

В. И. Краснощеченко, канд. техн. наук, доц., kviip@yandex.ru,
Калужский филиал МГТУ им. Н. Э. Баумана

Разработка и исследование математической модели гибкого однозвенного манипулятора с использованием принципа наименьшего действия Гамильтона

Рассматривается аналитический подход к построению математической модели гибкого однозвенного манипулятора на основе принципа наименьшего действия Гамильтона. Получены необходимые уравнения как свободного, так и вынужденного движений манипулятора. Подробно описаны все процедуры вывода необходимых соотношений, включая условие ортогональности и системы уравнений для определения собственных форм и частот колебаний манипулятора. Полученная математическая модель учитывает только массу нагрузки, которая переносится схватом. Решение уравнения Эйлера—Бернулли методом разделения переменных позволило получить математическую модель гибкого манипулятора в пространстве состояний, которую удобно использовать для решения задач управления.

Ключевые слова: принцип наименьшего действия Гамильтона, гибкий манипулятор, математическая модель, уравнение Эйлера—Бернулли, метод разделения переменных

Введение и постановка задачи

В настоящее время в большинстве промышленных роботов-манипуляторов используются достаточно жесткие и тяжелые звенья, что позволяет пренебречь деформациями при рабочих операциях. Такой тип роботов имеет определенные недостатки: низкую скорость; высокое энергопотребление; низкое отношение полезная нагрузка/масса звена. Применение роботов с облегченными гибкими звеньями позволяет получить ряд преимуществ, а именно:

- увеличенную нагрузочную способность: более высокое отношение масса нагрузки/масса звена;
- увеличенную скорость перемещения;
- повышенную безопасность: увеличенная податливость и малый момент инерции звена снижают риски опасных травм;
- уменьшение потребления энергии: легкие звенья используют приводы меньшей мощности;
- увеличение рабочего пространства с использованием удлиненных звеньев;
- снижение стоимости.

Исследования гибких манипуляторов с применением соответствующих математических моделей ведутся уже давно и, тем не менее, остается ряд вопросов:

1) отсутствует (по крайней мере, для автора) прозрачность и полнота вывода окончательных уравнений;

2) до сих пор для одних и тех же исходных данных имеются различные математические модели, различающиеся по граничным условиям (особенно это касается заделки звена (балки) на ступице привода) и совпадающие только по описанию движе-

ния упругой балки уравнением Эйлера—Бернулли. Это можно проследить по работам [1—8].

В данной работе решаются следующие задачи:

- вывод на основе интегрального вариационного принципа Гамильтона уравнений как свободного, так и вынужденного движений упругой балки (гибкого звена) с нагрузкой на конце звена и формирование необходимых граничных условий;
- вывод необходимых уравнений для перехода от уравнения в частных производных к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, что позволит применять данную математическую модель для решения задач управления.

Забегая вперед, отметим, что полученная математическая модель совпадает только с моделью, представленной без вывода в монографии [7] в разделе "Robust Control of a Flexible-Link Manipulator".

Предварительные сведения

Схема манипулятора. Для вывода дифференциальных уравнений, описывающих динамику гибкого однозвенного манипулятора (ГОЗМ) с нагрузкой на конце звена, рассмотрим схематическое изображение движения ГОЗМ в горизонтальной плоскости (рис. 1), где

XOY — неподвижная система координат (СК);

xOy — локальная (подвижная) СК (ось Ox является касательной к деформируемому ГОЗМ в месте его крепления к приводу; является осью вращения абсолютно жесткого недеформируемого звена);

J_0 — момент инерции привода ГОЗМ [$\text{кг} \times \text{м}^2$];

m_L — (схват) масса точечной нагрузки (т. е. считаем ее момент инерции нулевым) [кг];

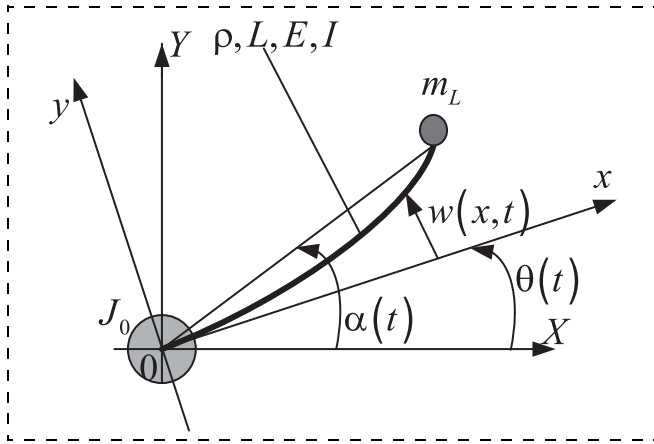


Рис. 1. Схематическое изображение движения ГОЗМ в горизонтальной плоскости

$\theta(t)$ — текущий угол поворота ГОЗМ как абсолютно жесткого тела [рад];

