

В. И. Ловчаков, д-р техн. наук, проф., lovvi50@mail.ru,
Тульский государственный университет

Необходимые условия максимального быстродействия линейных динамических систем

Для линейных непрерывных объектов высокого порядка рассматривается задача синтеза при учете имеющихся ограничений на управление и перерегулирование оптимального регулятора с минимальным временем регулирования, понимаемым в смысле классической теории автоматического управления. В форме теоремы сформулированы необходимые условия максимального быстродействия линейных систем, определяющие распределение полюсов оптимальной замкнутой системы управления.

Ключевые слова: линейный одномерный объект, критерий быстродействия, перерегулирование, полюса оптимальной системы

Введение

Основным показателем качества любой системы автоматического управления техническим объектом является ее быстродействие. Для многих же технологических процессов, производственных агрегатов желательно, чтобы системы управления, входящие в их состав, отвечали критерию оптимальности по быстродействию, который непосредственно определяет их эффективность функционирования, производительность. Однако строгое решение задач оптимального управления по критерию быстродействия в форме обратной связи представляет серьезную теоретическую проблему даже для линейных объектов относительно невысокого порядка ($n = 3, 4, 5$). Действительно, задача быстродействия полностью решена для объектов второго порядка методом фазовой плоскости [1, 2]. Для объектов третьего порядка быстродействующее управление точно (аналитически) найдено только в отдельных частных случаях [1]. Соответственно, для объектов четвертого и более высоких порядков аналитические решения задачи быстродействия практически неизвестны [3]. С другой, прикладной точки зрения реализация строго оптимальных по быстродействию релейных алгоритмов управления, отличающихся математической сложностью, серьезно затруднена и соответственно требует многократно больших технических и экономических затрат в сравнении с линейными алгоритмами управления. При этом отметим, что применение строго оптимальных релейных алгоритмов в условиях действия интенсивных случайных возмущений является и нецелесообразным по причине увеличения ими среднеквадратичной ошибки регулирования системы по сравнению с теми же линейными законами управления [4]. Необходимо также подчеркнуть, что более 90 % прикладных задач управления техническими объектами решаются с использованием линейных законов обратной связи, например, стандартных П, ПИ и ПИД регуляторов [5].

В связи с указанными причинами в данной работе рассматривается задача синтеза линейной системы управления с минимальным временем переходных процессов, понимаемым в смысле клас-

сической теории систем автоматического управления. Данная известная задача управления согласно анализу работ [11–14] для многих объектов решается приближенными способами, а для некоторых объектов, описываемых передаточными функциями с полюсами и нулями неустойчивого характера, является нерешенной. Ниже предлагается решение данной задачи в ее новой постановке, учитывающей ограничение на перерегулирование синтезируемой системы управления.

1. Постановка задачи управления

Рассмотрим одномерные объекты с постоянными параметрами, динамика которых адекватно описывается передаточной функцией (ПФ)

$$W(p) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n},$$

$$m \leq n - 1, \quad (1)$$

общего вида, а их сигнал управления подчиняется ограничению $|u(t)| \leq u_{\max}$.

Для данных объектов сформулируем задачу максимального быстродействия аналогично задаче управления, решаемой в работе [14]: *требуется найти передаточную функцию регулятора, переводящего объект (1) из начального нулевого состояния в конечное, определяемое заданием x_z , с минимальным значением времени переходных процессов системы $t_{\text{пп}}$ и заданным значением перерегулирования*

$$\sigma \leq \sigma^*. \quad (2)$$

Напомним, что временем переходных процессов линейной системы автоматического управления (САУ) называют наименьшее время, по истечении которого отклонение регулируемой выходной переменной от установившегося значения не превышает некоторой заданной величины Δ [13]. В дальнейшем для конкретности принимается значение $\Delta = e^{-\pi} \cdot 100 \% = 4,321 \%$.

Подчеркнем, что в отличие от классической задачи оптимального быстродействия, решением которой является релейный алгоритм управления,

сформулированная задача называется задачей максимального быстродействия линейной системы. Она близка к задаче, исследуемой в работе [14], и отличается от последней только учетом ограничения (2). Необходимо подчеркнуть, что перерегулирование σ^* является важнейшим показателем качества проектируемой САУ, который, с одной стороны, характеризует запас устойчивости системы, а с другой, важное технологическое ограничение, обеспечиваемое системой. Например, для определенных электротермических систем перерегулирование вообще исключается в целях обеспечения сохранности нагревательных элементов и продления срока их эксплуатации. Поэтому значение σ^* для проектируемой системы, как правило, оговаривается. В данной работе, имеющей теоретический характер, для определенности принимается $\sigma^* = \Delta = 4,321\%$.

