В. И. Воротников, д-р физ.-мат. наук, проф., vorot@ntiustu.ru,
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург,

Ю. Г. Мартышенко, канд. физ.-мат. наук, доц., j-mart@mail.ru,
Российский государственный университет нефти и газа, г. Москва

К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных систем

Рассматривается общий класс нелинейных дискретных систем, допускающих "частичное" (по части переменных) нулевое положение равновесия. В контексте метода функций Ляпунова получены условия устойчивости и асимптотической устойчивости данного положения равновесия не по всем определяющим его переменным, а по их заданной части. Обсуждается вопрос унификации исследований частичной устойчивости стационарных и нестационарных дискретных систем.

Ключевые слова: дискретная (конечно-разностная) система, частичная устойчивость, метод функций Ляпунова

Введение

Дискретные (конечно-разностные) системы широко применяются при моделировании дискретных во времени процессов. В сравнении с непрерывными системами они в ряде случаев могут более точно отражать динамику моделируемых процессов. Вместе с тем, дискретные системы являются дискретными приближениями или разностными схемами для непрерывных систем дифференциальных уравнений, а также составной частью гибридных (с импульсным эффектом) систем, эволюция которых происходит в непрерывно-дискретном времени. Теории и методам качественного исследования дискретных по времени систем посвящена обширная литература, в том числе ряд монографий [1–7].

В данной статье рассматривается нелинейная дискретная система конечно-разностных уравнений общего вида, для которой существует "частичное" (по некоторой части переменных) нулевое положение равновесия. Устойчивость и асимптотическая устойчивость данного положения равновесия, в свою очередь, анализируются также не по всем определяющим его переменным, а по их заданной части. При этом делается допущение о том, что начальные возмущения переменных, не определяющих "частичное" положение равновесия, могут быть большими (принадлежащими произвольному компактному множеству) по одной части и произвольными по оставшейся части этих переменных. Для случая нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью такие задачи были рассмотрены ранее в работах [8, 9].

Для решения поставленных задач частичной устойчивости применяется дискретный вариант метода функций Ляпунова в соответствующей модификации. Получены условия частичной устойчивости указанного вида, обобщающие ряд известных результатов по частичной устойчивости дискретных систем. Отмечается, что поскольку допущение о больших (в сравнении с допущением о произвольных) начальных возмущениях переменных, не определяющих "частичное" положение равновесия, приводит к существенно более мягким требованиям

к функциям Ляпунова, то предложенная комбинированная постановка задачи может оказаться приемлемым компромиссом между содержательным смыслом понятия частичной устойчивости и соответствующими требованиями к функциям Ляпунова. В качестве следствий получены условия устойчивости и асимптотической устойчивости по части переменных "полного" (по всем переменным) положения равновесия дискретных систем, также обобщающие известные результаты.

На основе предложенной в статье постановки задачи частичной устойчивости обсуждается вопрос унификации исследований частичной устойчивости стационарных и нестационарных дискретных систем.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное действительное конечно-мерное пространство векторов $\mathbf{x}$ с нормой $\|\mathbf{x}\| = \max|x_i|$ (x_i — i -я компонента вектора $\mathbf{x}$). Введем разбиение $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T, \mathbf{z}^T)^T$ (символ T обозначает транспонирование).

Пусть дана нелинейная система дискретных (конечно-разностных) уравнений $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k))$ [1–7], которую с учетом сделанного разбиения $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T, \mathbf{z}^T)^T$ представим в виде двух групп уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k+1) &= \mathbf{Y}(k, \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)), \\ \mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{Z}(k, \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)). \end{aligned} \quad (1.1)$$

В системе (1.1) $k = 0, 1, 2, \dots$ — дискретное время.

Если имеет место условие $\mathbf{Y}(k, \mathbf{0}, \mathbf{z}(k)) \equiv \mathbf{0}$, то множество $M = \{\mathbf{x}(k): \mathbf{y}(k) = \mathbf{0}\}$ является "частичным" положением равновесия системы (1.1).

