая величинами, имеющими порядок малости выше первого относительно $\delta\Omega$, может быть задана равенством

$$\delta \tilde{\mathbf{X}}(kT^0) = \delta \mathbf{X}(kT^0) + \mathbf{S}_\Omega(kT^0) \delta\Omega.$$

После этого на основании требований к допустимым значениям (отклонениям) характеристик гидропривода при заданном диапазоне изменения нестабильного параметра Ω формируются ограничения в виде неравенств на показатели чувстви-

тельности характеристик гидропривода к изменению этого параметра. Остановимся подробнее на данной процедуре.

Требование к допустимым значениям периода автоколебаний (9) можно формализовать с помощью неравенств

$$(T^0 \pm K_\Omega^T \Delta) > 0,017, \quad (35)$$

здесь и далее $\Delta = 0,2\Omega_0$ — максимально допустимое абсолютное отклонение параметра Ω .

Требование к допустимым значениям собственных чисел матрицы устойчивости \mathbf{G} можно формализовать с помощью неравенств

$$|\lambda_i^0 \pm K_\Omega^{\lambda_i} \Delta| < 1, \quad i = \overline{1, 8}. \quad (36)$$

Наконец, требование к допустимым отклонениям амплитуды установившейся ошибки слежения гидропривода за тестовым гармоническим сигналом (7) можно формализовать с помощью неравенств

$$\left| \frac{\sqrt{(D_\varphi \pm \tilde{D}_\varphi \Delta)^2 + (H_\varphi + \tilde{H}_\varphi \Delta - 1)^2}}{\sqrt{(D_\varphi)^2 + (H_\varphi - 1)^2}} - 1 \right| < 0,5, \quad (37)$$

здесь \tilde{D}_φ и \tilde{H}_φ — компоненты векторов $\tilde{\mathbf{D}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$, соответствующие выходной координате φ системы.

4. Основной этап синтеза релейного гидропривода — оптимизация закона управления

Процедура оптимизации релейного закона управления выполняется в четырехмерном пространстве коэффициентов обратных связей C_1, C_3, C_4, C_5 . В качестве критерия оптимизации выступает амплитуда $e_{\max}(C_1, C_3, C_4, C_5)$ установившейся ошибки $e(t) = f(t) - \varphi(t)$ слежения замкнутого гидропривода за тестовым входным гармоническим сигналом (7) при работе в номинальном режиме.

На каждом шаге оптимизации после генерации значений коэффициентов C_1, C_3, C_4, C_5 :

- определяется согласующий коэффициент

$$\begin{aligned} C_2 &= \\ &= - \frac{C_1 i^*(T^0) + C_3 \gamma^*(T^0) + C_4 p^*(T^0) + C_5 \vartheta^*(T^0) + \varphi^*(T^0)}{\beta^*(T^0)}, \end{aligned}$$

обеспечивающий желаемое значение периода автоколебаний в замкнутой автономной системе (2)–(6) в номинальном режиме работы;

- проверяется необходимое условие существования в системе автоколебаний с желаемым периодом (условие надлежащего направления переключения релейного элемента в периодическом движении):

$$\mathbf{R}^T (\mathbf{C}^*(\Omega_0) \mathbf{x}^*(T^0) - \mathbf{B} \mathbf{A}) < 0;$$

- в целях повышения стабильности работы синтезируемого привода контролируется единственность периодического движения в системе

при сформированном векторе коэффициентов обратных связей;

- проверяется выполнение критерия асимптотической орбитальной устойчивости автоколебаний в номинальной системе по собственным числам матрицы (10);
- с помощью равенства (1) рассчитывается коэффициент усиления корректирующего звена R .

Помимо перечисленных выше действий на каждом шаге оптимизации последовательно проверяется выполнение ограничений (35)–(37), накладываемых на чувствительность полупериода автоколебаний в гидроприводе, критерия асимптотической орбитальной устойчивости автоколебаний, амплитуды установившейся ошибки слежения гидропривода за тестовым гармоническим сигналом к отклонению параметра Ω от номинального значения.

Критерий оптимизации рассчитывается в соответствии с равенством (17).

Невыполнение хотя бы одного из перечисленных выше ограничений инициирует переход к следующему шагу оптимизации. Критерием прекращения поиска служит заданное максимально допустимое число совершенных подряд неудачных шагов. К неудачным также относятся шаги, которые не привели к уменьшению критерия оптимизации.