В работе [14] быстродействующий регулятор отыскивается в форме передаточной функции определенной структуры с использованием метода синтеза по желаемой передаточной функции, определяемой, в свою очередь, в форме нормированной ПФ или передаточной функции в форме Вышнеградского. Как известно, произвольная ПФ (1) может быть преобразована в нормированную заменой переменной p новой переменной $q = \alpha p$, $\alpha = \sqrt[n]{a_0/a_n}$:

$$\overline{W}(q) = \frac{\overline{b}_0 q^m + \overline{b}_1 q^{m-1} + \overline{b}_2 q^{m-2} + \dots + \overline{b}_m}{q^n + \overline{a}_1 q^{n-1} + \overline{a}_2 q^{n-2} + \dots + \overline{a}_{n-1} q + 1}, \quad (3)$$

где

$$\overline{b}_i = \frac{b_i}{a_n \alpha^{m-i}}, \quad \overline{a}_k = \frac{a_k}{a_n \alpha^{m-k}},$$

$$i = 0, 1, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Замена $p = q/\alpha$ переменной преобразования Лапласа равносильна замене $t = \alpha t$ для переменной оригинала и умножения изображения на α . Так как умножение переходной функции на константу не влияет на время регулирования, то время регулирования исходной системы $t_{пп}$ и время регулирования $\tau_{пп}$ для системы с нормированной передаточной функцией связано соотношением $t_{пп} = \alpha \tau_{пп}$. Другие прямые показатели качества, в том числе перерегулирование, для систем управления с исходной и нормированной передаточными функциями совпадают.

Вслед за работами [11, 12] в статье [14] в качестве желаемой (оптимальной) передаточной функции используется нормированная функция вида $W_n(q) = 1/N(q)$, причем характеристический полином $N(q)$ имеет комплексные корни с одинаковыми вещественными частями η и мнимыми частями, образующими арифметическую прогрессию с разностью и первым членом, равным γ . В работе [11] показано, что существует минимальное значение

$\mu = \gamma/\eta$, при котором время регулирования системы минимально. Ниже, в соответствии с этой работой, приводятся характеристические полиномы для трех значений степеней, начиная с $n = 2$, при оптимальных значениях μ :

$$n = 2: N_2(q) = q^2 + 1,38q + 1;$$

$$n = 3: N_3(q) = q^3 + 2,05q^2 + 2,3q + 1; \quad (4)$$

$$n = 4: N_4(q) = q^4 + 2,6q^3 + 3,8q^2 + 2,8q + 1.$$

Далее автор работы [14], зная описание объекта (1) и желаемую передаточную функцию замкнутой системы $W_n(q) = 1/N(q)$ с полиномами (4), известным методом синтеза определяет оптимальную ПФ искомого регулятора. Рассмотренное решение задачи быстродействия имеет следующие недостатки:

1) как будет показано далее, полиномы (4), степень которых выше двух, не обеспечивают максимального быстродействия САУ;

2) предложенное решение не учитывает ограничение на перерегулирование синтезируемой системы, которое является основным показателем качества для подавляющего числа систем управления и оказывает существенное влияние на длительность ее переходных процессов;

3) используемый метод синтеза в силу его особенностей применим не ко всем объектам с передаточными функциями (1). (Этот недостаток лучше исключить — в данной работе он не устраняется.)

Ниже предлагается подход к синтезу линейных систем управления с максимальным быстродействием, практически свободный от указанных недостатков.

2. Необходимые условия максимального быстродействия

В основе предлагаемого подхода лежит использование условий быстродействия, сформулированных в следующей **теореме**: линейная динамическая система четного порядка с передаточной функцией вида $W(p) = K/A(p)$, в которой перерегулирование не должно превышать заданное значение σ^* , а сигнал управления — ограничения $|u(t)| \leq u_{\max}$, может иметь минимальное время переходных процессов, определяемое с использованием зоны $\Delta = \sigma^*$, если

1) ее характеристические числа (полюса) расположены на окружности

$$|p_1| = |p_2| = \dots = |p_n| = R, \quad (5)$$

радиус которой R выбирается из условия выполнения ограничения на сигнал управления;

2) выбранное расположение полюсов вдоль окружности обеспечивает системе перерегулирование, равное заданному значению

$$\sigma = \sigma^*. \quad (6)$$

Предварительно, перед доказательством теоремы, отметим, что распределение полюсов оптимальной системы управления нечетного порядка удовлетворяет условию (5) лишь приближенно. Это условие первоначально было сформулировано в форме гипотезы в работе [15], в которой отмечалась принадлежность окружности (5) полюсов фильтров Баттерворса.