Имея в виду анализ устойчивости положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ не по всем определяющим его переменным, а только по их некоторой части, предположим также, что $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T)^T$. Будем считать, что вектор-функция $\mathbf{X} = (\mathbf{Y}^T, \mathbf{Z}^T)^T$, определяющая правые части системы (1.1), непрерывна по $\mathbf{x}$ для каждого значения $k = 0, 1, 2, \dots$ в области $G = \{|\mathbf{y}_1| < h, |\mathbf{y}_2| + |\mathbf{z}| < \infty\}$. Кроме того, считаем, что для вектор-функции $\mathbf{X}$ равномерно для каждого значения $k = 0, 1, 2, \dots$ на каждом компактном множестве K из множества G выполнены условия

Коши—Липшица по $\mathbf{x}$. Тогда для каждой точки $k_0, \mathbf{x}_0$ из области G существует единственное решение $\mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1.1), а "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ является инвариантным множеством этой системы. Дополнительно предположим [10], что решения системы (1.1) ($\mathbf{y}_2, \mathbf{z}$)-продолжимы; это значит что решения системы (1.1) определены для всех $k \geq k_0$, при которых $|\mathbf{y}_1(k, k_0, \mathbf{x}_0)| < h$.

Представим компоненту $\mathbf{z}$ вектора $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T)$ и обозначим D_δ область значений $\mathbf{x}_0$ таких, что $|\mathbf{y}_0| < \delta, |\mathbf{z}_{10}| \leq L, |\mathbf{z}_{20}| < \infty$; область D_Δ получается заменой δ на Δ .

Определения. "Частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$:

1) $\mathbf{y}_1$ -устойчиво (устойчиво по отношению к $\mathbf{y}_1$), если для любых $\varepsilon > 0, k_0 \geq 0$ и для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, k_0, L) > 0$ такое, что неравенство $|\mathbf{y}_1(k, k_0, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ имеет место для всех $k \geq k_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$;

2) равномерно $\mathbf{y}_1$ -устойчиво, если $\delta = \delta(\varepsilon, L)$;

3) равномерно асимптотически $\mathbf{y}_1$ -устойчиво, если оно равномерно $\mathbf{y}_1$ -устойчиво и существует $\Delta(L) > 0$ такое, что для произвольного решения $\mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1.1), для которого $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$, предельное соотношение $|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| = 0, k \rightarrow \infty$ выполняется равномерно по $k_0, \mathbf{x}_0$ из области $k_0 \geq 0, \mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ (для любых чисел $\eta > 0, k_0 \geq 0$ и любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется целое число $T(L, \eta) > 0$ такое, что $|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| < \eta$ при всех $k \geq k_0 + T(L, \eta), \mathbf{x}_0 \in D_\Delta$).

2. Условия частичной устойчивости

Будем рассматривать однозначные непрерывные по $\mathbf{x}$ при каждом $k = 0, 1, 2, \dots$ скалярные функции $V = V(k, \mathbf{x}), V(k, \mathbf{0}) \equiv 0$, определенные в области G . Аналогом производных таких функций в силу системы (1.1) являются соответствующие приращения этих функций в силу системы (1.1), вычисляемые по формуле $\Delta V = V(k+1, \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k))) - V(k, \mathbf{x}(k))$.

Для нахождения условий частичной устойчивости также рассмотрим:

1) вспомогательные скалярные функции $V^*(k, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1), V^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$ и вспомогательные вектор-функции $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x})$, непрерывные по $\mathbf{x}$ при каждом $k = 0, 1, 2, \dots$ в области G ;

2) непрерывные монотонно возрастающие по $r > 0$ скалярные функции $a_i(r), a_i(0) = 0 (i = 1, 2, 3)$.

Теорема 1. Допустим, что для системы (1.1) наряду со скалярной V -функцией можно указать векторную функцию $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}), \boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ такую, что в области

$$k \geq 0, |\mathbf{y}_1| + |\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})| < h_1 < h, |\mathbf{y}_2| + |\mathbf{z}| < \infty \quad (2.1)$$

выполняются условия

$$V(k, \mathbf{x}) \geq a_1(|\mathbf{y}_1| + |\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})|), \quad (2.2)$$

$$\Delta V = V(k+1, \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k))) - V(k, \mathbf{x}(k)) \leq 0. \quad (2.3)$$

Тогда при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1):

1) $\mathbf{y}_1$ -устойчиво, если, кроме того,

$$V(k, \mathbf{x}) \leq V^*(k, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1), V^*(k, \mathbf{0}, \mathbf{z}_1) \equiv 0; \quad (2.4)$$

2) равномерно $\mathbf{y}_1$ -устойчиво, если

$$V(k, \mathbf{x}) \leq V^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1), V^*(\mathbf{0}, \mathbf{z}_1) \equiv 0. \quad (2.5)$$

Доказательство. Для любых $\varepsilon > 0, k_0 \geq 0$ и для любого наперед заданного числа $L > 0$, в силу непрерывности по $\mathbf{x}$ при каждом $k = 0, 1, 2, \dots$ функции V , условий $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$ и (2.4), найдется $\delta(\varepsilon, k_0, L) > 0$ такое, что $V(k_0, \mathbf{x}_0) < a_1(\varepsilon)$ при $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$.