$\alpha(t)$ — текущий угол поворота нагрузки (схвата) [рад];

$w(x, t)$ — гибкое отклонение ГОЗМ от оси Ox в текущей точке x манипулятора $x \in [0, L]$, перпендикулярное к данной оси [м];

L — длина манипулятора [м];

ρ — погонная (линейная) массовая плотность ГОЗМ [кг/м];

I — момент инерции поперечного сечения звена манипулятора [м⁴];

E — модуль упругости Юнга для материала звена [Н/м²];

$EI \triangleq E \cdot I$ — изгибная жесткость звена манипулятора [Н×м²].

Примем следующие предположения:

- прямоугольное сечение звена манипулятора имеет высоту h , значительно превышающую ее ширину b , $h \gg b$ (рис. 2);
- вертикальные деформации при повороте ГОЗМ в горизонтальной плоскости отсутствуют (абсолютная вертикальная жесткость);
- длина звена манипулятора значительно превышает высоту его поперечного сечения, $L \gg h$.

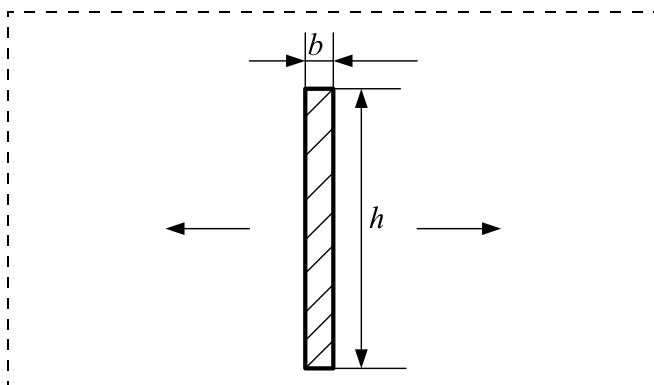


Рис. 2. Поперечное сечение звена манипулятора

Принцип наименьшего действия. Для получения дифференциальных уравнений, описывающих динамику ГОЗМ, воспользуемся интегральным вариационным принципом наименьшего действия Гамильтона [9]. Для этого необходимо определить кинетическую T и потенциальную U энергии и работу внешних (активных) сил. Введем интеграл действия [9–11]

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt = \int_{t_1}^{t_2} (L_0 + W) dt, \quad (1)$$

где L_0 — лагранжиан для свободных колебаний.

Принцип наименьшего действия Гамильтона гласит [9, 11]: если в моменты времени t_1 и t_2 механическая система занимает определенные положения, характеризуемые совокупностью обобщенных координат $q_i(t_1), q_i(t_2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, то между этими положениями система движется так, что интеграл действия имеет экстремальное значение (определяет истинное движение системы). На концах временного отрезка $[t_1, t_2]$ истинное движение не варьируется, т. е.

$$\delta q_i(t_1) = 0, \delta q_i(t_2) = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Вариации обобщенных координат, удовлетворяющие условию (2), назовем допустимыми.

Для стационарных систем (связей) экстремум сводится к минимуму, т. е. вариация интеграла действия (1) равна нулю:

$$\delta S = 0. \quad (3)$$

Определение собственных частот и форм колебаний ГОЗМ

Вначале рассмотрим свободное движение системы (отсутствуют внешние активные силы $W = 0$) для определения собственных частот и форм колебаний звена манипулятора, рассматриваемого как упругая балка прямоугольного сечения с точечной массой на свободном конце и жестко закрепленной на другом конце. Имеем:

- кинетическая энергия свободного звена с нагрузкой

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{w}(x, t)^2 dx + \frac{1}{2} m_L \dot{w}(L, t)^2, \quad (4)$$

где точка сверху обозначает производную по времени;

- потенциальная энергия свободного звена

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI (w''(x, t))^2 dx, \quad (5)$$

где штрих сверху обозначает частную производную по пространственной координате x . Сформируем

интеграл действия по Гамильтону для свободного движения ГОЗМ с нагрузкой:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{w}(x, t)^2 dx + \frac{1}{2} m_L \dot{w}(L, t)^2 - \frac{1}{2} \int_0^L EI(w''(x, t))^2 dx \right] dt. \quad (6)$$