Также необходимо подчеркнуть, что в теореме рассматривается частный, но важный для практики управления случай назначения величины $\sigma^* = \Delta$ перерегулирования системы, который определяет возможность ее применения к решению в линейном приближении актуальной, так называемой задачи быстрогодействия по нескольким (одной) фазовым координатам [16]. Она формулируется следующим образом: найти управление в форме обратной связи $u(X)$, переводящее объект (1) из начального состояния $X(0) = X_0$ в желаемую область

$$|x_1(T)| \leq \Delta_1; |x_2(T)| \leq \Delta_2; \dots; |x_k(T)| \leq \Delta_k; k < n,$$

($\Delta_i, i = 1, 2, \dots, k$, — положительные числа, характеризующие заданную точность регулирования системы по соответствующей фазовой координате, представляющей отклонение определенной переменной от заданного режима) за минимальное время T , причем при $t > T$ синтезируемая замкнутая система управления остается в указанной желаемой области.

Сформулированная задача быстрогодействия по нескольким координатам является обобщением классической задачи оптимального быстрогодействия: она трансформируется в последнюю при $k = n$ и $\varepsilon_i = 0; i = 1, 2, \dots, n$. Соответственно при $k = 1$ задача управления, называемая задачей быстрогодействия одной координаты, является математически наиболее простой из рассматриваемых, но в то же время имеющей большое инженерное значение, так как, например, при $\Delta_1 = 0,05$ указанное время T совпадает с определением времени переходного процесса системы в классической теории управления.

Доказательство условия (5). При установлении равенства (5) будем исходить из следующего факта классической теории автоматического управления: существует линейная замкнутая система n -го порядка с максимальным быстрымдействием, которая является асимптотически устойчивой системой и соответственно, в общем случае, описывается передаточной функцией, имеющей некоторое число 2γ комплексных полюсов с отрицательной частью и $n - 2\gamma$ вещественных отрицательных полюсов:

$$W(p) = 1 / \prod_{i=1}^{n-2\gamma} (T_i p + 1) \prod_{j=1}^{\gamma} (T_j^2 p^2 + 2\zeta_j T_j p + 1). \quad (7)$$

Отметим, что передаточная функция (7) соответствует системе, представляющей последовательное соединение определенного числа апериодических и колебательных звеньев, характеризую-

щихся постоянными времени T_i и коэффициентами демпфирования ζ_j , причем коэффициент усиления системы условно принимается равным единице (он не влияет на время ее переходных процессов). Подчеркнем, что в данной работе рассматривается ограниченный класс быстродействующих систем, описываемый ПФ, числитель которых является константой. Аналогичный класс систем управления исследовался и в работе [14].

При решении сформулированной задачи максимального быстрогодействия системы (7) воспользуемся преобразованием (3) и в дальнейшем данную задачу будем рассматривать применительно к системе с ПФ

$$W(q) = 1 / \prod_{i=1}^{n-2\gamma} (\bar{T}_i q + 1) \prod_{j=1}^{\gamma} (\bar{T}_j^2 q^2 + 2\zeta_j \bar{T}_j q + 1), \quad (8)$$

в которой безразмерные (относительные) постоянные времени связаны соотношением

$$\prod_{i=1}^{n-2\gamma} \bar{T}_i \prod_{j=1}^{\gamma} \bar{T}_j^2 = 1. \quad (9)$$

Подчеркнем, что преобразование (3), осуществляющее переход к использованию относительного времени, не изменяет коэффициенты демпфирования ζ_j системы и, соответственно, не изменяет характер (форму) ее переходных процессов, а изменяет только масштаб изображения переходных процессов во времени.

При решении сформулированной задачи максимального быстрогодействия воспользуемся также физически ясным фактом, вытекающим из основ теории автоматического управления, что время переходных процессов системы (8) при фиксированных значениях ее параметров ζ_j (при фиксированном характере переходных процессов) является возрастающей функцией $t_{пп} = f(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_{n-\gamma})$ при увеличении значений ее аргументов — постоянных времени $\bar{T}_i$, т. е. она имеет положительные частные производные по указанным аргументам.