Сформулированная выше задача конечномерной оптимизации была успешно решена с помощью стандартного генетического алгоритма математического пакета *MATLAB*. В результате проведенного синтеза были получены следующие оптимальные значения коэффициентов обратных связей гидропривода:

$$C_1 = 3,0599 \cdot 10^{-4}; C_2 = 0,8053; C_3 = 0,0499; \\ C_4 = 3,4754 \cdot 10^{-10}; C_5 = 3,0235 \cdot 10^{-4}.$$

Для проведения сравнительного анализа процедура оптимизации была повторно выполнена без учета ограничений на чувствительность характеристик гидропривода. Ниже представлены полученные при этом оптимальные значения коэффициентов обратных связей гидропривода:

$$C_1 = -0,1091; C_2 = 129,4408; C_3 = 0,1946; \\ C_4 = 8,3878 \cdot 10^{-11}; C_5 = 3,7315 \cdot 10^{-4}.$$

5. Анализ полученных результатов

В таблице приведены значения амплитуд установившихся ошибок слежения e_{\max} замкнутого гидропривода (с законами управления, синтезированными с учетом и без учета ограничений на чувствительность) за тестовым сигналом (7), полученные с помощью компьютерного моделирования привода.

Таким образом, в номинальном режиме работы более высокую точность демонстрирует замкнутый гидропривод, синтезированный без учета ограничений на чувствительность. Однако его характеристики не отличаются стабильностью: отклоне-

Результаты исследования синтезированного гидропривода

$\delta\Omega_d/\Omega_d^0$	e_{\max} , мрад	
	Привод, синтезированный с учетом ограничений на чувствительность	Привод, синтезированный без учета ограничений на чувствительность
-20 %	7,70	21,01
-10 %	5,97	10,09
0 %	5,45	4,55
10 %	5,90	Система неустойчива
20 %	7,48	Система неустойчива

ние e_{\max} от номинального значения при снижении Ω на 20 % достигает 360 %, а при Ω , превышающем номинальное значение, система становится неработоспособной, так как автоколебательный процесс в ней теряет устойчивость.

В то же время замкнутый гидропривод, синтезированный с учетом ограничений на чувствительность, с запасом удовлетворяет предъявляемым требованиям: при любых допустимых отклонениях параметра Ω он сохраняет работоспособность, а отклонение e_{\max} от номинального значения не превышает 42 %, т. е. он обладает существенно более высокими качественными характеристиками и работоспособностью.

Заключение

Таким образом, разработанные в работах [7–10] методы исследования чувствительности релейных автоколебательных систем позволили успешно решить задачу синтеза следящего релейного автоколебательного объемного силового гидропривода при задании ограничений на чувствительность его характеристик к изменению скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса. Именно этот параметр гидропривода наиболее часто подвержен изменениям на практике. При этом удалось обеспечить стабильно высокую точность и работоспособность привода при изменении скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса в весьма широком диапазоне. Важно отметить, что в ходе синтеза использовалась математическая модель гидропривода, учитывающая наиболее существенные нелинейности, присущие реальному приводу. Это повышает практическую значимость полученных результатов.

Список литературы

1. Kanno M., Hara S., Nakamura R., Matsubara M. Algebraic Approach to Sensitivity Analysis in Optimal Feedback Control System Design // Proc. of the IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design. IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design, CACSD. 2010. P. 1696–1701.
2. Gazdoš F., Dostál P., Marholt J. Robust Control of Unstable Systems: Algebraic Approach Using Sensitivity Functions // International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2011. Vol. 5, N. 7. P. 1189–1196.