Вариацию δS действия (функционала) S будем определять по Лагранжу [12–14], т. е. составим функцию

$$\begin{aligned} \chi(\alpha) = S(q + \alpha \cdot \delta q) = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left[\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} (w(x, t) + \alpha \cdot \delta w(x, t)) \right)^2 dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} m_L \left(\frac{\partial}{\partial t} (w(L, t) + \alpha \cdot \delta w(L, t)) \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (w(x, t) + \alpha \cdot \delta w(x, t)) \right)^2 dx \right] dt, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{\partial}{\partial \alpha} \chi(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \dot{w}(x, t) \delta \dot{w}(x, t) dx dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} m_L \dot{w}(L, t) \delta \dot{w}(L, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EI w''(x, t) \delta w''(x, t) dx dt. \quad (7) \end{aligned}$$

Каждое из слагаемых выражения (7) проинтегрируем по частям и учтем условия принципа наименьшего действия (2):

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \dot{w}(x, t) \delta \dot{w}(x, t) dx dt = \\ = \int_0^L \rho \dot{w}(x, t) \delta w(x, t) dx \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \ddot{w}(x, t) \delta w(x, t) dx dt = \\ = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \ddot{w}(x, t) \delta w(x, t) dx dt; \quad (8a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} m_L \dot{w}(L, t) \delta \dot{w}(L, t) dt = \\ = m_L \dot{w}(L, t) \delta w(L, t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m_L \ddot{w}(L, t) \delta w(L, t) dt = \\ = - \int_{t_1}^{t_2} m_L \ddot{w}(L, t) \delta w(L, t) dt; \quad (8б) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EI w''(x, t) \delta w''(x, t) dx = \\ = EI w''(x, t) \delta w'(x, t) \Big|_0^L - \int_0^L EI w''(x, t) \delta w'(x, t) dx = \\ = EI w''(x, t) \delta w'(x, t) \Big|_0^L - EI w'''(x, t) \delta w(x, t) \Big|_0^L + \\ + \int_0^L EI w''''(x, t) \delta w(x, t) dx \Big] dt. \quad (8в) \end{aligned}$$

Комментарий к полученным выражениям. В формулах (8а), (8б) использованы условия (2). В формуле (8в) интегрирование по частям проводилось по пространственной переменной x , внешнее интегрирование — по переменной t . Из формул (8а), (8в) в силу произвольности вариаций $\delta w(x, t)$ под интегралом получаем (обратим внимание на знак минус перед общим интегралом в (8в)) уравнение Эйлера—Бернулли для свободных колебаний упругой балки

$$\delta w(x, t): \rho \ddot{w}(x, t) + EI w''''(x, t) = 0. \quad (9)$$

Остальные выражения в формулах (8б) и (8в), не связанные с условиями (2), определяют некоторые условия трансверсальности (т. е. граничные условия вариационной задачи [12–14]), а именно:

- наличие перерезывающей силы на правом конце от действия сил инерции нагрузки

$$\delta w(L, t): m_L \ddot{w}(L, t) - EI w'''(L, t) = 0; \quad (10)$$

- свободный правый конец (нет изгибающего момента, момент инерции нагрузки равен нулю)

$$\delta w'(L, t): w''(L, t) = 0; \quad (11)$$

- жесткая заделка на левом конце:

$$w(0, t) = 0, \quad (12)$$

$$w'(0, t) = 0. \quad (13)$$

Полученное уравнение в частных производных (9) с граничными условиями (10)—(13) используем для нахождения собственных частот и гибких мод изгибных колебаний. Для этого применим метод Фурье (метод разделения переменных) [15].

Метод Фурье. Решение будем искать в виде суммы бесконечного ряда

$$w(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t), \quad (14)$$

где $\phi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, — формы собственных колебаний ГОЗМ; $q_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, — обобщенные координаты, т. е. решение уравнения (9) определяется разложением по собственным функциям.

В методе разложения Фурье для удобства (на начальном этапе, без потери общности) используем в разложении (14) одно слагаемое, т. е. считаем

$$w(x, t) = \phi(x)q(t). \quad (15)$$

Подставляя выражение (15) в уравнение (9), получаем

$$\frac{EI}{\rho} \frac{\phi''''(x)}{\phi(x)} = -\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)}. \quad (16)$$

Равенство (16) для двух независимых переменных x, t должно выполняться для любых значений x, t . Это возможно, если приравнять (16) некоторой константе, например ω^2 . Тогда имеем

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0; \quad (17)$$

$$\phi''''(x) - \frac{\omega^2 \rho}{EI} \phi(x) = 0. \quad (18)$$

Обозначим $\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho}{EI}$, подставим в формулу (18)