Предположим, что некоторым образом удалось установить значения коэффициентов демпфирования ζ_j , соответствующие системе максимального быстрогодействия с указанными ограничениями на перерегулирование и сигнал управления. При данных фиксированных значениях параметров ζ_j рассмотрим задачу оптимизации (минимизации) времени переходных процессов системы (8) за счет выбора ее постоянных времени $\bar{T}_i, i = 1, 2, \dots, n - \gamma$. Для оптимизации времени переходных процессов рассматриваемой системы в соответствии с возрастающим характером функции $t_{пп} = f(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_{n-\gamma})$ необходимо параметры $\bar{T}_i, i = 1, 2, \dots, n - \gamma$, уменьшать, причем согласно ограничению (9) уменьшение целесообразно осуществлять до значений $\bar{T}_i = 1$.

Дальнейшее же уменьшение $\bar{T}_i < 1$ приведет к увеличению некоторых других постоянных времени $\bar{T}_j > 1$ и, соответственно, к увеличению времени $t_{пп}$ при выполнении следующего важного условия: все постоянные времени $\bar{T}_i$ имеют одинаковую степень влияния на время переходных процессов системы.

Таким образом, при указанном условии приходим к выводу, что нормированная система (8) может иметь минимальное время переходных процессов, если ее постоянные времени

$$\bar{T}_1 = \bar{T}_2 = \dots = \bar{T}_{n-\gamma} = 1, \quad (10)$$

а полюса ее передаточной функции

$$W(q) = 1 / \prod_{i=1}^{n-2\gamma} (q+1) \prod_{j=1}^{\gamma} (q^2 + 2\zeta_j q + 1) \quad (11)$$

соответственно расположены на окружности единичного радиуса. В этом случае исходная (ненормированная) система (7) с учетом соотношения $|p_i| = 1/T_i$ может иметь максимальное быстродействие, если ее полюсы удовлетворяют условию (5) теоремы.

Если же степень влияния различных T_i на время $t_{пп}$ неодинакова, то для минимизации $t_{пп}$ целесообразно уменьшить значения T_i с большей степенью влияния, пожертвовав некоторым увеличением T_i с малой степенью влияния. В результате вектор значений $(T_1, T_2, \dots, T_{n-\gamma})$, доставляющий минимум $t_{пп}$, в этом случае не будет единичным: часть T_i с большой степенью влияния на $t_{пп}$ будет меньше 1, другая — больше 1, но их среднее значение может быть относительно близко к единице.

Дальнейший анализ показал, что постоянные времени аperiodического и колебательного звеньев по-разному влияют на длительность переходных процессов системы. Этот вывод непосредственно следует из физики движения указанных звеньев, а математически выражается в том, что движение аperiodического звена описывается экспоненциальной функцией, а колебательного — принципиально иной функцией: произведением экспоненты на гармоническую функцию. В то же время нет никаких оснований считать, что влияние на длительность переходных процессов системы однотипных звеньев (только аperiodических или только колебательных) различно. Отталкиваясь от этого вывода, при четном значении n (условие теоремы) передаточную функцию быстродействующей системы представим последовательным соединением однотипных колебательных звеньев, постоянные времени которых в одинаковой степени влияют на время ее переходных процессов и поэтому их значения $T_1 = T_2 = \dots = T_{n/2} \equiv T$ равны, а, соответственно, полюсы $|p_i| = 1/T_i$ системы с максимальным быстродействием расположатся на окру-

жности радиуса $R = 1/T$ — условие (5) теоремы доказано.

Подчеркнем, что быстродействующая система может содержать в своей структуре и аperiodические звенья с равными постоянными времени, которые получаются из указанных колебательных звеньев при $\zeta = 1$.

Необходимо отметить, что меньшее время переходных процессов $t_{пп}$ системы достигается за счет больших значений сигнала управления, и поэтому чем меньше $t_{пп}$ (соответственно, больше радиус $R = 1/T$ окружности размещения полюсов замкнутой системы), то тем больше максимальное по модулю значение управления $|u|$. Следовательно, при синтезе быстродействующего регулятора и последующем его моделировании в целях выбора значения радиуса R окружности размещения полюсов, обеспечивающего выполнение имеющегося ограничения $|u(t)| \leq u_{\max}$, применимо правило: чем больше R , тем больше $|u|$ и тем ближе приближаемся к границе указанного ограничения.