В результате, учитывая соотношения (2.2) и (2.3), для произвольного решения $\mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0 \in D_\delta$ системы (1.1) имеем неравенства

$$a_1(|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| + |\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0))|) \leq \leq V(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(k_0, \mathbf{x}_0) < a_1(\varepsilon).$$

Имея в виду свойства функции $a_1(r)$, получаем $|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ для всех $k \geq k_0, \mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Первая часть теоремы доказана.

Если условие (2.5) имеет место, то для любых $\varepsilon > 0, k_0 \geq 0$ и для любого наперед заданного $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, L) > 0$ такое, что $V(k_0, \mathbf{x}_0) < a_1(\varepsilon)$ при $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Дальнейшее доказательство аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2. Допустим, что для системы (1.1) наряду со скалярной V -функцией можно указать векторные функции $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}), \boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ и $\mathbf{w}(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ такие, что в области (2.1) наряду с условиями

$$a_1(|\mathbf{y}_1| + |\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})|) \leq V(k, \mathbf{x}) \leq a_2(|\mathbf{y}_1| + |\mathbf{w}(\mathbf{x})|), \quad (2.6)$$

$$\Delta V(k, \mathbf{x}) \leq -a_3(|\mathbf{y}_1(k)| + |\mathbf{w}(\mathbf{x}(k))|) \quad (2.7)$$

также выполнено условие (2.5).

Тогда "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) равномерно асимптотически $\mathbf{y}_1$ -устойчиво при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$.

Доказательство. Равномерная $\mathbf{y}_1$ -устойчивость при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) следует из теоремы 1. Для заданного положительного числа h_1 выберем $\Delta(h_1, L) > 0$ такое, что из $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ следует неравенство $V(k_0, \mathbf{x}_0) < a_1(h_1)$ (это можно сделать на основании непрерывности V -функции по $\mathbf{x}$ при каждом $k = 0, 1, 2, \dots$, условия $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$ и условия (2.5)). Как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что для произвольного решения $\mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ системы (1.1) имеют место соотношения $a_1(|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| + |\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0))|) \leq V(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(k_0, \mathbf{x}_0) < < a_1(h_1)$. Следовательно, $|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| < h_1$ для всех $k \geq k_0$, если $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$.

Пусть $0 < \eta < \Delta$ и пусть $T(L, \eta) > 0$ есть первое целое число такое, что

$$T(L, \eta) \geq \frac{[2a_2(h_1) - a_1(\varepsilon)]}{a_3(a_2^{-1}(a_1(\eta)))}$$

Покажем, что $V(k_*, \mathbf{x}(k_*; k_0, \mathbf{x}_0)) < a_1(\eta)$ для некоторого $k_* \in (k_0, k_0 + T)$. Если, от противного, неравенство $a_1(\eta) \leq V(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)) \leq a_2(|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| + |\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0))|)$ имеет место при $k_* \in (k_0, k_0 + T)$, тогда $|\mathbf{y}_1(k_*; k_0, \mathbf{x}_0)| + |\boldsymbol{\mu}(k_*, \mathbf{x}(k_*; k_0, \mathbf{x}_0))| \geq a_2^{-1}(a_1(\eta))$.

В результате получаем противоречивые соотношения

$$a_1(\eta) \leq V(k_0 + T, \mathbf{x}(k_0 + T; k_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(k_0, \mathbf{x}_0), \\ - a_3(a_2^{-1}(a_1(\eta)))T < a(h_1) - a_3(a_2^{-1}(a_1(\eta)))T < a_1(\eta)$$

и, следовательно, неравенство $V(k_*, \mathbf{x}(k_*; k_0, \mathbf{x}_0)) < a_1(\eta)$ имеет место для некоторого $k_* \in (k_0, k_0 + T)$.