и решим полученное обыкновенное линейное стационарное дифференциальное уравнение. Характеристический полином $s^4 - \beta^4 = 0$ имеет корни $\{\beta, -\beta, j\beta, -j\beta\}$, которые определяют общее решение однородного уравнения (18):

$$\phi(x) = A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x) + C \operatorname{sh}(\beta x) + D \operatorname{ch}(\beta x). \quad (19)$$

Если теперь в соотношении (14) ограничиться конечным числом $\infty > n_f \geq 1$ форм собственных колебаний (гибких мод), то получаем

$$\phi_i(x) = A_i \sin(\beta_i x) + B_i \cos(\beta_i x) + C_i \operatorname{sh}(\beta_i x) + D_i \operatorname{ch}(\beta_i x), \\ i = 1, 2, \dots, n_f. \quad (20)$$

Для нахождения коэффициентов $A_i, \dots, D_i$ и частот β_i воспользуемся граничными условиями (10)—(13) и условием ортогональности собственных форм колебаний.

Условие ортогональности должно обеспечить выполнение уравнения (17) для каждой обобщенной координаты, т. е.

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_f. \quad (21)$$

С точки зрения вариационного исчисления это значит, что коэффициенты при обобщенных координатах в уравнении (21) должны сохраняться при всех допустимых вариациях $\delta q_j(t), j = 1, 2, \dots, n_f$. Из соотношений (8а)—(8в), (11)—(13) с учетом разложения (14) имеем:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\rho \ddot{w}(x, t) + EI w''''(x, t)) \delta w(x, t) dx + \\ + m_L \ddot{w}(L, t) \delta w(L, t) - EI w'''(L, t) \delta w(L, t) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \left(\rho \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) + EI \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i''''(x) q_i(t) \right) \times \right. \\ \times \sum_{j=1}^{n_f} \phi_j(x) \delta q_j(t) dx + m_L \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(L) \ddot{q}_i(t) \times \\ \times \sum_{j=1}^{n_f} \phi_j(L) \delta q_j(t) - EI \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i'''(L) q_i(t) \sum_{j=1}^{n_f} \phi_j(L) \delta q_j(t) \left. \right] dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\int_0^L \rho \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(x) \phi_j(x) dx + \right. \right. \\ \left. \left. + m_L \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(L) \phi_j(L) \right) \ddot{q}_i(t) + \right. \\ \left. + \left(\int_0^L EI \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i''''(x) \phi_j(x) dx - \right. \right. \\ \left. \left. - EI \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i'''(L) \phi_j(L) \right) q_i(t) \right] \delta q_j(t) dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\int_0^L \rho \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(x) \phi_j(x) dx + \right. \right. \\ \left. \left. + m_L \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(L) \phi_j(L) \right) \ddot{q}_i(t) + \right. \\ \left. + \left(\int_0^L \rho \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(x) \phi_j(x) dx + \right. \right. \\ \left. \left. + m_L \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(L) \phi_j(L) \right) \omega_i^2 q_i(t) \right] \delta q_j(t) dt, \quad (22)$$

где при последнем переходе использованы соотношения (10), (17) и (18). Из выражения (22) следует, что равенство (21) при произвольных отдельных вариациях $\delta q_j(t)$ будет справедливо, если выполнены условия ортогональности

$$\delta q_j(t): \int_0^L \rho \phi_i(x) \phi_j(x) dx + m_L \phi_i(L) \phi_j(L) = \delta_{ij}; \\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (23)$$

Определение собственных частот и форм колебаний ГОЗМ. После получения необходимых соотношений перейдем к нахождению аналитических выражений для определения частот и форм колебаний свободного ГОЗМ. Подставляя разложение (14) в соотношения (10)—(13) с учетом представления (19) и $q_i(t) \neq 0$ почти для всех $t \in [t_1, t_2]$, а также проведя замену

$$\omega^2/EI = \beta^4/\rho, \quad (24)$$

приходим к следующим уравнениям для определения частот и форм (нижние индексы опустим, так как определяем общее уравнение, из которого находим необходимые решения):

$$\begin{aligned} \phi(0) &= B + D = 0; \\ \phi'(0) &= A\beta + C\beta = 0; \\ \phi''(L) &= -A\sin(\beta L)\beta^2 - B\cos(\beta L)\beta^2 + \\ &+ C\operatorname{sh}(\beta L)\beta^2 + D\operatorname{ch}(\beta L)\beta^2 = 0; \\ \phi'''(L) &+ \frac{\beta^4 m_L}{\rho} \phi(L) = -A\cos(\beta L)\beta^3 + B\sin(\beta L)\beta^3 + \\ &+ C\operatorname{ch}(\beta L)\beta^3 + D\operatorname{sh}(\beta L)\beta^3 + \frac{m_L \beta^4}{\rho} (A\sin(\beta L) + \\ &+ B\cos(\beta L) + C\operatorname{sh}(\beta L) + D\operatorname{ch}(\beta L)) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Система линейных однородных уравнений (25) относительно неизвестных коэффициентов A, B, C, D будет иметь нетривиальное решение, если определитель матрицы уравнений (25) будет равен нулю. С учетом того, что $\beta \neq 0$ получаем следующее уравнение для нахождения частот $\beta_i, i = 1, 2, \dots$:

$$(\cos(\beta L)\operatorname{sh}(\beta L) - \sin(\beta L)\operatorname{ch}(\beta L))m_L\beta + (\cos(\beta L)\operatorname{ch}(\beta L) + 1)\rho = 0, \quad (26)$$

а затем из формулы

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

находим собственные частоты свободных колебаний ГОЗМ.

Неизвестные коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i , определяющие гибкую форму свободных колебаний для частоты ω_i , находим из следующей системы алгебраических уравнений: выбираем любые три уравнения из системы (25) и добавляем к ним условие ортогональности (23):

$$\int_0^L \rho \phi^2(x) dx + m_L \phi^2(L) = F(A_i, B_i, C_i, D_i) = 1. \quad (28)$$

Замечание. Описанный выше двухэтапный алгоритм определения частот, а затем коэффициентов форм колебаний можно объединить, решая сразу систему из пяти алгебраических уравнений (25), (28).

Движение ГОЗМ при наличии внешнего момента

Теперь рассмотрим угловое перемещение звена манипулятора под действием внешнего вращающего момента $\tau(t)$. В этом случае работа внешних обобщенных сил имеет вид

$$W = \tau\theta, \quad (29)$$

где, напомним, θ — угол поворота ГОЗМ под действием момента τ , рассматриваемого как абсолютно жесткое тело. Теперь при повороте общее пере-

мещение любой точки $x \in [0, L]$ деформированного звена манипулятора определяется из соотношения

$$y(x, t) = x\theta(t) + w(x, t). \quad (30)$$

Уравнения движения манипулятора определяются также с использованием принципа наименьшего действия Гамильтона и метода разделения переменных Фурье.

Имеем:

- кинетическая энергия звена с нагрузкой

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^L \rho (x\dot{\theta}(t) + \dot{w}(x, t))^2 dx + \\ &+ \frac{1}{2} m_L (L\dot{\theta}(t) + \dot{w}(L, t))^2; \end{aligned} \quad (31)$$

- потенциальная энергия звена

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI (w''(x, t))^2 dx; \quad (32)$$

- работа внешних сил

$$W = \tau(t)\theta(t). \quad (33)$$

Вариация интеграла действия (1) для соотношений (31)–(33) с использованием принципа наименьшего действия и условия (2) приводит к следующим соотношениям.

- ♦ *Вариации кинетической энергии для интеграла действия*

1) первая компонента

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2(t) \right) dt = -J_0 \ddot{\theta}(t) \delta\theta(t); \quad (34)$$

2) вторая компонента

$$\begin{aligned} &\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho (x\dot{\theta}(t) + \dot{w}(x, t))^2 dx \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x^2 \dot{\theta}(t) \delta\dot{\theta}(t) dx \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \dot{\theta}(t) \delta\dot{w}(x, t) dx \right) dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \dot{w}(x, t) \delta\dot{\theta}(t) dx \right) dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho \dot{w}(x, t) \delta\dot{w}(x, t) dx \right) dt. \end{aligned}$$

Поэлементно:

2а)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x^2 \dot{\theta}(t) \delta\dot{\theta}(t) dx \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\rho L^3}{3} \ddot{\theta}(t) \delta\theta(t) dt; \quad (35)$$

2б)

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \dot{\theta}(t) \delta \dot{w}(x, t) dx \right) dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \ddot{\theta}(t) \delta w(x, t) dx \right) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \ddot{\theta}(t) \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(x) \delta q_i(t) dx \right) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n_f} a_{i1} \ddot{\theta}(t) \delta q_i(t) dt, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$a_{i1} = \int_0^L \rho x \phi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_f; \quad (37)$$

2в)

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \dot{w}(x, t) \delta \dot{\theta}(t) dx \right) dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \ddot{w}(x, t) \delta \theta(t) dx \right) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) dx \right) \delta \theta(t) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n_f} a_{i1}(t) \ddot{q}_i(t) \delta \theta(t) dt; \end{aligned} \quad (38)$$

2г)