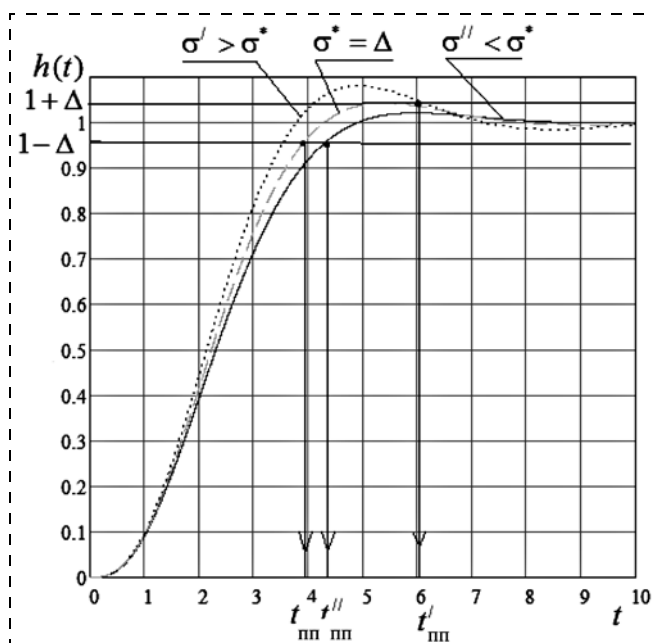
Доказательство условия (6). Рассмотрим систему управления с передаточной функцией

$$W(q) = 1 / \prod_{j=1}^N (q^2 + 2\zeta_j q + 1), \quad (12)$$

удовлетворяющей ранее доказанному соотношению (5). Установим, что для получения минимального времени переходных процессов системы (12) необходимо значения ее коэффициентов демпфирования ζ_j выбрать из условия (6).

Доказательство данного условия проведем методом от противного. Для этого предполагаем, что САУ с передаточной функцией (12) имеет $\sigma \neq \sigma^*$.

Начнем с рассмотрения случая, когда $\sigma > \sigma^*$, причем перерегулирование системы превышает ука-



Определение времени переходных процессов систем

занный уровень на малую величину. В данном случае с учетом значения $\Delta = \sigma^*$ время $t_{пп}$ САУ будет определяться по второму, а то и третьему моменту времени попадания в принятую зону Δ , что увеличивает значение времени переходного процесса системы — это наглядно видно из графиков, представленных на рисунке, показывающих типовые переходные характеристики звена (12) при относительно небольших изменениях его коэффициентов демпфирования.

В анализируемом случае время $t_{пп}$ системы можно уменьшить за счет изменения параметров ее ПФ, сделав $\sigma = \Delta$ и, соответственно, перейдя к определению времени переходного процесса по первому моменту попадания в зону Δ (он здесь также будет и моментом вхождения — достижения зоны без ее покидания).

Теперь рассмотрим случай системы управления с перерегулированием $\sigma < \sigma^* = \Delta$ и установим, что это уменьшение перерегулирования тоже приведет к снижению быстродействия системы. Для этого воспользуемся известным алгоритмом определения перерегулирования системы: 1) из условия равенства нулю производной $\dot{h}(t_m) = 0$ находится момент времени t_m достижения переходной функцией системы максимального значения; 2) находится само максимальное значение $h_m = h(t_m)$ и рассчитывается перерегулирование системы $\sigma = (h_m - h_{уст}) \times 100\% / h_{уст}$, $h_{уст} = 1$.

Наряду с производной $\dot{h}(t_m)$ рассмотрим производную $\dot{h}(t_n)$ в точке $h_{уст} = 1$. Отметим, что наименьшее значение времени, определяемое из условия $h(t_n) = 1$, в теории управления называется временем нарастания системы и используется совместно с $t_{пп}$ для оценки быстродействия систем, имеющих апериодические и колебательные переходные процессы. Если гипотетически предположить, что в точке $h(t_n) = 1$ производная $\dot{h}(t_n)$ равнялась бы нулю, то очевидно, что рассматриваемая система имела бы переходные процессы без перерегулирования, причем их длительность совпадала бы с t_n . Но производная $\dot{h}(t_n) \neq 0$, и система движется далее к точке $h_m = h(t_m)$, $t_m > t_n$. Из данного физического смысла производной $\dot{h}(t_n)$ в точке $h(t_n) = 1$ и указанного алгоритма определения перерегулирования вытекает вывод: большее значение перерегулирования системы достигается за счет более высокой скорости $\dot{h}(t_n)$ и, соответственно, меньшего времени t_n , которое в первом приближении можно оценить значением $1/\dot{h}(t_n)$. Отсюда следует, что при уменьшении $\sigma < \sigma^* = \Delta$ система будет иметь большие значения t_n и $t_{пп}$.