Имея в виду, что V -функция является невозрастающей вдоль произвольного решения $\mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ системы (1.1), при всех $k \geq k_*$ имеем

$$a_1(|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)|) \leq V(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)) \leq \\ \leq V(k_*, \mathbf{x}(k_*; k_0, \mathbf{x}_0)) < a_1(\eta).$$

В результате неравенство $|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| < \eta$ имеет место при всех $k \geq k_0 + T > k_*$, если $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$. Теорема доказана.

Замечания. 1. Устойчивость и асимптотическая устойчивость по всем переменным "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) рассмотрены в работе [6] соответственно в случае $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$ и в случае $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{w}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$ при условии $|\mathbf{y}_0| < \delta$, где δ может зависеть не только от ε , k_0 , но и от $\mathbf{z}_0$ (это условие эквивалентно условиям $|\mathbf{y}_0| < \delta$, $|\mathbf{z}_0| \leq L$, где δ зависит не только от ε , k_0 , но и от L). Поскольку при этом условия (2.4) и (2.5) слабее соответствующего условия $V(k, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv 0$ в работе [6], то предложенная комбинированная постановка задачи может оказаться приемлемым компромиссом между содержательным смыслом понятия частичной устойчивости и соответствующими требованиями к функциям Ляпунова. Устойчивость по части переменных "частичного" положения равновесия дискретной системы (1.1) в литературе, по-видимому, не рассматривалась.

2. Вспомогательная V -функция и ее приращение в силу системы (1.1) в сформулированных теоремах являются, вообще говоря, знакопеременными функциями в области (см. по этому поводу также работу [10])

$$k \geq 0, |\mathbf{y}_1| < h_1 < h, |\mathbf{y}_2| + |\mathbf{z}| < \infty. \quad (2.8)$$

3. В рамках предложенного подхода существенно нелинейные V -функции могут быть построены как квадратичные формы $V(k, \mathbf{x}) \equiv V^*(k, \mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}))$ переменных $\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}$, знакоопределенные по всем переменным.

4. Задача устойчивости по части переменных "частичного" положения равновесия также рассмотрена и для нелинейных функционально-дифференциальных систем с последействием [11].

Пример. Пусть система (1.1) состоит из уравнений

$$y_1(k+1) = 1/2 y_1(k) + y_2(k) z_1(k), \\ y_2(k+1) = [1/2 - y_1(k) y_2(k) z_1(k)] z_1(k), \quad (2.9) \\ z_1(k+1) = [1 + 2 y_1(k) y_2(k) z_1(k)] y_2(k), \\ z_2(k+1) = e^k y_1(k) z_2(k).$$

Наряду с V -функцией $V(\mathbf{x}) = y_1^2 + 2 y_2^2 z_1^2$ также рассмотрим две вспомогательные функции $\mu_1 = w_1 = y_2 z_1$ такие, что для V -функции выполняются условия (2.5) и (2.6). Заметим, что будучи нелинейной по y_1, y_2, z_1 , в то же время V -функция является квадратичной формой переменных y_1, μ_1 .

В области (2.1) приращение ΔV данной V -функции в силу системы (2.9) оценивается следующим образом:

$$\Delta V = [1/2 y_1(k) + y_2(k) z_1(k)]^2 + \\ + 2 y_2^2(k) z_1^2(k) [1/2 - y_1(k) y_2(k) z_1(k)]^2 [1 + \\ + 2 y_1(k) y_2(k) z_1(k)]^2 - y_1^2(k) - 2 y_2^2(k) z_1^2(k) = \\ = 1/4 y_1^2(k) + y_1(k) y_2(k) z_1(k) + y_2^2(k) z_1^2(k) + \\ + 1/2 y_2^2(k) z_1^2(k) - 4 y_1^2(k) y_2^4(k) z_1^4(k) + \\ + 8 y_1^4(k) y_2^6(k) z_1^6(k) - y_1^2(k) - 2 y_2^2(k) z_1^2(k) = \\ = -3/4 y_1^2(k) + y_1(k) y_2(k) z_1(k) - 1/2 y_2^2(k) z_1^2(k) - \\ - 4 y_1^2(k) y_2^4(k) z_1^4(k) + 8 y_1^4(k) y_2^6(k) z_1^6(k) = \\ = -3/4 y_1^2(k) + y_1(k) \mu_1(k) - 1/2 \mu_1^2(k) - \\ - 4 y_1^2(k) \mu_1^4(k) + 8 y_1^4(k) \mu_1^6(k) \leq -\gamma (y_1^2(k) + \mu_1^2(k)), \\ \gamma = \text{const} > 0,$$

и в области (2.1) (но не в области (2.8)) выполняется условие (2.7).