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho \dot{w}(x, t) \delta \dot{w}(x, t) dx \right) dt &= \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho \ddot{w}(x, t) \delta w(x, t) dx \right) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) \sum_{j=1}^{n_f} \phi_j(x) \delta q_j(t) dx \right) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(x) \phi_j(x) \ddot{q}_i(t) \delta q_j(t) dx \right) dt; \end{aligned}$$

3) третья компонента

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m_L (L \dot{\theta}(t) + \dot{w}(L, t))^2 \right) dt &= \\ &= - m_L \int_{t_1}^{t_2} (L \ddot{\theta}(t) + \ddot{w}(L, t)) (L \delta \theta(t) + \delta w(L, t)) dt = \\ &= - m_L \int_{t_1}^{t_2} L^2 \ddot{\theta}(t) \delta \theta(t) dt - m_L \int_{t_1}^{t_2} L \ddot{\theta}(t) \delta w(L, t) dt - \\ &- m_L \int_{t_1}^{t_2} L \ddot{w}(L, t) \delta \theta(t) dt - m_L \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w}(L, t) \delta w(L, t) dt. \end{aligned} \quad (39)$$

Поэлементно:

3а)

$$m_L \int_{t_1}^{t_2} L^2 \ddot{\theta}(t) \delta \theta(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} m_L L^2 \ddot{\theta}(t) \delta \theta(t) dt; \quad (40)$$

3б)

$$\begin{aligned} m_L \int_{t_1}^{t_2} L \ddot{\theta}(t) \delta w(L, t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} m_L L \ddot{\theta}(t) \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(L) \delta q_i(t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} m_L L \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(L) \ddot{\theta}(t) \delta q_i(t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n_f} a_{i2} \ddot{\theta}(t) \delta q_i(t) dt, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$a_{i2} = m_L L \phi_i(L), \quad i = 1, 2, \dots, n_f; \quad (42)$$

3в)

$$\begin{aligned} m_L \int_{t_1}^{t_2} L \ddot{w}(L, t) \delta \theta(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} m_L L \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(L) \ddot{q}_i(t) \delta \theta(t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n_f} a_{i2}(t) \ddot{q}_i(t) \delta \theta(t) dt; \end{aligned} \quad (43)$$

3г)

$$\begin{aligned} m_L \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w}(L, t) \delta w(L, t) dt &= \\ &= m_L \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(L) \ddot{q}_i(t) \sum_{j=1}^{n_f} \phi_j(L) \delta q_j(t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} m_L \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(x) \phi_j(x) \ddot{q}_i(t) \delta q_j(t) dt. \end{aligned} \quad (44)$$

Вариация потенциальной энергии получена выше при выводе уравнений для определения собственных форм и частот колебаний. Поэтому приводим сразу результат из выражения (22):

$$\begin{aligned} -\delta \frac{1}{2} \int_0^L EI (w''(x, t))^2 dx &= - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L EI w''(x, t) \delta w''(x, t) dx \right] dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(EI w'''(L, t) \delta w(L, t) - \int_0^L EI w''''(x, t) \delta w(x, t) dx \right) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \delta_{ij} \omega_i^2 q_i(t) \delta q_j(t) dt. \end{aligned} \quad (45)$$

Вариация внешней активной работы:

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} W(t) dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} \tau(t) \delta \theta(t) dt. \quad (46)$$

Теперь, согласно основной теореме и лемме вариационного исчисления, соберем все компоненты, связанные с каждой из независимых вариаций, вместе и приравняем полученные выражения нулю. В результате получаем дифференциальные уравнения, описывающие динамику ГОЗМ. Имеем:

- Вариация $\delta \theta(t)$: из выражений (34), (35), (40), (38), (43), (46)

$$\begin{aligned} \left(J_0 + \frac{\rho L^3}{3} + m_L L^2 \right) \ddot{\theta}(t) + \sum_{i=1}^{n_f} (a_{i1} + a_{i2}) \ddot{q}_i(t) = \\ = J_\Sigma \ddot{\theta}(t) + \sum_{i=1}^{n_f} a_i \ddot{q}_i(t) = \tau(t), \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} J_\Sigma = J_0 + \frac{\rho L^3}{3} + m_L L^2; \\ a_i = a_{i1} + a_{i2} = \int_0^L \rho x \phi_i(x) dx + m_L L \phi_i(L), \\ i = 1, 2, \dots, n_f. \end{aligned}$$

- Вариация $\delta q_i(t)$: из выражений (39), (44), (45), (41), (36) с учетом условия ортогональности (23) = (39) + (44)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) + (a_{i1} + a_{i2}) \ddot{\theta}(t) = \\ = \ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) + a_i \ddot{\theta}(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_f. \end{aligned} \quad (48)$$