Таким образом, анализ двух случаев ($\sigma > \sigma^* = \Delta$ и $\sigma < \sigma^* = \Delta$) показывает, что отклонение перерегулирования от значения $\sigma = \sigma^* = \Delta$ как в одну, так и в другую сторону приводит к увеличению длительности переходного процесса системы. Поэтому справедлив вывод: время переходного процесса линейной САУ структуры (12) минимально при таких параметрах системы ζ_j , которые обеспечивают выполнение

условия $\sigma = \sigma^*$. Так как минимум может быть локальным, то условие (6) имеет необходимый характер, что и указано в формулировке теоремы.

Необходимо подчеркнуть, что для некоторого класса систем условия теоремы являются не только необходимыми, но и достаточными условиями максимального быстродействия. К данному классу, например, относятся системы с переходными процессами монотонного характера, для которых $\sigma = 0$ и, соответственно, они имеют только действительные отрицательные полюсы. Для этих систем условие (5) и ограничение на управление однозначно определяют параметры K , T оптимальной передаточной функции

$$W(s) = K/(Ts + 1)^n,$$

причем порядок системы n может быть и нечетным. Данный результат был установлен ранее в работах [11, 14].

Для многих объектов условия (5), (6) однозначно определяют параметры передаточных функций (7) замкнутых оптимальных систем управления, зная которые, с использованием метода синтеза по желаемой передаточной функции, относительно легко осуществляется синтез регулятора, обеспечивающего максимальное быстродействие проектируемой системы. Данный метод подробно описан в работах [13, 14]. Так как условия теоремы непосредственно определяют распределение полюсов САУ максимального быстродействия, то для синтеза таких систем применим также метод модального управления [13]. Выбор метода синтеза определяется техническими условиями реализации регулятора. В частности, если измерению доступна только выходная координата объекта, а не полностью вектор состояния объекта, то предпочтителен метод синтеза по желаемой передаточной функции системы.

Моделирование синтезированных систем управления подтвердило необходимость выполнения условий (5) и (6) для получения в них минимального времени переходных процессов.

Заключение

В классе линейных систем управления высокого порядка, описываемых передаточными функциями, числитель которых представляет константу, поставлена и решена с учетом заданных ограничений на управление и перерегулирование задача синтеза регулятора с минимальным временем переходных процессов, понимаемым в смысле классической теории автоматического управления.

Основной этап предлагаемого подхода синтеза состоит в определении оптимальной передаточной функции проектируемой замкнутой системы, структура которой представляется последовательным соединением определенного числа апериодических и колебательных звеньев. Доказана теорема, устанавливающая, что для достижения минимального времени переходных процессов в системе уп-

равления четного порядка указанные звенья должны иметь одинаковое значение постоянных времени, которое выбирается из условия выполнения ограничения на управление. Соответственно коэффициенты демпфирования колебательных звеньев должны находиться из условия обеспечения заданного значения перерегулирования синтезируемой системы.

Теорема доказана для частного, но важного для практики управления случая назначения допустимого значения перерегулирования системы, равного величине зоны, по которой определяется время переходных процессов данной системы управления. Это предопределяет возможность применения теоремы к решению в линейном приближении так называемой задачи быстрогодействия по одной фазовой координате объекта, которая актуальна для инженерной практики.

После определения в соответствии с условиями теоремы оптимальной передаточной функции замкнутой системы управления синтез регулятора, обеспечивающего максимальное быстродействие проектируемой системе, рекомендуется проводить методом синтеза по желаемой передаточной функции или методом модального управления в зависимости от технических условий его реализации.

Список литературы

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961. 302 с.
2. Атанс М., Фалб П. Л. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
3. Техническая кибернетика. Теория автоматического управления. Книга 3. Часть II. Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регули-

рования / Под ред. проф. В. В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1969. 368 с.