На основании теоремы 2 "частичное" положение равновесия $y_1(k) = y_2(k) = 0$ системы (2.9) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво для больших значений z_{10} в целом по z_{20} .

Отметим, что в области (2.8) приращение выбранной V -функции в силу системы (2.9) является знакопеременной функцией.

3. Частичная устойчивость "полного" положения равновесия

Предположим, что система (1.1) имеет "полное" положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ (в этом случае система (1.1) может не иметь "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$).

Определения. Положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) [5, 12]:

- 1) y_1 -устойчиво, если для любых $\varepsilon > 0$, $k_0 \geq 0$ найдется $\delta(\varepsilon, k_0) > 0$ такое, что неравенство $|\mathbf{y}_1(k, k_0, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ имеет место для всех $k \geq k_0$ и $|\mathbf{x}_0| < \delta$;
- 2) равномерно y_1 -устойчиво, если $\delta = \delta(\varepsilon)$;

3) *равномерно асимптотически y_1 -устойчиво*, если оно равномерно y_1 -устойчиво и существует $\Delta > 0$ такое, что для произвольного решения $x(k; k_0, x_0)$ системы (1.1), для которого $|x_0| < \Delta$, предельное соотношение $|y_1(k; k_0, x_0)| = 0, k \rightarrow \infty$ выполняется равномерно по k_0, x_0 из области $k_0 \geq 0, |x_0| < \Delta$.

Из доказанных в разделе 2 теорем, в частности, следуют следующие результаты.

Следствие 1. *Предположим, что для системы (1.1) наряду со скалярной V -функцией можно найти векторную функцию $\mu(k, x), \mu(k, 0) \equiv 0$ такую, что в области (2.1) имеют место условия (2.2) и (2.3). Тогда положение равновесия $x(k) = 0$ системы (1.1) y_1 -устойчиво. Если, кроме того, $V(k, x) \leq V^*(x)$, то положение равновесия $x(k) = 0$ равномерно y_1 -устойчиво.*

Следствие 2. *Предположим, что для системы (1.1) наряду со скалярной V -функцией можно найти векторные функции $\mu(k, x), \mu(k, 0) \equiv 0$ и $w(x), w(0) = 0$ такие, что в области (2.1) имеют место условия (2.6) и (2.7). Тогда положение равновесия $x(k) = 0$ системы (1.1) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво.*

Замечания. 1. Сформулированные результаты являются обобщением соответствующих результатов, полученных в работах [1, 2, 5, 12, 13]. Для сравнения, устойчивость по отношению ко всем переменным положения равновесия $x(k) = 0$ рассмотрена в монографии [1]. Условия устойчивости по части переменных положения равновесия $x(k) = 0$ получены при предположениях $|x_0| < \delta$ [2, 5, 12] или $|y_0| < \delta, |z_0| \leq L$ [13], а также $\mu(k, x) \equiv 0, w(x) \equiv 0$ [2, 5, 12] или $\mu(k, x) \equiv 0$ [13]. Поэтому сформулированные результаты об устойчивости по части переменных положения равновесия $x(k) = 0$ являются более общими.

2. Вспомогательная V -функция и ее приращение в силу системы (1.1) в сформулированных следствиях являются, вообще говоря, знакопеременными функциями в области (2.8).

3. "Полное" положение равновесия $x(k) = 0$ системы (2.9) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво на основании следствия 2.

4. К унификации исследований частичной устойчивости

Вводя обозначения $w_1 = k, r = k - k_0$, нестационарную систему (1.1) представим в виде стационарной дискретной системы

$$x(r+1) = X(w_1(r), x(r)), w_1(r+1) = w_1(r) + 1. (4.1)$$

Заметим, что решение $x(k; k_0, x_0), k \geq k_0$ нестационарной системы (1.1) эквивалентно определяется решением $x(r; 0, x_0), r \geq 0$ стационарной системы (4.1).