Из полученных результатов видно, что уравнение Эйлера—Бернулли (9) свободного ГОЗМ для вращающейся упругой балки дополняется компонентой из уравнения (36), а именно,

$$\delta w(x, t): \rho(x) \ddot{\theta}(t) + \ddot{w}(x, t) + EI w''''(x, t) = 0. \quad (49)$$

Уравнения (47), (48) описывают динамику ГОЗМ с нагрузкой, но при отсутствии диссипации энергии. В реальных объектах (приводах и упругих балках) всегда имеют место диссипативные силы для рассеивания энергии, поэтому в уравнениях (47), (48) добавим диссипативные составляющие. Получим окончательные уравнения динамики ГОЗМ:

$$\begin{aligned} \Sigma: J_\Sigma \ddot{\theta}(t) + \gamma \dot{\theta}(t) + \sum_{i=1}^{n_f} a_i \ddot{q}_i(t) = \tau(t); \\ \ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) + a_i \ddot{\theta}(t) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n_f, \end{aligned} \quad (50)$$

где γ — коэффициент вязкого трения в приводе; $0 < \xi_i \ll 1$ — коэффициент демпфирования упругих деформаций для i -й гибкой моды.

Заключение

На основе принципа наименьшего действия Гамильтона получены дифференциальные уравнения движения ГОЗМ, которые можно использовать для решения задач управления. Представлены уравнения для определения собственных форм и частот манипулятора. Полученная математическая модель учитывает только массу нагрузки, которая переносится схватом, т. е. не учитывается момент инерции нагрузки, считаем массу нагрузки точечной. Если учитывается момент инерции нагрузки, то необходимо доопределить граничное условие (11) и включить изгибающий момент от нагрузки на конце ГОЗМ.

Список литературы

1. Barbieri E., Ozguner U. Unconstrained and constrained mode expansions for a flexible slewing link // ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control. 1988. V. 110. P. 416—421.
2. Pereira E., Aphale S. S., Feliu V. Integral Resonant Control for Vibration Damping and Precise Tip-Positioning of a Single-Link Flexible Manipulator // IEEE/ASME Trans. on Mechatronics. 2011. V. 16, N. 2. P. 232—240.
3. Cannon R. H., Schmitz Jr. E. Initial Experiments on the End-Point Control of Flexible One-Link Robot // Intern. J. Robotics Reseach. 1984. V. 3, N. 3. P. 62—75.
4. De Luca A., Di Giovanni G. Rest-to-rest motion of a one-link flexible forearm // In Proc. of IEEE/ASME Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics. 2001. P. 923—928.
5. Qian W. T., Ma C. C. A New Controller Design for a Flexible One-Link Manipulator // IEEE Trans. Automatic Control. 1992. V. 37, N. 1. P. 132—137.
6. Tokhi O., Azad A. K. M. Modelling of a Single Link Flexible Manipulator System: Theoretical and Practical Investigations // Robotica. 1996. V. 14. P. 91—102.
7. Gu D.-W., Petkov P. Hr., Konstantinov M. Robust Control Design with Matlab. London: Springer Verlag, 2005. 389 p.
8. Mallkarjuniah S., Narayanna Reddy S. Design of PID Controller for Flexible Link Manipulator // Int. Journal of Engineering Research and Appl. 2013. V. 3, N. 1. P. 1207—1212.
9. Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. М.: Наука, 1965. 847 с.
10. Бугаенко Г. А., Маланин В. В., Яковлев В. И. Основы классической механики. М.: Высшая школа, 1999. 366 с.
11. Айзерман М. А. Классическая механика. М.: Наука, 1980. 367 с.
12. Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 488 с.
13. Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И. Вариационное исчисление. М.: Наука, 1973. 192 с.
14. Каргашев А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1980. 288 с.
15. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996. 366 с.

Development and Investigation of the Mathematical Model of a Flexible Single-Link Manipulator with the Use of the Hamilton's Principle

V. I. Krasnoshchchenko, kviip@yandex.ru✉,

Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248600, Russian Federation

Corresponding author: Krasnoshchchenko Vladimir I., Ph. D., Senior Lecturer, Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248600, Russian Federation, e-mail: kviip@yandex.ru