3. **Бурдаков С. Ф.** Управление колебательной системой с минимальной параметрической чувствительностью // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2012. Т. 2, № 145. С. 13–19.
4. **Сухих Н. Н., Рукавишников В. Л.** Использование функции чувствительности для анализа бортовых цифровых автоматических систем управления полетом // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2012. № 186. С. 92–95.
5. **Eslami M.** Theory of Sensitivity in Dynamic Systems: An Introduction. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 600 p.
6. **Rozewasser E., Yusupov R.** Sensitivity of Automatic Control Systems. London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, Boca Raton, 2000. 436 p.
7. **Моржов А. В., Фалдин Н. В.** Функции чувствительности характеристик автоколебаний в релейных системах с нелинейным объектом управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 6. С. 14–24.
8. **Моржова С. В., Фалдин Н. В.** Методы исследования чувствительности автоколебаний в релейных системах управления к изменению параметров объекта управления // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Труды XII Международной конференции (Самара, 2010 г.). Самара: Самарский научный центр РАН, 2010. С. 398–403.
9. **Фалдин Н. В., Моржов А. В.** Чувствительность ошибки слежения к изменению параметров объекта управления в релейной автоколебательной системе // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 2. С. 81–88.
10. **Моржов А. В., Моржова С. В.** Метод исследования чувствительности периодических движений в релейной системе с кусочно-линейным объектом управления // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Вып. 4. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. С. 236–247.
11. **Гаминин Н. С.** Гидравлический привод систем управления. М.: Машиностроение, 1972. 376 с.
12. **Моржов А. В., Моржова С. В.** Синтез релейного автоколебательного объемного силового гидропривода при задании ограничений на чувствительность // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 6. С. 27–34.
13. **Фалдин Н. В., Моржов А. В.** Автоколебания в релейных системах с кусочно-линейными объектами управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2007. № 2. С. 2–9.
14. **Фалдин Н. В.** Релейные системы автоматического управления // Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под. ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. С. 573–636.
15. **Фалдин Н. В., Моржов А. В.** Дискретная линеаризация по полезному сигналу релейных автоколебательных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 11. С. 13–19.

The Synthesis of the Relay Hydraulic Power Drive by Setting Limits on Parametrical Sensitivity of its Characteristics

A. V. Morzhov, morzhov@mail.ru, **S. V. Morzhova**, svetlana-morzhova@mail.ru✉,
Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation

Corresponding author: **Morzhova Svetlana V.**, Engineer,
Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation,
e-mail: svetlana-morzhova@mail.ru

Received on January 31, 2017
Accepted on February 21, 2017

Relay control systems are widely used in engineering. Simple construction, reliability and low cost are the main advantages of such systems. Relay control systems are used in industrial control systems and also in moving objects control systems. Real values of control system plant parameters almost always differ from design (nominal) values. It also applies to relay self-oscillating control systems. Deviations of relay self-oscillating control system plant parameters may lead to perceptible reduction of input signals tracking accuracy, and in special case — to instability of periodic motions in the system. It makes the system unusable. So it's very important to control parametrical sensitivity of system characteristics at the stage of relay self-oscillating system synthesis. With the participation of the authors of this article effective methods of research of nonlinear tracking relay self-oscillating systems parametrical sensitivity were developed. These methods allow to research parametrical sensitivity of the system periodic motions and the system tracking mode. In this article the synthesis of the relay self-oscillating power volume hydraulic drive by setting limits on the sensitivity of its characteristics to changes of the pump drive motor rotation speed is considered using designed methods. Such hydraulic drives are often used in control systems of moving technical objects. The main drawbacks of volume hydraulic drives, which limits their application in tracking control systems, are difficulty of variable pump controlling and also significant dependence of drive characteristics on the rotation speed of the drive motor of the hydraulic pump. Its instability adversely affects on accuracy characteristics and efficiency of the drive. As a result, the synthesis could provide high accuracy and efficiency of hydraulic drive.

Keywords: volumetric hydraulic power drive, relay system, piecewise linear plant, sensitivity, self-oscillation, tracking mode, synthesis

Acknowledgements: This work was supported by RFBR, project 14-08-00662.

For citation:

Morzhov A. V., Morzhova S. V. The Synthesis of the Relay Hydraulic Power Drive by Setting Limits on Parametrical Sensitivity of its Characteristics, *Mekhanika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 395–406.

DOI: 10.17587/mau.18.395-406

References

1. Kanno M., Hara S., Nakamura R., Matsubara M. Algebraic Approach to Sensitivity Analysis in Optimal Feedback Control System Design, *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*, CACSD, 2010, pp. 1696–1701.
2. Gazdoš F., Dostál P., Marholt J. Robust Control of Unstable Systems: Algebraic Approach Using Sensitivity Functions, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2011, vol. 5, no. 7, pp. 1189–1196.
3. Burdakov S. F. *Nauchno-tehnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta. Informatika*.

Telekommunikacii. Upravlenie, 2012, vol. 2, no. 145, pp. 13–19 (in Russian).

4. Suhih N. N., Rukavishnikov V. L. *Nauchnyj vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta grazhdanskoy aviacii*, 2012, no. 186, pp. 92–95 (in Russian).

5. Eslami M. Theory of Sensitivity in Dynamic Systems: An Introduction, Berlin, Springer-Verlag, 1994, 600 p.

6. Rozenwasser E., Yusupov R. Sensitivity of Automatic Control Systems, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C: CRC Press, 2000, 436 pp.