Если система (1.1) допускает положение равновесия $x(k) = 0$, то система (4.1) допускает "частичное" положение равновесия $x(r) = 0$. В результате как задача устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия, так и задача устойчивости "частичных" положений равновесия нестационар-

ной системы (1.1) сводятся к задаче устойчивости по части переменных "частичного" положения равновесия стационарной системы (4.1). А именно, задача y -устойчивости положения равновесия $x(k) = 0$ нестационарной системы (1.1) сводится к задаче y -устойчивости "частичного" положения равновесия $x(r) = 0$ стационарной системы (4.1), а задача устойчивости "частичного" положения равновесия $y(k) = 0$ нестационарной системы (1.1) сводится к задаче устойчивости "частичного" положения равновесия $y(r) = 0$ стационарной системы (4.1). Особенность такого сведения состоит в том, что в случае равномерной (или неравномерной) по k_0 частичной устойчивости исходной системы (1.1) постановки обеих задач частичной устойчивости для системы (4.1) должны отвечать требованию "в целом по w_{10} " (или "при большом w_{10} "). Поскольку при этом постановки обеих задач частичной устойчивости для системы (4.1) допускают как требование "в целом по z_0 ", так и требование "при большом z_0 ", то в результате приходим к необходимости анализа задач частичной устойчивости, рассмотренных в разделе 1. Кроме того, задача y_1 -устойчивости "частичного" положения равновесия $y(k) = 0$ нестационарной системы (1.1) также сводится к задаче y_1 -устойчивости "частичного" положения равновесия $y(r) = 0$ стационарной системы (4.1) в постановке, рассмотренной в разделе 1.

Указанные выводы свидетельствуют о принципиальном для теории частичной устойчивости дискретных систем характере рассмотренных в разделе 1 задач. Отметим, что ранее обсуждались вопросы: 1) унификации исследований в задачах устойчивости по всем переменным нестационарных дискретных систем и задачах частичной устойчивости стационарных дискретных систем [6]; 2) унификации исследований частичной устойчивости стационарных и нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью [9].

Заключение

В работе получены условия устойчивости и асимптотической устойчивости по части переменных "частичного" положения равновесия нелинейной дискретной (конечно-разностной) системы в контексте метода функций Ляпунова. В качестве следствий получены условия устойчивости и асимптотической устойчивости по части переменных "полного" (по всем переменным) положения равновесия дискретных систем.

Дано сравнение полученных результатов с известными результатами по частичной устойчивости дискретных систем, а также с их аналогами для непрерывных систем. Рассмотрен пример, иллюстрирующий особенности предложенного подхода.

Также показано, что предложенная в статье постановка задач частичной устойчивости позволяет унифицировать исследования частичной устойчивости стационарных и нестационарных дискретных систем.

Список литературы

1. Halanay A., Wexler D. Qualitative Theory of Impulsive Systems. Bucharest: Ed. Acad. RPR, 1968.
2. Фурасов В. Д. Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. М.: Наука, 1982.
3. Agarwal R. P. Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications. N. Y.: Marcel Dekker, 2000.
4. Elaydi S. An Introduction to Difference Equations. N. Y.: Springer-Verlag, 2005.
5. Александров А. Ю., Жабко А. П. Устойчивость движений дискретных динамических систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007.
6. Haddad W. M., Chellaboina V. Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach, Princeton: Princeton University Press, 2008.
7. Зуев А. Л., Игнатъев А. О., Ковалев А. М. Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. Киев: Наукова Думка, 2013.
8. Воротников В. И. Об устойчивости и устойчивости по части переменных "частичных" положений равновесия нели-

нейных динамических систем // Доклады РАН. 2003. Т. 389, № 3. С. 332—337.

9. Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г. К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. Т. 51, Вып. 5. С. 23—31.

10. Воротников В. И. Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 3—59.

11. Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г. Об устойчивости по части переменных "частичных" положений равновесия систем с последствием // Математические заметки. 2014. Т. 96, Вып. 4. С. 496—503.

12. Pachpatte B. G. Partial stability of solutions of difference equations // Proc. Nat. Acad. Sci., India, 1973. V. A43. P. 235—238.

13. Ramirez-Llanos E., Martinez S. Distributed and robust resource allocation algorithms for multi-agent systems via discrete-time iterations // Proc. IEEE Conf. Decision and Control. 2015. P. 1390—1395.