Received on October 21, 2016

Accepted on November 25, 2016

The links, presently used in most of the industrial robots-manipulators, are rigid and heavy, which allows us to neglect deformations during the working operations. Such kind of a robot has certain drawbacks: low speed; high energy consumption; low payload-to-weight ratio, etc. Application of the robots with lightweight links gives a number of advantages. Namely: better payload-to-weight ratio; higher speed of movement; increased safety; lower energy consumption; bigger working space with the use of lengthened links; and lower cost. However, such type of a manipulator has an essential drawback — flexibility of a link, which complicates its mathematical model. The flexible single-link manipulator considered in the article as a control object has been attractive for the control specialists for a long time. A regular approach to the design control systems begins with development of a mathematical model of a plant, which describes its dynamic properties in the best way. However, an analysis of the numerous articles and monographs on the problem revealed noticeable distinctions in the used mathematical models, while the initial data concerning the design and operation of the manipulator were the same. Especially this concerns the boundary conditions, the orthogonality conditions and expressions for the flexible mode shapes. In this paper all the formulas for the free and forced motions of the flexible manipulator were received only on the basis of the Hamilton's principle and assumed mode method, namely: the governing equation of motion — Euler-Bernoulli equations, boundary conditions, orthogonality conditions, expressions for the mode shapes and also finite dimensional approximation of the model in the state space. The development of the appropriate formulas is described in every detail.

Keywords: Hamilton's principle, flexible manipulator, mathematical model, Euler-Bernoulli equation, assumed mode method, boundary conditions, orthogonality conditions

For citation:

Krasnoshchchenko V. I. Development and Investigation of the Mathematical Model of a Flexible Single-Link Manipulator with the Use of the Hamilton's Principle, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 383–390.

DOI: 10.17587/mau.18.383-390

References

1. Barbieri E., Ozguner U. Unconstrained and constrained mode expansions for a flexible slewing link, *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1988, vol. 110, pp. 416–421.
2. Pereira E., Aphale S. S., Feliu V. Integral Resonant Control for Vibration Damping and Precise Tip-Positioning of a Single-Link Flexible Manipulator, *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, 2011, vol. 16, no. 2, pp. 232–240.
3. Cannon R. H., Schmitz Jr. E. Initial Experiments on the End-Point Control of Flexible One-Link Robot, *Intern. J. Robotics Reseach*, 1984, vol. 3, no. 3, pp. 62–75.
4. De Luca A., Di Giovanni G. Rest-to-rest motion of a one-link flexible forearm, *In Proc. of IEEE/ASME Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics*, 2001, pp. 923–928.
5. Qian W. T., Ma C. C. A New Controller Design for a Flexible One-Link Manipulator, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, vol. 37, no. 1, pp. 132–137.
6. Tokhi O., Azad A. K. M. Modelling of a Single Link Flexible Manipulator System: Theoretical and Practical Investigations, *Robotica*, 1996, vol. 14, pp. 91–102.
7. Gu D.-W., Petkov P. Hr., Konstantinov M. Robust Control Design with Matlab, London, Springer Verlag, 2005, 389 p.
8. Mallikarjuniah S., Narayanna Reddy S. Design of PID Controller for Flexible Link Manipulator, *Int. Journal of Engineering Research and Appl.*, 2013, vol. 3, no. 1, pp. 1207–1212.
9. Javorskij B. M., Detlaf A. A. *Spravochnik po fizike dlja inzhenerov i studentov vuzov* (Handbook in physics for engineers and students of high schools, in Russian), Moscow, Nauka, 1965, 847 p. (in Russian).
10. Bugaenko G. A., Malanin V. V., Jakovlev V. I. *Osnovy klassicheskoy mehaniki* (Foundations of the classical mechanics, in Russian), Moscow, Vysshaja shkola, 1999, 366 p. (in Russian).
11. Ajzerman M. A. *Klassicheskaja mehanika* (Classical mechanics), Moscow, Nauka, 1980, 367 p. (in Russian).
12. Van'ko V. I., Ermoshina O. V., Kuvyrkin G. N. *Variacionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie* (Calculus of variations and optimal control), Moscow, Publishing house of MGTU im. N.Je. Baumana, 2006, 488 p. (in Russian).
13. Krasnov M. L., Makarenko G. I., Kiselev A. I. *Variacionnoe ischislenie* (Calculus of variations), Moscow, Nauka, 1973, 192 p. (in Russian).
14. Kartashev A. P., Rozhdestvenskij B. L. *Obyknovennye differencial'nye uravnenija i osnovy variacionnogo ischislenija* (The ordinary differential equations and foundations of calculus of variations), Moscow, Nauka, 1980, 288 p. (in Russian).
15. Martinson L. K., Malov Ju. I. *Differencial'nye uravnenija matematicheskoy fiziki* (Differential equations of mathematical physics), Moscow, Publishing house of MGTU im. N. Je. Baumana, 1996, 366 p. (in Russian).