4. Иванов В. А., Фалдин Н. В. Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1981. 336 с.
5. Ключев А. С., Колесников А. А. Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.
6. Колесников А. А., Гельфгат А. Г. Проектирование многокритериальных систем управления промышленными объектами. М.: Энергоатомиздат, 1993. 304 с.
7. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Гибридная схема решения задачи линейного быстрогодействия на основе формализма полиэдральной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7. С. 3—9.
8. Ловчаков В. И. Функции переключения оптимального по быстродействию регулятора для четырехкратного интегратора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 9. С. 3—5.
9. Абдулаев Н. Д., Петров Ю. П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 240 с.
10. Александров А. Г., Паленов М. В. Состояние и перспективы развития адаптивных ПИД-регуляторов // АиТ. 2014. № 2. С. 16—30.
11. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. М.: Гостехиздат, 1962.
12. Рубинчик А. М. Приближенный метод оценки качества регулирования в линейных системах // Устройства и элементы теории автоматики и телемеханики. М.: Машгиз, 1952.
13. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т. / Под ред. К. А. Пупкова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. Т. 2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления. 736 с.
14. Ким Д. П. Синтез оптимальных по быстродействию непрерывных линейных регуляторов // АиТ. 2009. № 3. С. 5—16.
15. Ловчаков В. И. К решению задачи максимального быстродействия линейных систем // Системы управления электротехническими объектами. Вып. 7. Сб. научных трудов седьмой Всероссийской научно-практической конференции. Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. С. 127—133.
16. Ловчаков В. И. К проблеме быстрогодействия систем управления по одной (нескольким) координатам // Системы управления электротехническими объектами. Тр. 3-й Всероссийской научно-практич. конф. Тула: Известия ТулГУ, 2005. С. 111—113.

Necessary Conditions of Time-Optimality of Linear Dynamical Systems

V. I. Lovchakov, lovvi50@mail.ru✉,
Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation

Corresponding author: Lovchakov Vladimir I., D. Sc., Full Professor,
Tula State University, department of electrical engineering and electrical equipment,
Tula, 300012, Russian Federation, e-mail: lovvi50@mail.ru

Received on November 16, 2016

Accepted on December 09, 2016

We formulate and solve the problem of regulator design with minimal transient time (in terms of classical control theory) under specified constraints on control and overregulation. The problem is solved in a class of linear high-order control systems described by a transfer function having a constant in the numerator. The main stage of the proposed design approach consists in the determination of optimal transfer function of closed-loop control system with the structure composed by the sequential connection of specific number of aperiodic and oscillatory links. We prove the theorem establishing that for even order control systems these links must have the same values of time constants to provide the minimum transient time, and time constants must be selected from the condition of satisfying the control constraints. Correspondingly, damping coefficients of oscillatory links must be determined from the condition of providing the specified overregulation value of designed system. The theorem is proved for the special, but important for control practice case of specifying the permissible system overregulation value being equal to the value of the zone, using which the transient time of this control system is determined. This predetermine the possibility of theorem application to the solution (in the linear approximation) of so-called problem of time-optimality for one phase

coordinate of an object, which is actual for engineering practice. Conditions of theorem are not only necessary, but also sufficient conditions of time-optimality for several subclasses of control systems. Systems with monotonic transient processes with prohibited overregulation having, correspondingly, only negative real poles are an example of such subclass. After determination of optimal transfer function of closed-loop control system subject to theorem conditions, it is recommended to perform regulator design providing the time-optimality by the synthesis method according to the desired transfer function or by the method of modal control depending on the technical conditions of regulator realization.

Keyword: linear one-dimensional object, time-optimality criterion, overregulation, poles of optimal system

For citation:

Lovchakov V. I. Necessary Conditions of Time-Optimality of Linear Dynamical Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 376–382.