To Problem of Partial Stability of Nonlinear Discrete-Time Systems

V. I. Vorotnikov, vorot@ntiustu.ru✉,

Ural federal university, Ekaterinburg, 620002, Russian Federation,

Yu. G. Martyshenko, j-mart@mail.ru,

Russian state university of oil and gas, Moscow, 119991, Russian Federation

Corresponding author: Vorotnikov Vladimir I., D. Sc. (Phys. & Math.), Professor, Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002, Russian Federation, e-mail: vorot@ntiustu.ru

Received on December 19, 2016

Accepted on January 17, 2017

It is can identify three main classes of problems broadly characterizing partial stability of a dynamical systems, viz., (1) stability with respect to a part of the variables of the zero equilibrium position (Lyapunov-Rumyantsev partial stability problem), (2) stability of the "partial" zero equilibrium position, and (3) stability with respect to a part of the variables of the "partial" zero equilibrium position. In the problem of stability with respect to a part of the variables of the zero equilibrium position of systems of ordinary differential equations with continuous right-side assumes the domain of initial perturbations to be a sufficiently small neighborhood of the zero equilibrium position. Along with this statement, the case then initial perturbations can be large with respect to one part of non-controlled variables and arbitrary with respect to their other part is also considered. On the other hand, for stability problem of "partial" zero equilibrium positions of systems of ordinary differential equations also naturally assume that initial perturbations of variables that do not define the given equilibrium position can be large with respect to one part of the variables and arbitrary with respect to their other part. Contrary the assumptions that initial perturbations of this variables are either only arbitrary or only large the combined assumption made it possible an admissible trade-off between the meaning sense for notion of stability and the respective requirements on the Lyapunov functions. The article studies the problem of partial stability for nonlinear discrete-time systems: stability with respect to a part of the variables of "partial" equilibrium position. Initial perturbations of variables that do not define the given equilibrium position can be large (belonging to an arbitrary compact set) with respect to one part of the variables and arbitrary with respect to their other part. A conditions of stability of this type are obtained in the context of a discrete analog of the Lyapunov functions method, which generalize a number of existing results. Example is given. The problem of unification of process of studying partial stability problems of stationary and non-stationary nonlinear discrete-time systems is also discussed.

Keywords: discrete-time (difference) systems, partial stability, Lyapunov functions

For citation:

Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G. To Problem of Partial Stability of Nonlinear Discrete-Time Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 371—375.

DOI: 10.17587/mau.18.371-375.

References

1. Halanay A., Wexler D. Qualitative Theory of Impulsive Systems. Bucharest, Ed. Acad. RPR, 1968.
2. Furasov V. D. *Ustoichivost i stabilizatsiya diskretnykh protsessov* (Stability and Stabilization of Discrete Processes), Moscow, Nauka, 1982 (in Russian).
3. Agarwal R. P. Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications, 2 ed., N. Y., Marcel Dekker, 2000.
4. Elaydi S. An Introduction to Difference Equations, 3 ed., N. Y., Springer-Verlag, 2005.
5. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P. *Ustoichivost dvizhenii diskretnykh dinamicheskikh sistem* (Stability of Motion of Discrete Dynamical Systems), Saint-Petersburg, Saint-Petersburg Univ. Press, 2007 (in Russian).

6. Haddad W. M., Chellaboina V. Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach, Princeton, Princeton University Press, 2008.

7. Zuyev A. L., Ignatyev A. O., Kovalev A. M. *Ustoichivost i stabilizatsiya nelineynykh sistem* (Stability and Stabilization of Nonlinear Systems), Kiev, Naukova dumka, 2013 (in Russian).

8. Vorotnikov V. I. Partial-equilibrium position of nonlinear dynamical systems: Their stability and stability with respect to some of variables, *Doklady Physics*, 2003, vol. 48, no. 3, pp. 151—155.

9. Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G. On the partial stability of nonlinear dynamical systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2010, vol. 49, no. 5, pp. 702—709.

10. Vorotnikov V. I. Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects, *Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 4, pp. 511—561.

11. Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G. Stability in a part of variables of "partial" equilibria of systems with aftereffect, *Mathematical Notes*. 2014, vol. 96, no. 3, pp. 477—483.

12. Pachpatte B. G. Partial stability of solutions of difference equations, *Proc. Nat. Acad. Sci., India*, 1973, vol. A43, pp. 235—238.

13. Ramirez-Llanos E., Martinez S. Distributed and robust resource allocation algorithms for multi-agent systems via discrete-time iterations, *Proc. IEEE Conf. Decision and Control.*, 2015, pp. 1390—1395.