7. Morzhov A. V., Faldin N. V. *Izv. RAN. Teoriya i sistemy upravlenija*, 2014, no. 6, pp. 14–24 (in Russian).

8. Morzhova S. V., Faldin N. V. *Problemy upravlenija i modelirovanija v slozhnyh sistemah: Trudy XII Mezhdunarodnoj konferencii*, Samara, Samarskij nauchnyj centr RAN, 2010, pp. 398–403 (in Russian).

9. Faldin N. V., Morzhov A. V. *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 2, pp. 81–88 (in Russian).

10. Morzhov A. V., Morzhova S. V. *Izvestija Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, Iss. 4, Tula, Publishing house of TulGU, 2016, pp. 236–247 (in Russian).

11. Gamynin N. S. *Gidravlicheskiy privod sistem upravlenija*, Moscow, Mashinostroenie, 1972, 376 p. (in Russian).

12. Morzhov A. V., Morzhova S. V. *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2012, no. 6, pp. 27–34 (in Russian).

13. Faldin N. V., Morzhov A. V. *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2007, no. 2, pp. 2–9 (in Russian).

14. Faldin N. V. *Matematicheskie modeli, dinamicheskie harakteristiki i analiz sistem avtomaticheskogo upravlenija* (K. A. Pupkov, N. D. Egupov ed.), Moscow, Publishing house of MGTU im. N. Je. Baumana, 2004, pp. 573–636 (in Russian).

15. Faldin N. V., Morzhov A. V. *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2006, no. 11, pp. 13–19 (in Russian).

УДК 519.7:681.31

DOI: 10.17587/mau/18.407-414

И. Ф. Чебурахин, д-р техн. наук, проф., logicifch@yandex.ru,

О. Н. Гавриш, аспирант, gavrish.o@gmail.com,

НИУ МАИ

Об эффективных методах синтеза булевых формул и схем из функциональных элементов

Целью данной работы является уточнение верхних оценок сложности симметрических булевых функций из стандартного и Жегалкина базисов, а также разработка алгоритмов для автоматизации синтеза дискретных устройств обработки информации. Предлагается конструктивный метод синтеза формул и схем на основе рекуррентных соотношений (функциональных уравнений) [9], сопровождаемый получением заранее аналитически верхних оценок различных показателей сложности (по числу букв; числу подформул; по числу функциональных элементов), в том числе и для схем минимальной сложности.

Ключевые слова: булевые функции, синтез формул и схем, функционал, декомпозиция, сложность, минимизация, функциональные уравнения, симметрические функции

Введение

Имеющиеся значительные успехи в создании и совершенствовании дискретных логических управляемых и вычислительных устройств имеют следующее обоснование. В прошлом столетии на основе булевой алгебры (математической логики) и достижений в электронике создаются первая, вторая и последующие ЭВМ. Далее процесс развития ЭВМ циклически повторяется: успехи математической логики подталкивают к созданию и решению других теоретических вопросов, относящихся к технике (аппаратная часть проекта), в свою очередь, для решения возникающих технических проблем приходится обращаться к математической логике и т. д. Таким образом, вначале создаются образцы вычислительной и управляемой техники, а затем они совершенствуются.

При этом разрабатываются методы минимизации синтеза формул и схем из функциональных элементов (ФЭ) по различным показателям сложности в стандартном базисе и в базисе Жегалкина. Из проводимых исследований в области математической кибернетики и дискретной математики следует, что получение требуемого минимального ре-

шения по определенным показателям сложности неизбежно предполагает использование алгоритмов переборного характера. Следствием этого является большая сложность (в том числе и вычислительная сложность и трудоемкость) получения такого решения уже для функций небольшой размерности. Это потребовало разработки новых подходов к постановке задачи и ее решению, заметно отличающихся по трудоемкости от переборных [1–3].

В ряде работ создана теория специальных алгоритмов оптимизации, алгоритмов вычисления оценок, алгебраическая теория алгоритмов и показано, что можно даже в явном виде строить экстремальные по качеству алгоритмы для решения очень широких классов трудно формализуемых задач, а также разрабатывать математические и прикладные аспекты теории интеллектуальных систем [4–6].

Особо важной является задача вывода оценки показателя сложности при представлении булевой функции в классах формул и схем. Для решения этой задачи в случае получения грубой оценки выбранного показателя сложности в работе применяется метод, основанный на функциональных уравнениях (рекуррентных соотношениях). Метод близок к применяемому ранее методу структурно-функци-