DOI: 10.17587/mau.18.376-382

References

1. **Pontrjagin L. S., Boltjanskij V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.** *Matematicheskaja teorija optimal'nyh processov* (Mathematical theory of optimal processes), Moscow, Fizmatlit, 1961, 302 p. (in Russian).
2. **Atans M., Falb P. L.** Optimal'noe upravlenie, Moscow, Mashinostroenie, 1968. 764 p. (in Russian). (**Athans M., Falb P. L.** Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications. McGraw-Hill, Inc., New York, 1963).
3. **Solodovnikov V. V.** ed. *Tekhnicheskaja kibernetika. Teorija avtomaticheskogo upravlenija. Kniga 3. Chast' II. Teorija nestacionarnykh, nelinejnykh i samonastroyajushchih sistem avtomaticheskogo regulirovanija* (Technical cybernetics. Theory of automatic control. Book 3. Part II. Theory of nonstationary, nonlinear, self-tuning systems of automatic control), Moscow, Mashinostroenie, 1969, 368 p. (in Russian).
4. **Ivanov V. A., Faldin N. V.** *Teorija optimal'nykh sistem avtomaticheskogo upravlenija* (Theory of optimal automatic control systems), Moscow, Nauka, 1981, 336 p. (in Russian).
5. **Kljuev A. S., Kolesnikov A. A.** Optimizacija avtomaticheskikh sistem upravlenija po bystrodejstvu (Time optimization of automatic control systems), Moscow, Jenergoizdat, 1982. 240 p. (in Russian).
6. **Kolesnikov A. A., Gel'fgat A. G.** *Proektirovanie mnogokriterial'nykh sistem upravlenija promyshlennymi ob'ektami* (Design of multi-objective control systems for industrial objects), Moscow, Jenergoatomizdat, 1993, 304 p. (in Russian).
7. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *Gibridnaja shema reshenija zadachi linejnogo bystrodejstva na osnove formalizma poljedral'noj optimizacii* (Hybrid solution scheme for linear time optimization problem using polyhedral optimization formalism), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2014, no. 7, pp. 3–9 (in Russian).
8. **Lovchakov V. I.** *Funkcii pereklyucheniya optimal'nogo po bystrodejstvu reguljatora dlja chetyrehkratnogo integratora* (Switching functions of time-optimal regulator for fourfold integrator), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2014, no. 9, pp. 3–5 (in Russian).
9. **Abdulaev N. D., Petrov Ju. P.** *Teorija i metody proektirovanija optimal'nykh reguljatorov* (Theory and design methods of optimal regulators) / N. D. Abdulaev. L.: Jenergoatomizdat, 1985. 240 p. (in Russian).
10. **Aleksandrov A. G., Palenov M. V.** Sostojanie i perspektivy razvitiya adaptivnykh PID-reguljatorov, *AiT*, 2014, no. 2, pp. 16–30 (**Alexandrov A. G., Palenov M. V.** Autom Remote Control (2014) 75: 188. doi: 10.1134/S0005117914020027 (in Russian)).
11. **Krasovskij A. A., Pospelov G. S.** *Osnovy avtomatiki i tekhnicheskoy kibernetiki* (Fundamentals of automation and technical cybernetics), Moscow, Gostehizdat, 1962 (in Russian).
12. **Rubinchik A. M.** *Priblizhennyj metod ocenki kachestva regulirovanija v linejnykh sistemah*. In *Ustrojstva i jelementy teorii avtomatiki i telemekhaniki* (Approximate method of estimation of control quality in linear systems. In Devices and elements of theory of automation and telemechanics), Moscow, Mashgiz, 1952 (in Russian).
13. **Pupkov K. A.** ed. *Metody klassicheskoy i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravlenija* (Sintez reguljatorov i teorija optimizacii sistem avtomaticheskogo upravlenija), Moscow, Publishing house of MGTU, 2000736 p. (in Russian).
14. **Kim D. P.** Sintez optimal'nykh po bystrodejstvu nepreryvnykh linejnykh reguljatorov, *AiT*, 2009, no. 3, pp. 5–16 (**Kim D. P.** Autom Remote Control (2009) 70: 347. doi: 10.1134/S0005117909030023 (in Russian)).
15. **Lovchakov V. I.** *K resheniju zadachi maksimal'nogo bystrodejstva linejnykh sistem* (On the solution of time-optimal problem for linear systems), *Sistemy upravlenija jelektrotehnicheskimi ob'ektami*, iss. 7, *Sb. nauchnykh trudov sed'moj Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii*, Tula, Publishing house of TulGU, 2015, pp. 127–133 (in Russian).
16. **Lovchakov V. I.** *K probleme bystrodejstva sistem upravlenija po odnoj (neskol'kim) koordinatam* (On the problem of time-optimality of control systems along the one (several) coordinates), *Sistemy upravlenija jelektrotehnicheskimi ob'ektami. Trudy 3-j Vserossijskoj nauchno-praktich. konf.*, Tula, Izvestija TulGU, 2005, pp. 111–113 (in Russian).



18–20 сентября 2017 г. в Севастополе на базе
Севастопольского государственного университета состоится

**3-я Всероссийская
научно-практическая конференция
с международным участием**

**ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ,
УПРАВЛЕНИЕ И МЕХАТРОНИКА
(ИСУМ — 2017)**

Тематика конференции

- ♦ Общие проблемы современной теории управления
- ♦ Теоретические и прикладные проблемы мехатронных и робототехнических систем
- ♦ Информационные технологии в управлении, автоматизации и мехатронике
- ♦ Системы управления вооружением и техникой военно-морского флота

Подробную информацию о конференции см. сайте:
<http://isum.sevsu-iuts.ru/>

